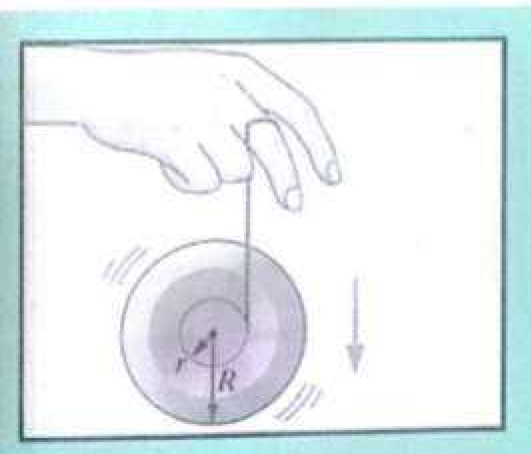
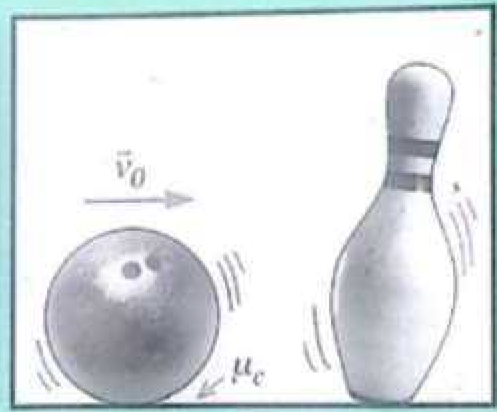
Cuarta Edición

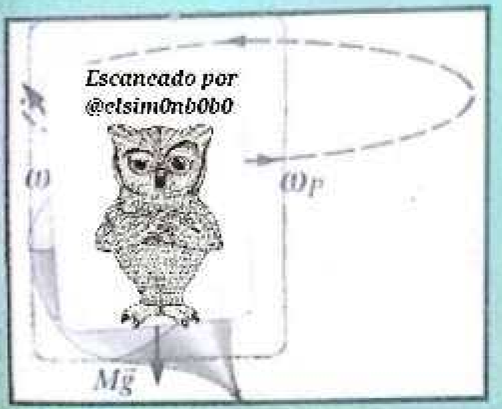
SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y CUERPOS RÍGIDOS

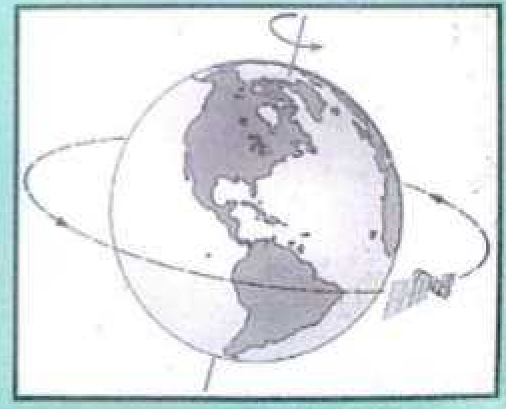
Principios. Preguntas y Problemas Resueltos

DOUGLAS FIGUEROA









Primera Edición: 1995
Segunda Edición: 2001
Tercera Edición: 2004

CUARTA EDICIÓN

Titulo Original:

SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y CUERPOS RÍGIDOS

Serie "Física para Ciencias e Ingeniería" – Volumen 3

DEPÓSITO LEGAL: lf 252 2010 620354

ISBN: 978-980-12-4186-7

Composición y Diagramación

Douglas Figueroa

Impresión

Miguel Ángel García e Hijo, SRL
Sur 15 – El Conde - Caracas

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

INTRODUCCIÓN

Esta serie es fruto de muchos años de experiencia del autor en la enseñanza de los distintos cursos de física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería de la Universidad Simón Bolívar. No pretende sustituir al libro de texto; su único propósito es complementarlo, poniendo a disposición del alumno, un abundante número de problemas, ejercicios y preguntas, para ayudarlo en su estudio del curso fuera del aula, con la aplicación de los principios y leyes físicas en múltiples situaciones interesantes y estimulantes, vinculadas a la realidad. Creemos que, con un trabajo continuo basado en el planteamiento y la discusión de preguntas y en la resolución de problemas, el alumno puede desarrollar a su propio ritmo, hábitos de razonamiento lógico y estrategias metodológicas que le permita vencer las dificultades que son inherentes al aprendizaje de esta asignatura, una tarea que difícilmente puede lograr el docente en el limitado tiempo de clase que dispone. Este volumen 3 está dedicado al tema de Sistemas de Partículas y Cuerpos Rígidos, y se presenta en seis capítulos organizados en tres secciones:

a) Principios Fundamentales: La teoría es expuesta en forma lógica, clara y concisa, tratando de destacar las ideas esenciales y las leyes generales, para permitir una rápida revisión.

b) Problemas Resueltos: Es una selección de problemas con distintos grados de dificultad, que cubren una amplia gama de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones próximas a la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos. Se dan todas las soluciones en detalle, resaltando el aspecto metodológico y didáctico.

c) Verifica tu comprensión: Son preguntas y ejercicios expresados en forma de elección múltiple, a fin de que compruebes tu comprensión conceptual de los temas abordados y al mismo tiempo que desarrolles tu intuición y sentido físico. La mayoría son de naturaleza conceptual o plantean ejercicios cualitativos, cuya solución se alcanza mediante el razonamiento reflexivo, sin tener que recurrir a las fórmulas. Algunas preguntas presentan situaciones aparentemente paradójicas que podrían ir en contra del sentido común, !piénsalas antes de mirar la respuesta!

La resolución de problemas de física es un proceso intelectual parecido a una pequeña investigación científica en que, no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de pasos a seguir para obtener un resultado correcto. La destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con dedicación y ahínco, hasta adquirir un dominio razonable de los conceptos, principios y leyes físicas que permitan un nivel de aprovechamiento satisfactorio. Esperamos que logres culminar esta asignatura con mucho éxito. ¡Suerte, y adelante!

Douglas Figueroa, PhD
figueroa@usb.ve

CONTENIDO

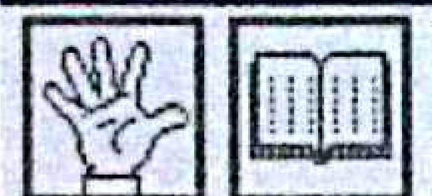
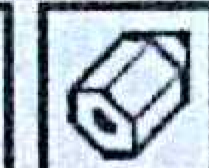
1

SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y CENTRO DE MASA

En las unidades anteriores, hemos considerado a los objetos extensos tales como pelotas, bloques, personas o automóviles, como si estos fueran partículas puntuales. El modelo de partícula es adecuado cuando se considera únicamente el movimiento de traslación de un objeto. Los objetos reales, además de trasladarse pueden rotar o vibrar, de modo que sus partes constituyentes pueden moverse de manera complicada. En este curso vamos a considerar el comportamiento colectivo de *sistemas* constituidos por muchas partículas. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de muchas partículas resultan difíciles y a veces imposibles de resolver. Afortunadamente, el problema se simplifica porque en un sistema de partículas podemos identificar un punto especial denominado *centro de masa* (CM), el cual tiene propiedades interesantes. En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se mueve con velocidad constante como si fuera una partícula no acelerada, por muy complicado que sea el movimiento de las partes componentes del sistema. Cuando el sistema está sujeto a fuerzas externas, el centro de masa se mueve de acuerdo a la segunda ley de Newton, del mismo modo que lo haría una partícula imaginaria de masa igual a la masa total del sistema que estuviera sujeta a la misma fuerza externa resultante. Veremos que, en general, el movimiento de un sistema de partículas puede ser considerado compuesto de dos partes: el movimiento del centro de masa, que podría representar el movimiento del sistema global, mas el movimiento de las diferentes partes individuales del sistema en relación al centro de masa.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Centro de masa
- Velocidad y aceleración del centro de masa
- Momento lineal de un sistema de partículas
- Energía cinética de un sistema de partículas
- El marco de referencia del centro de masa

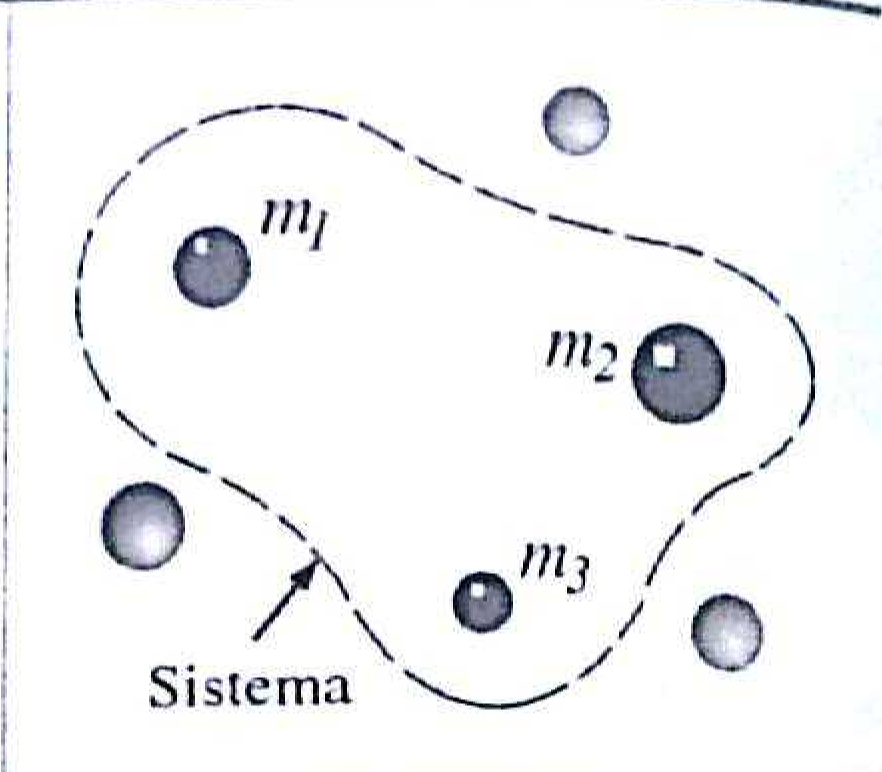



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Un sistema de partículas es cualquier conjunto bien definido de partículas del universo sobre el cual enfocamos nuestra atención.

Las partículas del sistema pueden o no interactuar entre sí o con su entorno, el cual está constituido por elementos externos al sistema.



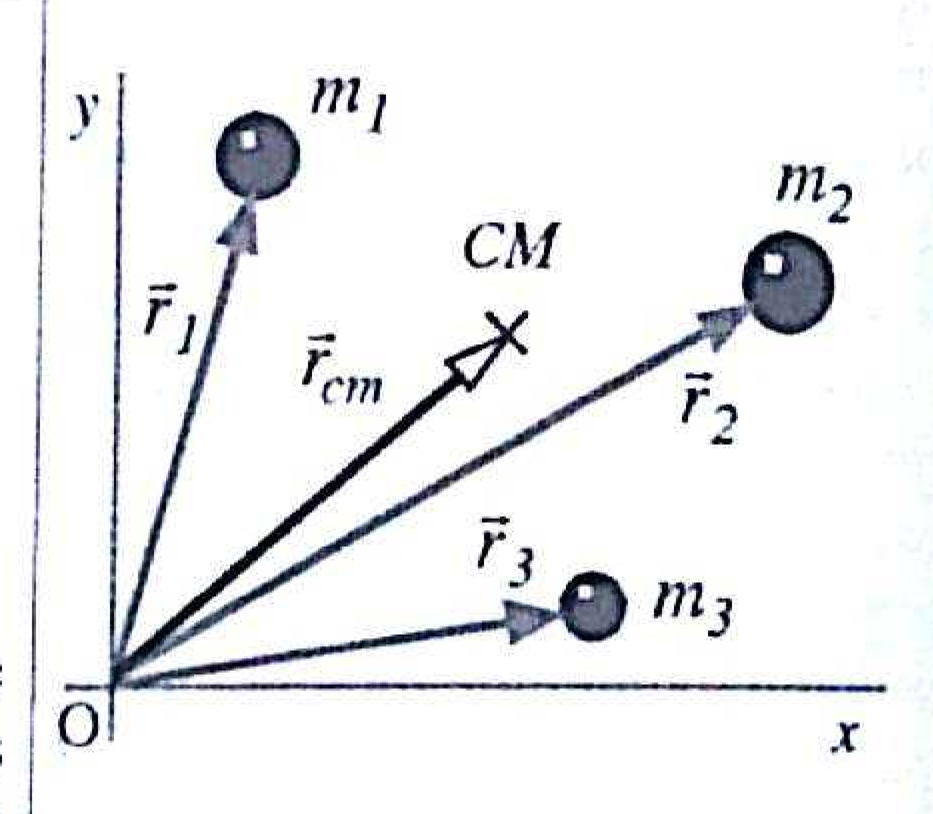
EL CENTRO DE MASA: UN PUNTO ESPECIAL

El centro de masa (CM) de un sistema de N partículas se define por el vector de posición:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i$$

Siendo: $M = \sum m_i$ la masa total del sistema.

El centro de masa de un sistema es una especie de *promedio ponderado* para las posiciones de sus diferentes partículas. La masa individual, m_i, ubicada en un punto con vector de posición, $\vec{r}_i$, es el factor de peso estadístico para ese lugar.



Si consideramos un conjunto de ejes cartesianos, se trabajan por separado cada una de las coordenadas (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) del centro de masa.

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{1}{M}\sum m_ix_i$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{1}{M}\sum m_iy_i$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{1}{M}\sum m_iz_i$$

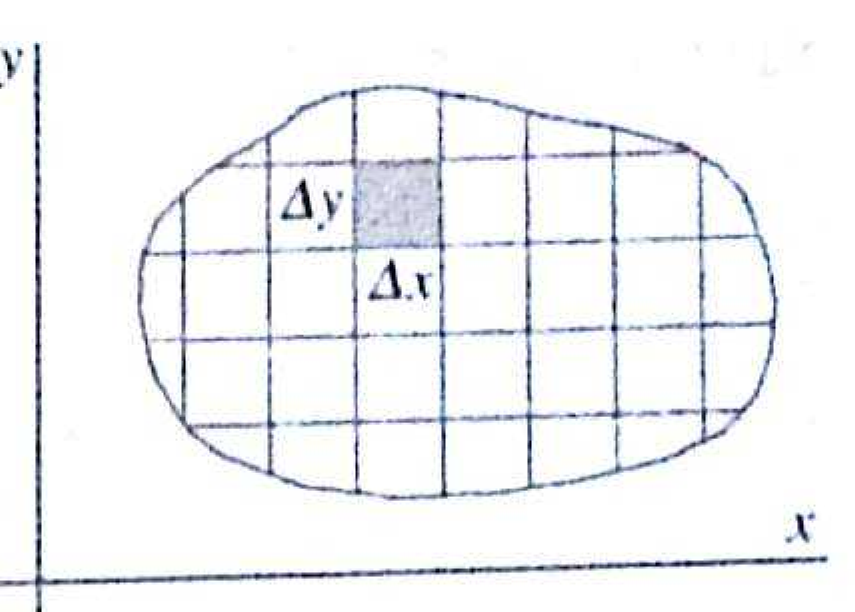
Vector posición del centro de masa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i$$

CENTRO DE MASA DE UN CUERPO CONTINUO

Para hallar el centro de masa de un cuerpo continuo de forma arbitraria, se procede a dividirlo apropiadamente en elementos infinitesimales de masa dm, de modo que la suma discreta sobre las partículas queda transformada en una integral:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

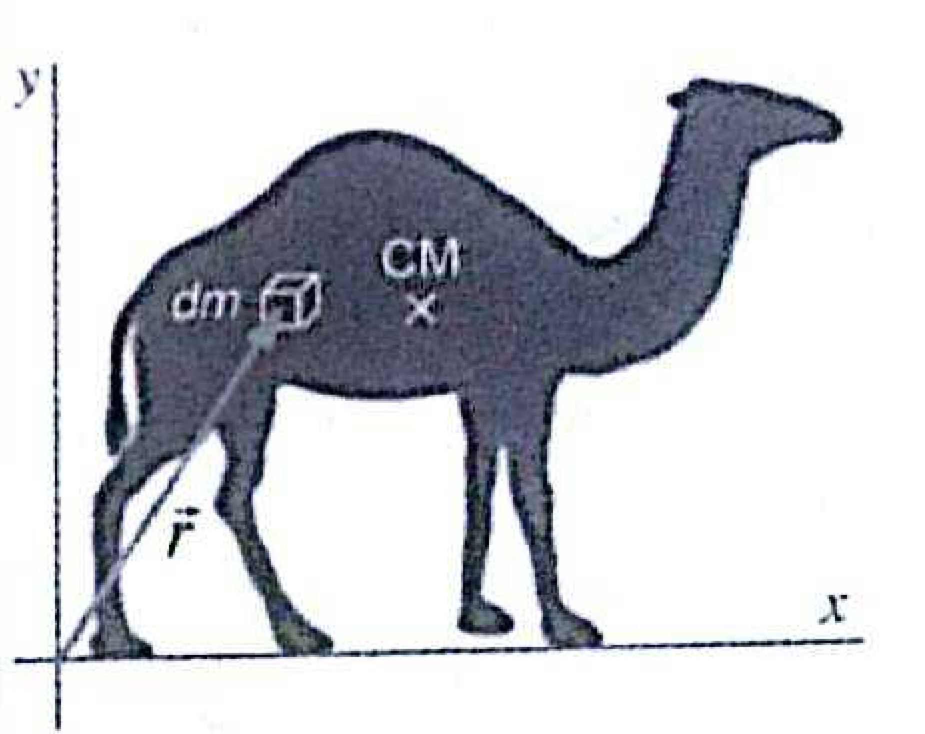


Las correspondientes componentes cartesianas son:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Para evaluar estas integrales, se debe expresar la variable m en términos de las coordenadas espaciales x, y, z o r.

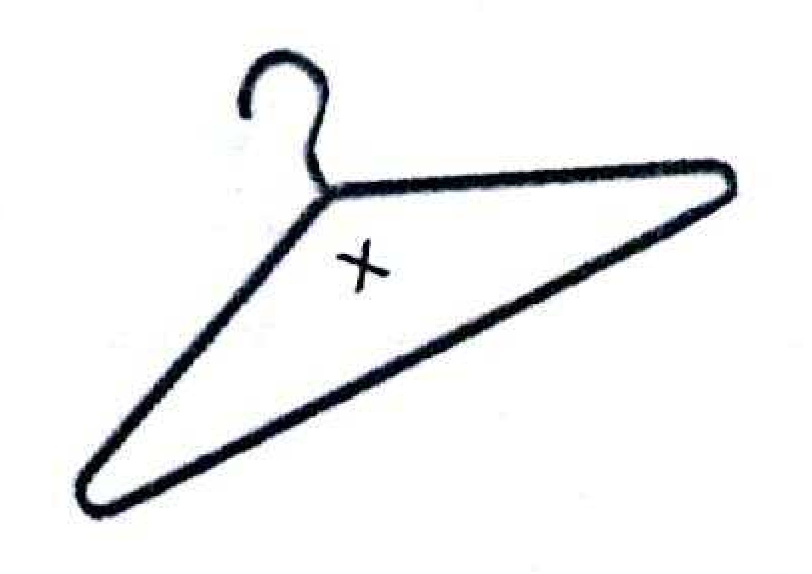
En la práctica, el centro de masa de un cuerpo se consigue mas fácilmente si este tiene simetrías.



Algunas características importantes del CM son:

1) El centro de masa se encuentra siempre ubicado en una posición fija respecto del cuerpo o sistema. No depende del marco de referencia que se use para el cálculo.

2) En la posición del centro de masa no necesariamente debe haber masa, es decir, el centro de masa puede incluso estar ubicado fuera del cuerpo.

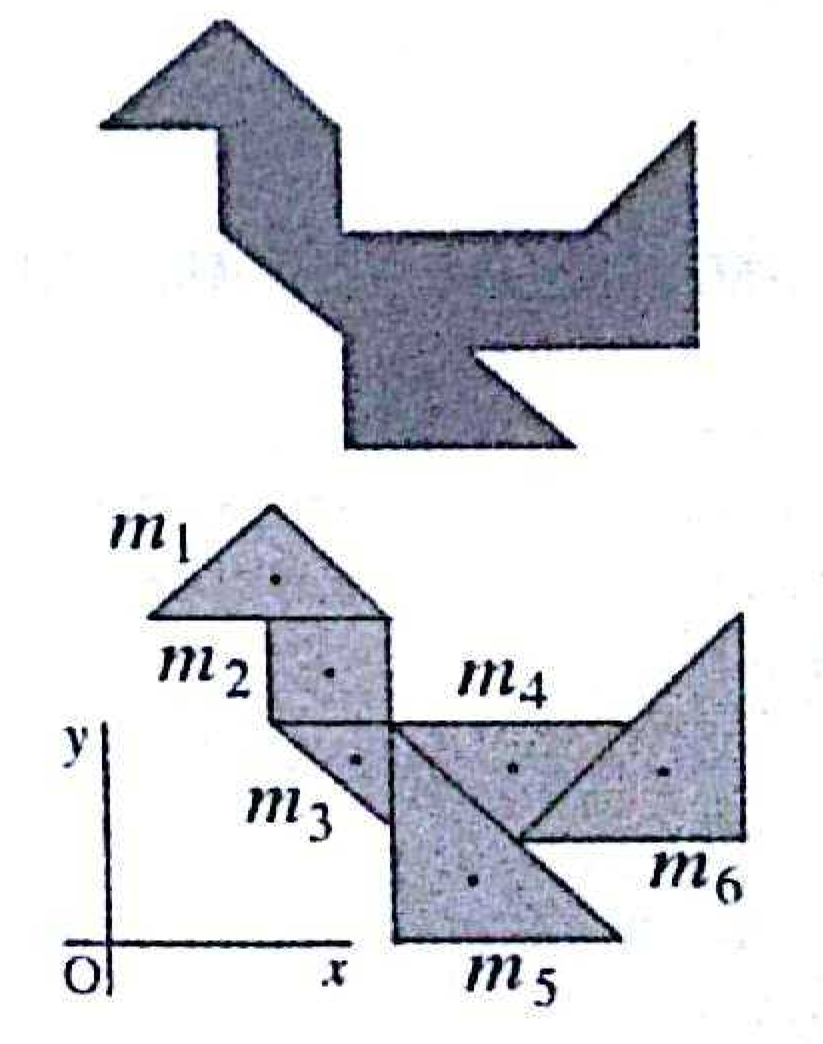


Para hallar el centro de masa de un objeto...

1) Se escoge un conjunto de ejes de coordenadas con un origen apropiado.

2) Si el objeto es homogéneo y tiene líneas o planos de simetría, se aprovecha el hecho de que el centro de masa debe quedar en esas líneas o planos.

3) Si el objeto puede ser dividido en pedazos, cuyo CM resulta fácil de determinar, entonces cada uno de estos pedazos puede ser considerado como una partícula localizada en su respectivo centro de masa, que contribuye al centro de masa total. *¡Divide y vencerás!*



VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA

La importancia del concepto de centro de masa radica en que su movimiento es particularmente simple de describir. En efecto, si derivamos respecto al tiempo la expresión del vector de posición, $\vec{r}_{cm}$, obtenemos la velocidad del centro de masa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$

ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA

Si ahora derivamos la expresión anterior respecto del tiempo, obtenemos la aceleración del centro de masa del sistema:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d}{dt}\vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

Aceleración del centro de masa

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA

La expresión para $\vec{v}_{cm}$ puede escribirse de la forma:

$$M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}_{tot}$$

Por lo tanto, el momento lineal o cantidad de movimiento total del sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.
Esto significa que el momento lineal de un sistema de partículas es equivalente a la de una sola partícula (imaginaria) de masa M (la masa total), que se mueve a la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$.

Momento lineal total del sistema de partículas

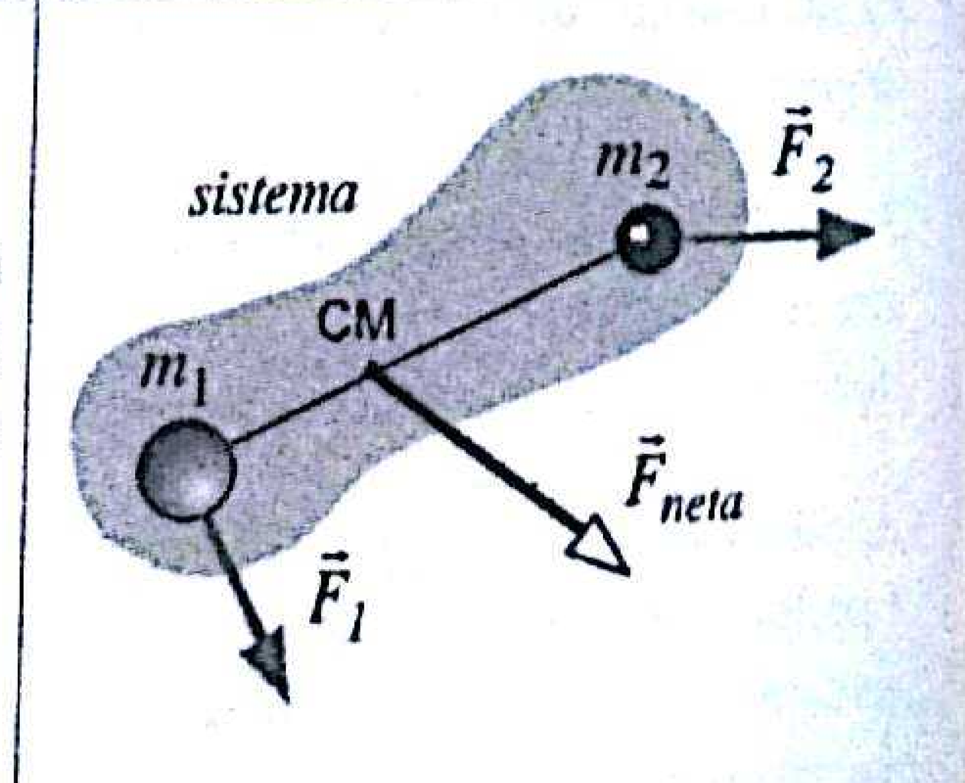
$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{cm}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL CM

Si derivamos de nuevo, ambos miembros de la expresión anterior respecto al tiempo, y suponiendo que la masa del sistema es constante, se obtiene la aceleración del centro de masa:

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

Donde $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula de masa m_i.



Cuando evaluamos la sumatoria anterior, es necesario distinguir entre dos tipos de fuerzas. Las *fuerzas internas* (que se ejercen entre las partes del sistema) y las *fuerzas externas* (que son ejercidas por el entorno sobre el sistema). Al sumar las fuerzas internas, debido a la Tercera ley de Newton, estas se cancelan por pares, quedando únicamente las fuerzas externas.

Fuerzas internas y fuerzas externas

La suma da entonces, la fuerza neta sobre el sistema.

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{neta} = M\vec{a}_{cm}$$

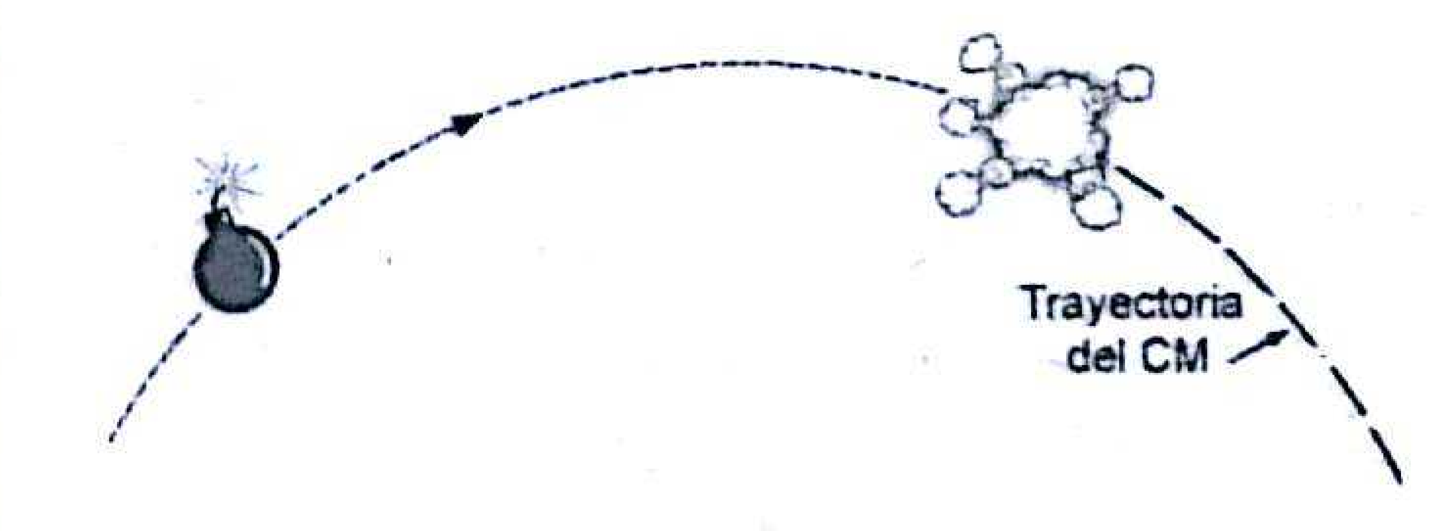
Esta expresión constituye una versión de la *Segunda ley de Newton* para un sistema de partículas.

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\vec{F}_{neta} = M\vec{a}_{cm}$$

Este resultado expresa un hecho muy importante: "El centro de masa de un sistema se acelera como si fuera una partícula de masa M y como si la fuerza neta estuviera aplicada en ese punto"

En la figura se ilustra el caso de un objeto que es lanzado y luego explota en el aire. Los fragmentos salen dispersos en direcciones diferentes pero, por tratarse de fuerzas internas, el centro de masa de los fragmentos continuará a lo largo de la trayectoria parabólica que seguiría la partícula original bajo la acción de la fuerza de gravedad.



SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA UN SISTEMA

También podemos escribir la segunda ley de Newton en términos del momento lineal total del sistema:

$$\vec{F}_{neta} = d\vec{P}/dt$$

La rapidez de cambio del momento lineal total es igual a la fuerza neta aplicada al sistema.

Segunda ley de Newton

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

De la anterior expresión se deduce una de las leyes mas importantes de la física:

Si la fuerza neta externa ejercida sobre el sistema es nula, el momento lineal total se mantiene constante.

Además, si la masa no varía, el centro de masa de un sistema aislado se mueve a velocidad constante con relación a un marco de referencia inercial.

Sistema aislado

Si $\vec{F}_{neta} = 0$

$\vec{v}_{cm}$ = constante

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

Energía cinética total de un sistema de partículas

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

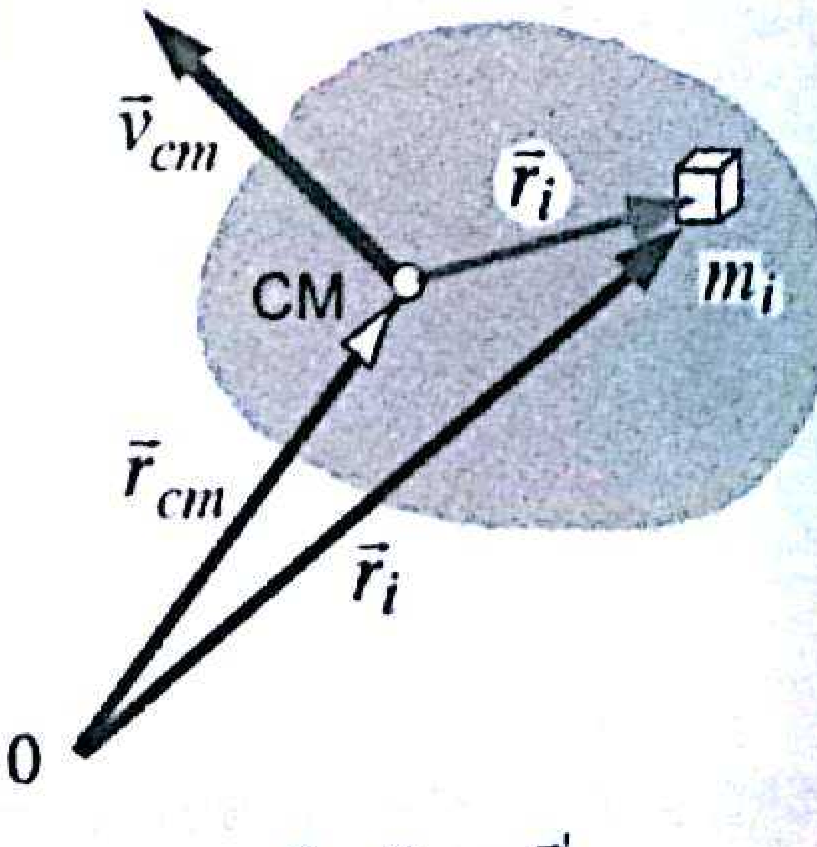
En esta expresión, las velocidades $\vec{v}_i$ de las partículas se miden en un marco de referencia arbitrario, que llamamos marco de referencia de laboratorio (LAB). Para pasar al marco de referencia del centro de masa (CM), aplicamos la transformación galileana:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i' \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$$

Siendo $\vec{r}_i$ y $\vec{v}_i = d\vec{r}_i / dt$ respectivamente la posición y velocidad de la partícula en el marco de referencia del laboratorio (LAB).

$\vec{v}_i' = d\vec{r}_i' / dt$ = Velocidad respecto al marco del CM

$\vec{v}_{cm}$ = Velocidad del CM respecto al marco del LAB



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$$

Al sustituir la velocidad de cada partícula en la expresión para la energía cinética total, se obtiene:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')\bullet(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + (\sum m_i \vec{v}_i')\bullet \vec{v}_{cm} + \frac{1}{2}(\sum m_i) v_{cm}^2$$

La segunda sumatoria en esta expresión es la cantidad de movimiento del sistema referida al centro de masa y por lo tanto es cero:

$$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$$

Además, la última sumatoria es la masa total del sistema,

$$\sum m_i = M$$

De esta manera, quedan únicamente dos términos:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Encontramos así que: *La energía cinética de un sistema es igual a la suma de la energía cinética interna (del movimiento relativo al centro de masa) más la energía cinética asociada al centro de masa.*

Energía cinética total

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

↑ Energía interna ↑ Energía del CM

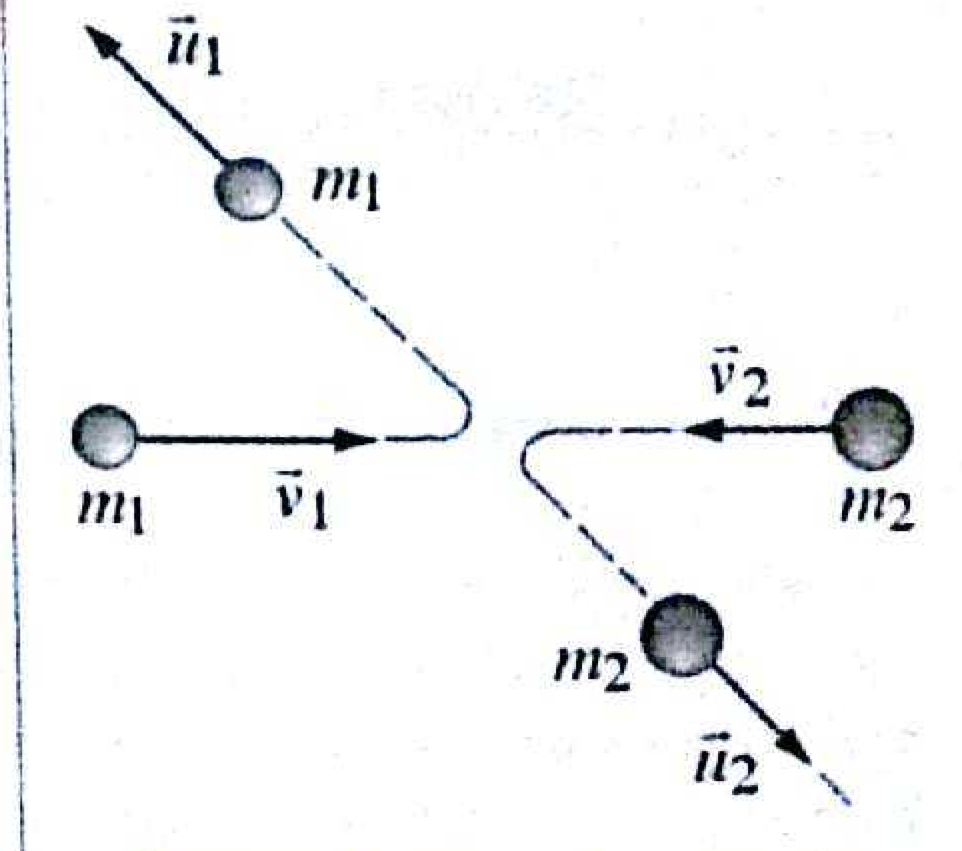
La energía cinética interna es la misma en cualquier marco de referencia mientras que la energía asociada con el movimiento del centro de masa dependerá del marco de referencia particular.

MARCO DE REFERENCIA DEL CM

Cuando se llevan a cabo colisiones entre partículas, el análisis puede resultar mas sencillo si lo hacemos en un marco de referencia donde el centro de masa del sistema está en reposo ($\vec{v}_{cm} = 0$). A este se le conoce como marco de referencia del centro de masa o de momentum nulo, en virtud de que el momento lineal total del sistema respecto a este marco siempre es cero:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = M\vec{v}_{cm} = 0$$

En un choque de dos partículas, los vectores momento lineal de las partículas que entran son iguales y opuestos. Los vectores de momento lineal que salen también son iguales y opuestos.



Choque elástico en el marco de referencia del centro de masa




PROBLEMAS RESUELTOS

PR-1.01. *Centro de masa de tres partículas en un plano*

Respecto de los ejes de coordenadas mostrado, encuentre la ubicación del centro de masa de un sistema constituido por tres partículas que están ubicadas en el plano (x-y) y cuyas coordenadas están dadas en la siguiente tabla:

Masa (kg)	x(m)	y(m)
$m_1 = 1$	2	2
$m_2 = 2$	3	-2
$m_3 = 3$	- 2	4

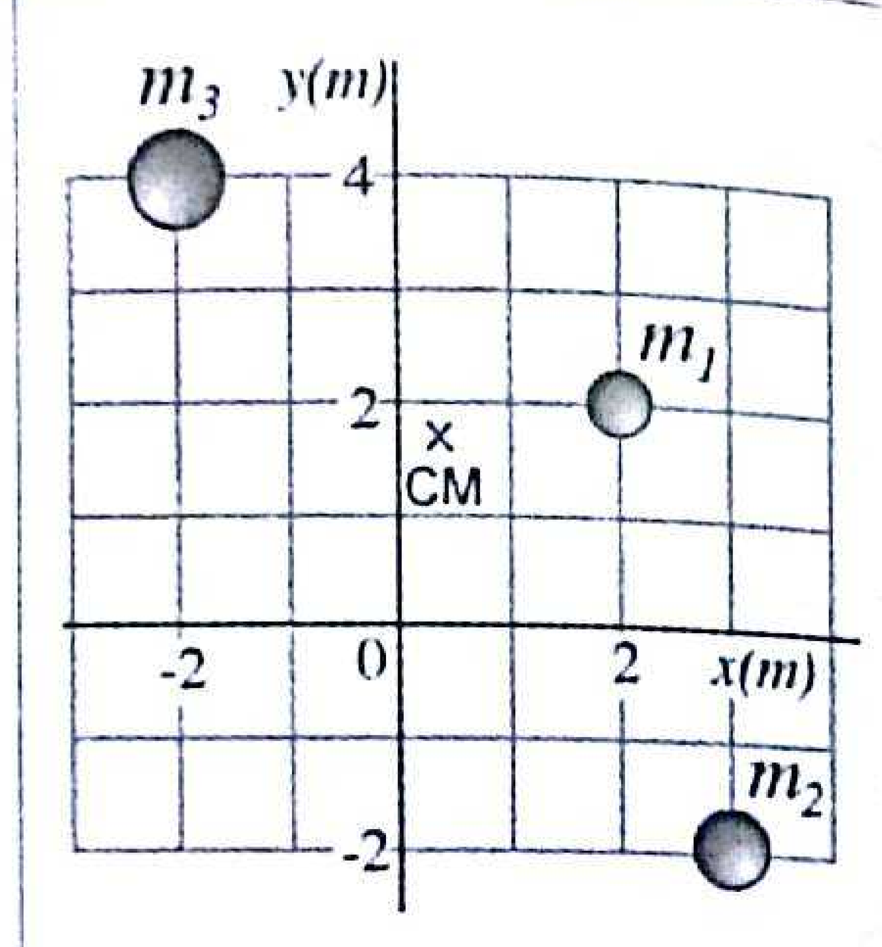
Solución: Se aplican directamente las relaciones básicas que definen las coordenadas del centro de masa de un sistema de partículas (x_{cm}, y_{cm}):

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cm} = \frac{(1kg)(2m) + (2kg)(3m) + (3kg)(-2m)}{1kg + 2kg + 3kg} = \frac{1}{3}m$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{(1kg)(2m) + (2kg)(-2m) + (3kg)(4m)}{1kg + 2kg + 3kg} = \frac{5}{3}m$$



Respuesta:

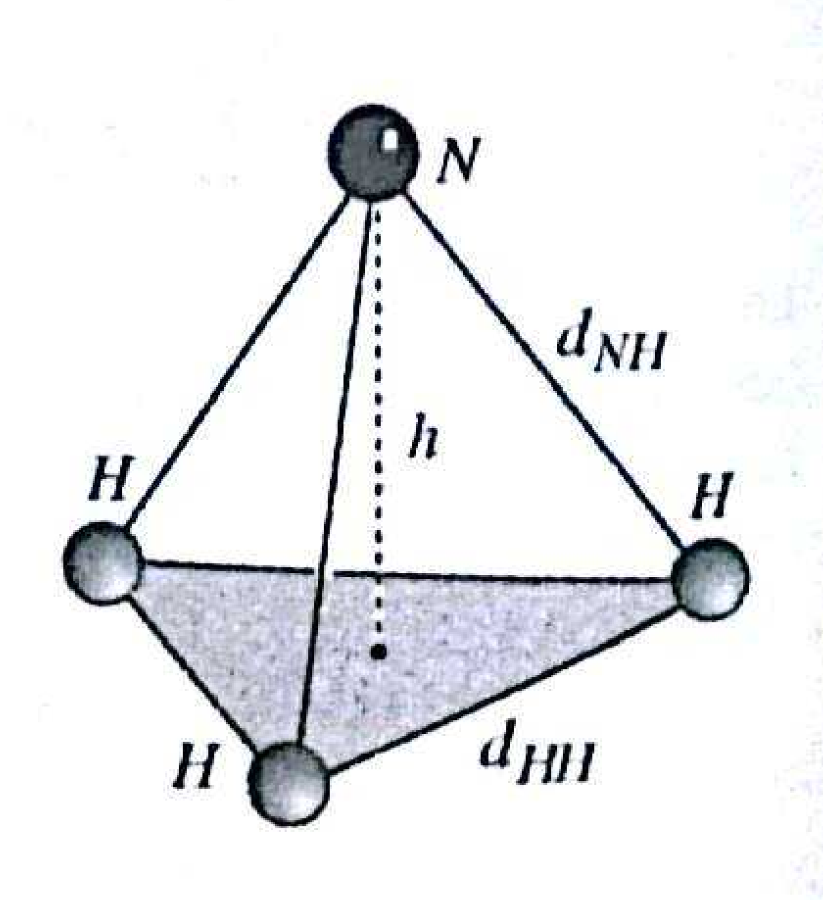
$x_{cm} = 1/3$ m,
$y_{cm} = 5/3$ m

PR-1.02. *Centro de masa de la molécula de amoniaco*

En una molécula de amoniaco (NH_3), el átomo de nitrógeno está en la cúspide de una pirámide cuya base está constituida por los tres átomos de hidrógeno que forman un triángulo equilátero. Las distancias interatómicas son:

Hidrógeno-Hidrógeno: $d_{HH} = 1{,}628$ Å
Nitrógeno-Hidrógeno: $d_{NH} = 1{,}014$ Å
(1 angstrom = 10^{-10} m)

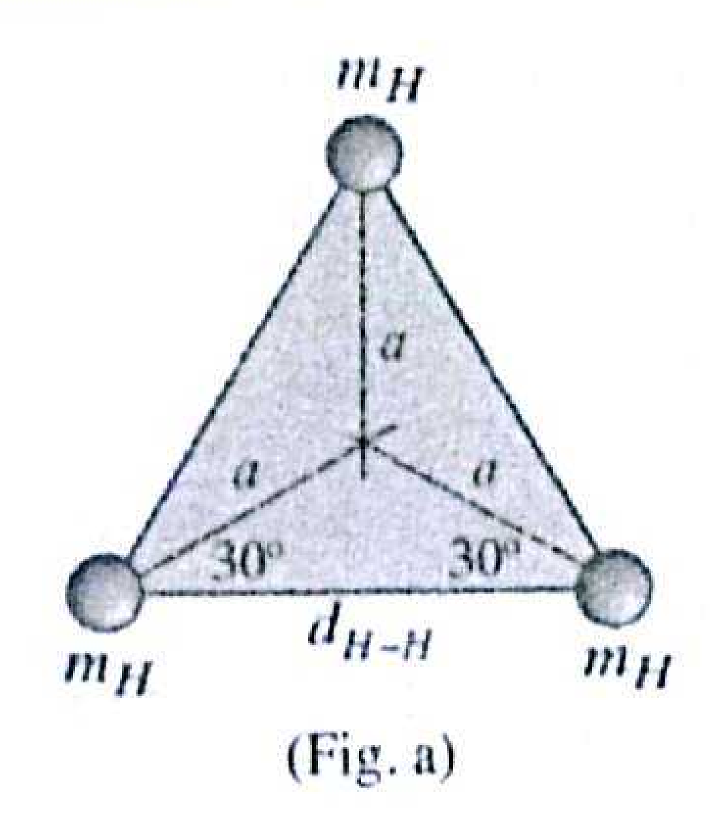
Si la relación entre las masas atómicas es $m_N / m_H = 14$ localice el centro de masa de la molécula.



Solución: Hallemos primero la distancia a desde cada átomo de hidrógeno al centro de la base del triángulo equilátero, como se ilustra en la figura a:

$$\cos 30^o = \frac{d_{HH}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{d_{HH}}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}628Å}{\sqrt{3}} = 0{,}940Å$$



(Fig. a)

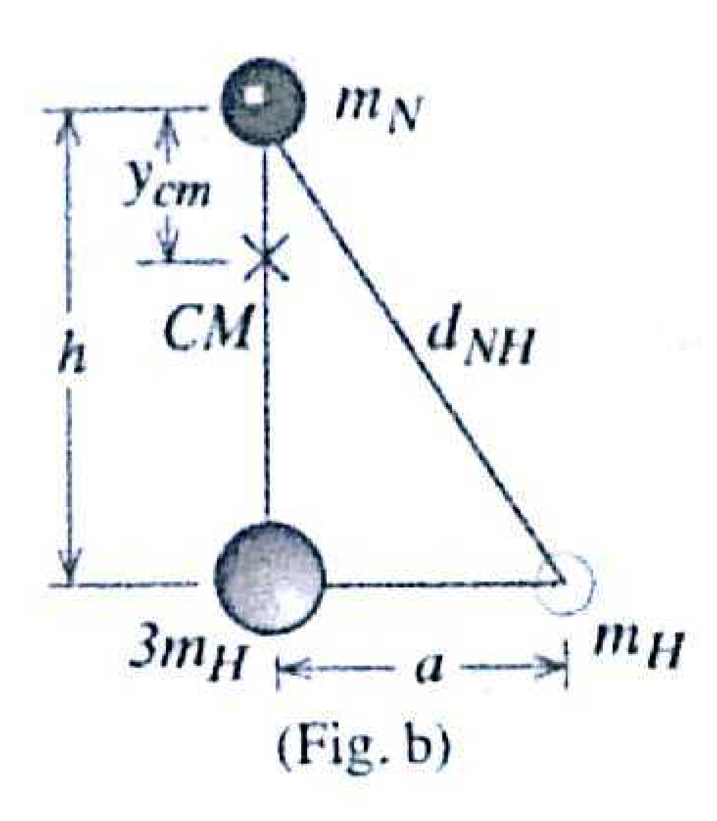
Para hallar la altura total h de la pirámide, consideramos el triángulo rectángulo de la figura b:

$$h = \sqrt{d_{NH}^2 - a^2} = \sqrt{(1{,}014Å)^2 - (0{,}940Å)^2} = 0{,}383Å$$

Podemos considerar que la masa total de las tres moléculas de hidrógeno ($3m_H$) se encuentra concentrada en su CM que es el punto central de la base. Si medimos las distancias desde el átomo de nitrógeno hasta el centro de masa podemos escribir:

$$y_{cm} = \frac{(3m_H)h + (m_N)0}{3m_H + m_N}$$

$$y_{cm} = \frac{3m_H h}{3m_H + 14m_H} = \frac{3}{17}h = \frac{3}{17}0{,}383Å = 0{,}0676Å$$



(Fig. b)

Por lo tanto, el centro de masa de la molécula de amoniaco queda ubicado a una distancia de 0,0676Å por debajo del átomo de nitrógeno.

Respuesta:

$y_{cm} = 0{,}0676Å = 6.76 \times 10^{-12}$ m

PR-1.03. *Centro de masa de una barra no uniforme*

Una barra delgada y recta de longitud L tiene su masa distribuida de manera no-uniforme con densidad lineal λ(kg/m) que varía de acuerdo con la expresión:

$$\lambda(x) = kx^n$$

Donde x es la distancia a un extremo, n es un número entero y k es una constante.

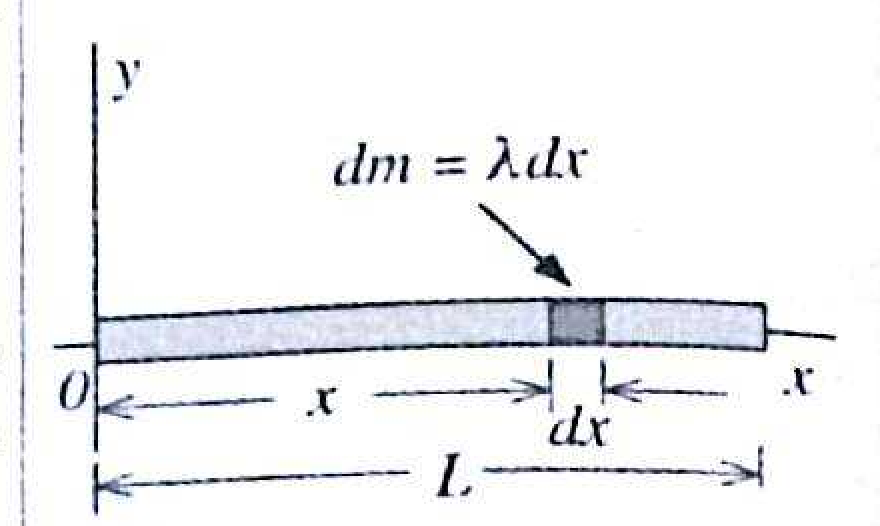
a) Localice el centro de masa de la barra.
b) Analice el caso cuando la barra es uniforme.

Solución: Si dividimos la barra en elementos de longitud dx, entonces la masa de un elemento ubicado a la distancia x del origen es:

$$dm(x) = \lambda dx = (kx^n)dx$$

La posición x_{cm} del centro de masa de la barra entera está dada por:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L kx^{n+1}dx = \frac{k}{M}\left(\frac{L^{n+2}}{n+2}\right)$$



En esta expresión se puede eliminar k observando que esta constante está relacionada con la masa total de la barra:

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L kx^n dx = k\left(\frac{L^{n+1}}{n+1}\right)$$

Sustituyendo M en la expresión anterior de x_{cm} se tiene:

$$x_{cm} = L\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

b) Si la barra fuese uniforme, $\lambda = k$ = constante y $n = 0$, por lo tanto:

$$x_{cm} = \frac{1}{2}L$$

Es decir, el centro de masa de la barra uniforme queda justamente en su centro, como debíamos esperar.

Respuesta:

a) $x_{cm} = L\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

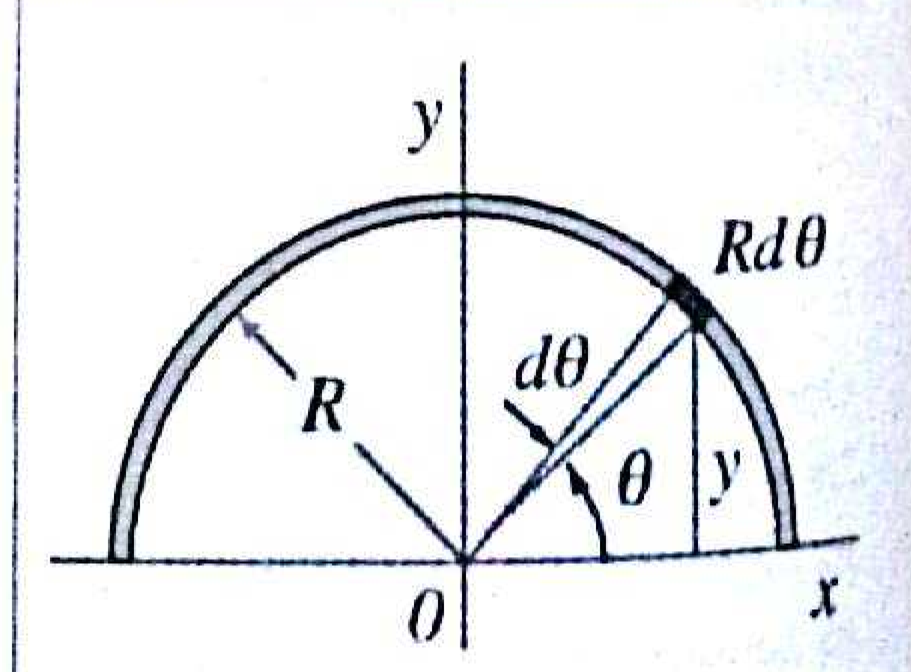
b) Barra uniforme: $x_{cm} = \frac{1}{2}L$

PR-1.04. *Centro de masa de un semi-aro*

Determine el centro de masa de una varilla delgada y uniforme que está doblada en la forma de un semi-círculo de radio R.

Solución: Si escogemos un sistema de coordenadas con origen en el centro del curvatura del aro, es obvio que debido a la simetría, x_{cm} = 0. Para hallar la coordenada y_{cm}, seleccionamos un elemento de arco de longitud $dl = Rd\theta$, ubicado a una altura $y = R sen\theta$. La masa de este elemento es:

$$dm = \lambda ds = \lambda(Rd\theta)$$



Siendo la densidad lineal de masa o masa por unidad de longitud: $\lambda = M/\pi R$). La coordenada y_{cm} está dada por:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R sen\theta)(\lambda R d\theta)$$

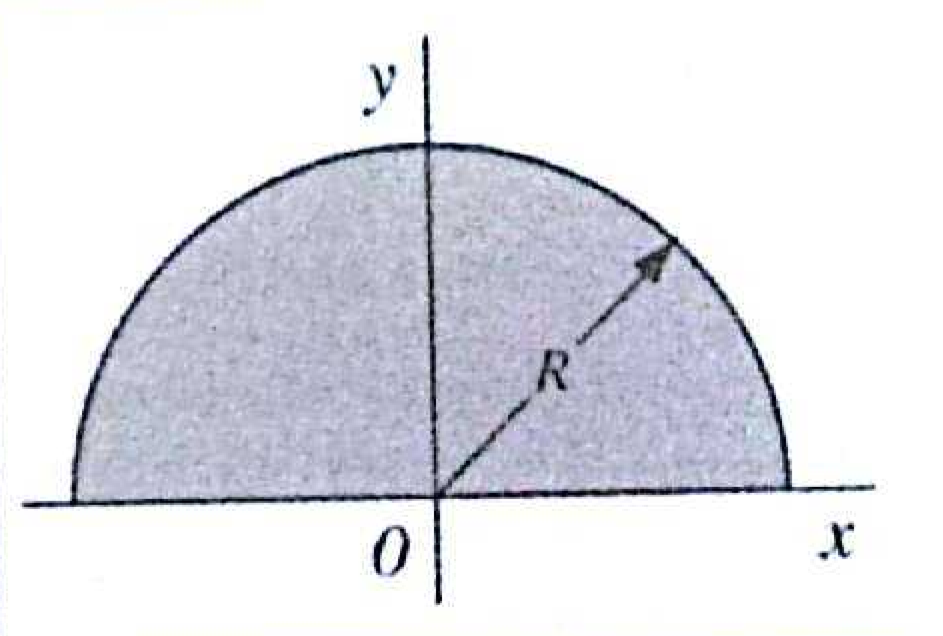
$$y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi sen\theta d\theta = \frac{\lambda R^2}{\lambda \pi R}[-cos\,\theta]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}$$

Respuesta:

$x_{cm} = 0$, $y_{cm} = \frac{2R}{\pi}$

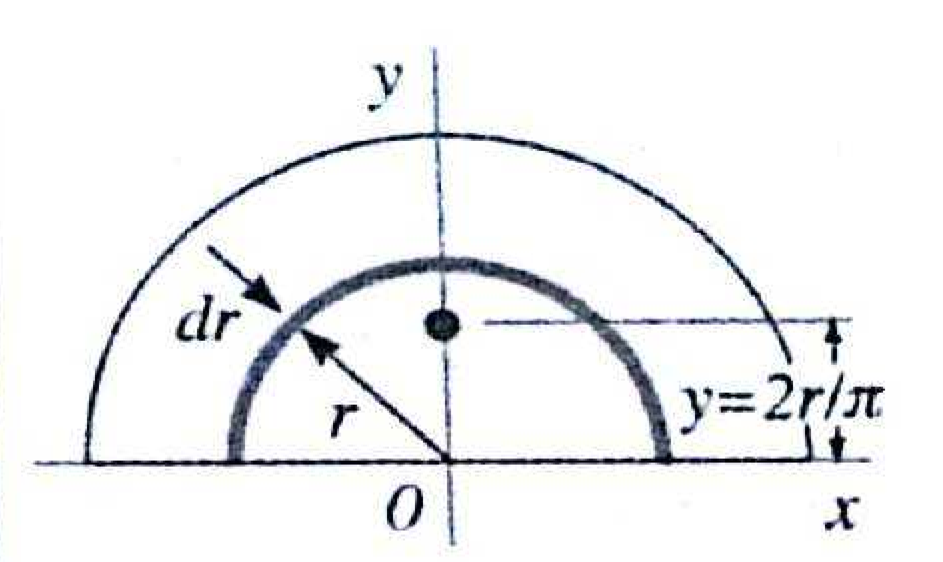
PR-1.05. *Centro de masa de un disco semi-circular*

Encontrar el centro de masas de un disco semi-circular homogéneo de radio R.



Solución: Podemos dividir el disco en tiras semi-circulares de radio r y espesor dr. La masa de una tira elemental es:

$$dm = \sigma(\acute{a}rea) = \sigma\pi r dr)$$



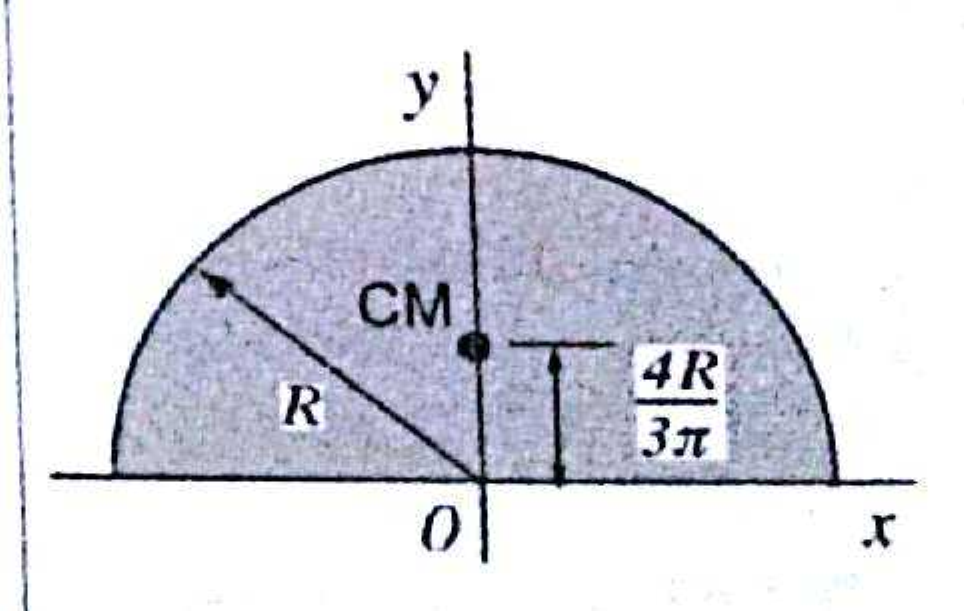
Siendo σ la densidad superficial de masa del disco:

$$\sigma = \frac{Masa}{Area} = \frac{M}{(\pi R^2/2)}$$

De acuerdo al resultado del problema anterior, el centro de masa de una tira semi-circular de radio r está ubicado en la posición: $y = 2r/\pi$. El centro de masa del disco semi-circular completo, y_{cm} estará dado por la integral:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \left(\frac{2}{\sigma\pi R^2}\right)\int_0^R \left(\frac{2r}{\pi}\right)(\sigma\pi r dr)$$

$$y_{cm} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr = \left(\frac{4}{\pi R^2}\right)\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$



Este resultado podría haberse obtenido sin necesidad de haber usado el centro de masa de un semi-aro, y operando directamente con integrales de superficie. Si ya tienes experiencia con las integrales de superficie, trataremos de ilustrar el procedimiento en el problema siguiente.

Respuesta:

$x_{cm} = 0$, $y_{cm} = \frac{4R}{3\pi}$

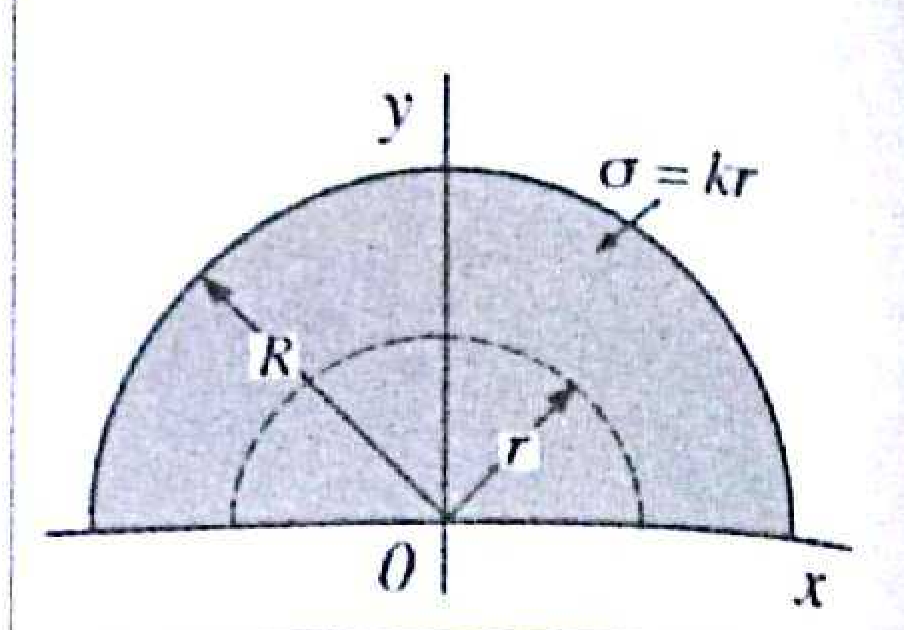
PR-1.06. *CM de un disco semi-circular no uniforme*

Determine el centro de masa de un disco semi-circular de radio R no homogéneo y cuya densidad superficial de masa $\sigma\,(\text{kg/m}^2)$ es proporcional a la distancia r al centro de curvatura:

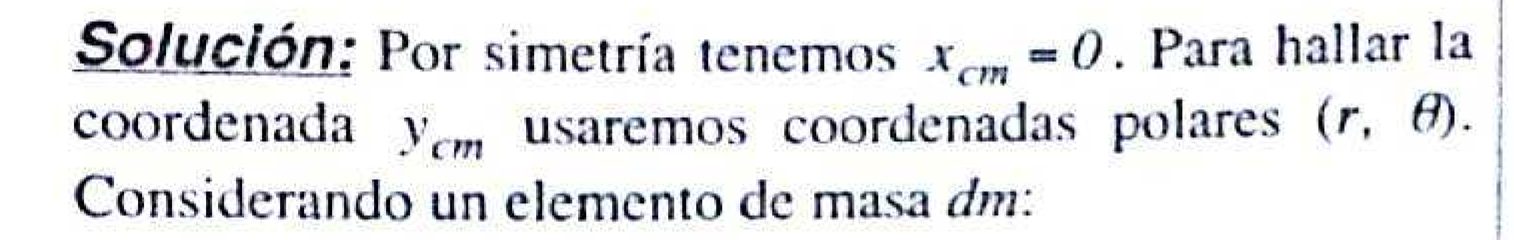


$$\sigma = kr$$

Siendo k una constante.



Solución: Por simetría tenemos $x_{cm} = 0$. Para hallar la coordenada y_{cm} usaremos coordenadas polares $(r,\ \theta)$. Considerando un elemento de masa dm:

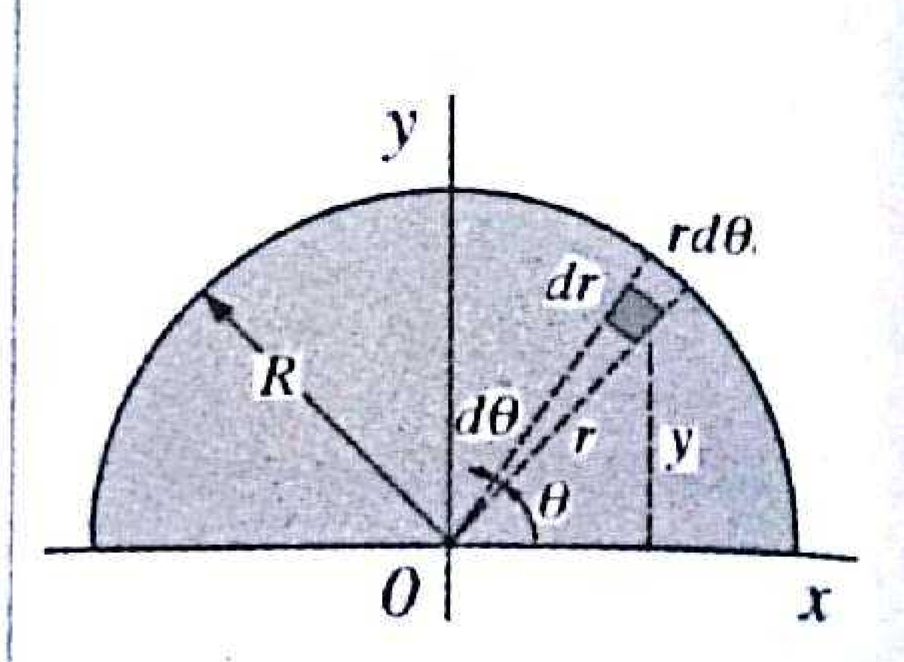


$$dm = DensidadxArea = \sigma dA = (kr)(rd\theta dr)$$

La coordenada y de este elemento es: $y = rsen\theta$, por lo tanto, el CM de todo el disco está en la posición:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{1}{M}\int_0^R kr\int_0^\pi (rsen\theta)(rdrd\theta)$$

$$y_{cm} = \frac{k}{M}\int_0^R r^3dr\int_0^\pi sen\theta d\theta = \frac{k}{M}\frac{r^4}{4}]_0^R[-cos\theta]_0^\pi = \frac{kR^4}{2M}$$



La constante k está relacionada con la masa total M:

$$M = \int dm = \int_0^R kr\int_0^\pi rdrd\theta = k[\frac{r^3}{3}]_0^R[\theta]_0^\pi = \frac{k\pi R^3}{3}$$

Reemplazando el valor de la constante $k = 3M/\pi R^3$, en la expresión para y_{cm}, tenemos finalmente:

$$y_{cm} = \frac{3}{2\pi}R$$

Observe que el centro de masa de este disco queda a una altura mayor que en el caso del disco uniforme.

Respuesta:

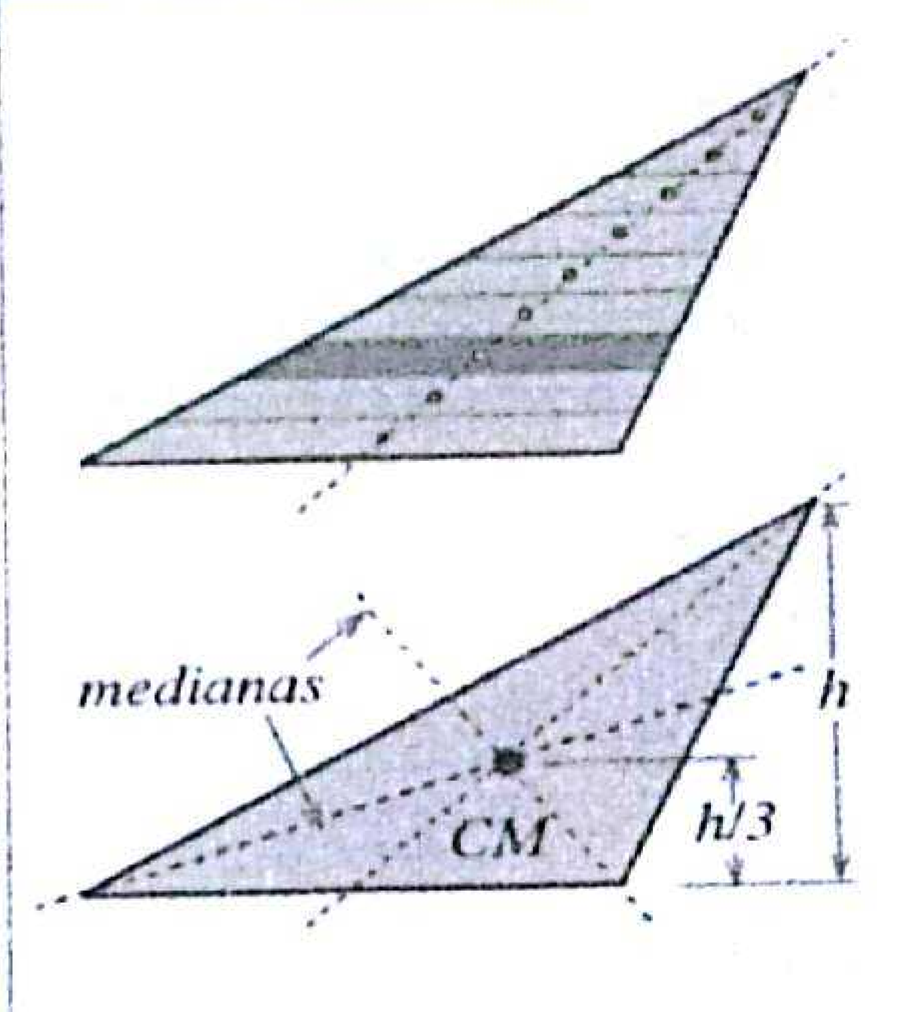
$$x_{cm} = 0\,,\ y_{cm} = \frac{3}{2\pi}R$$

PR-1.07. *El CM de una placa triangular es su baricentro*

a) Demuestre que el centro de masa de una placa triangular uniforme queda en la intersección de las medianas. Este punto se llama el *baricentro*.

b) Demuestre que el centro de masa de un triángulo isósceles de base b y altura h, está a un tercio de su altura.

Solución: a) Consideremos un triángulo arbitrario y lo dividimos en tiras muy delgadas paralelas a la base. El centro de masa de cada tira queda en su centro geométrico y los centros de todas estarán en la línea mediana que pasa por el vértice, por lo tanto el centro de masa del triángulo estará en esa mediana. Si ahora consideramos las otras dos medianas llegaremos a la misma conclusión. Por lo tanto el punto de intersección de las tres medianas (baricentro) es el centro de masa del triángulo. Sabemos por geometría que las medianas de un triángulo se intersecan a 1/3 de la altura de sus lados respectivos.



b) Consideremos una lámina triangular de base b y altura h. Si seleccionamos el sistema de ejes indicados, por simetría tenemos: $x_{cm} = 0$. Para hallar la coordenada y_{cm} consideramos como elemento de masa dm, una tira horizontal de ancho $2x$ y altura dy ubicada a la distancia y de la base:

$$dm = \sigma dA = (\frac{M}{bh/2})2xdy$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^h ydm = \frac{1}{M}\int_0^h y\frac{4Mxdy}{bh} = \frac{4}{bh}\int_0^h yxdy$$

Para evaluar esta integral debemos expresar la variable x en términos de y. A partir de la pendiente de la recta tenemos:

$$\text{Pendiente} = \frac{h}{b/2} = \frac{h-y}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b(h-y)}{2h}$$

$$y_{cm} = \frac{4}{bh}\int_0^h \frac{b(h-y)}{2h}ydy = \frac{2}{h^2}\int_0^h (hy - y^2)dy$$

$$y_{cm} = \frac{2}{h^2}(h\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}) = \frac{2}{h^2}\frac{h}{6} = \frac{h}{3}$$

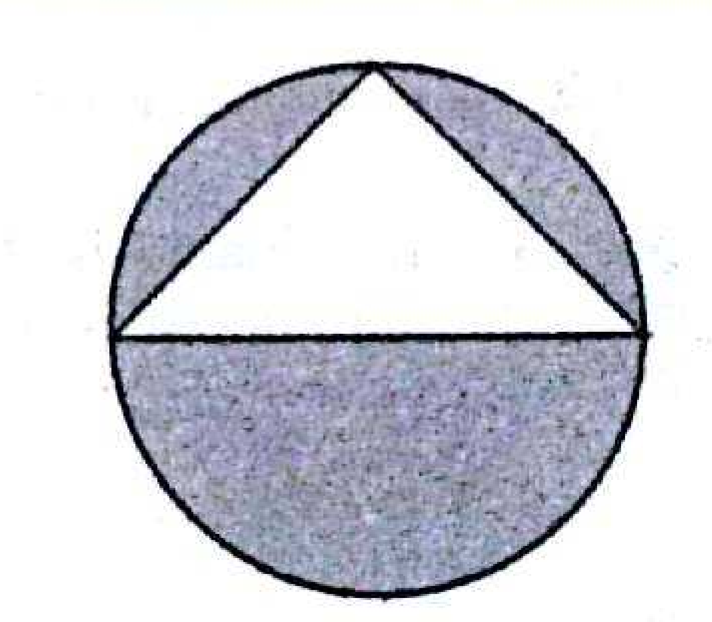
Este resultado es válido para cualquier placa triangular: El centro de masa queda a un tercio de la altura del triángulo.

Respuesta:

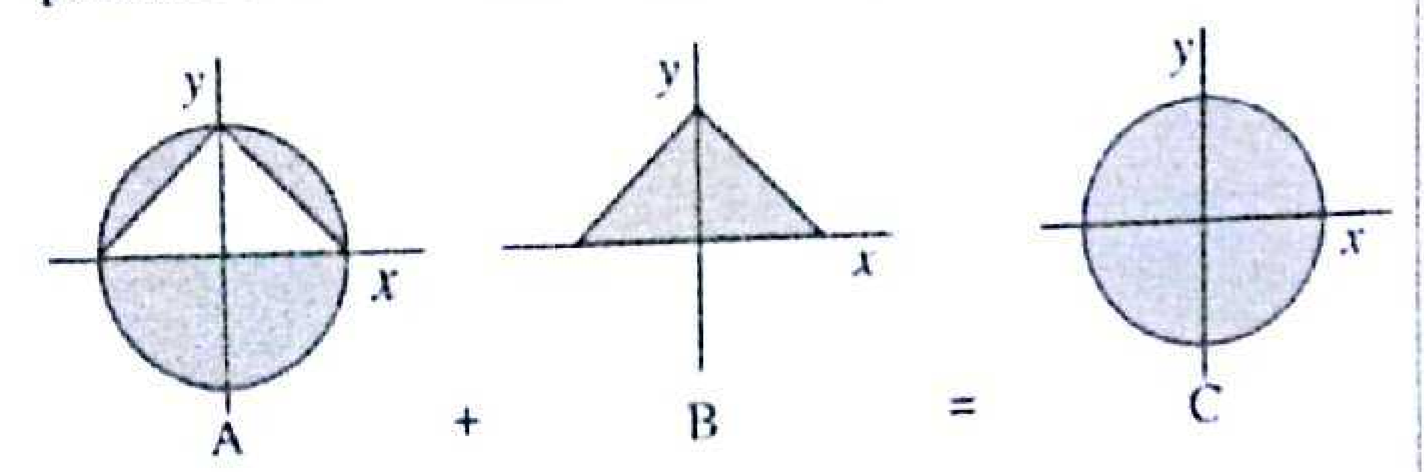
$$x_{cm} = 0,\ y_{cm} = h/3$$

PR-1.08. *CM de disco circular con un corte triangular*

A una lámina circular de radio R le fue cortado un pedazo de forma triangular. Determine la posición del centro de masas según el sistema de coordenadas centrado en el circulo.



Solución: Por simetría $x_{cm} = 0$. Podemos calcular y_{cm} para la lámina cortada en términos de dos figuras geométricas conocidas. En efecto, la superposición de la lámina cortada (Fig. A) con el pedazo triangular (Fig. B), produce una lámina circular completa (Fig. C).



El centro de masa de la lámina circular completa está determinado por CM de sus partes constituyentes:

$$y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}$$

Tomando en cuenta que: $m_A = m_C - m_B$ y despejando y_A, tenemos:

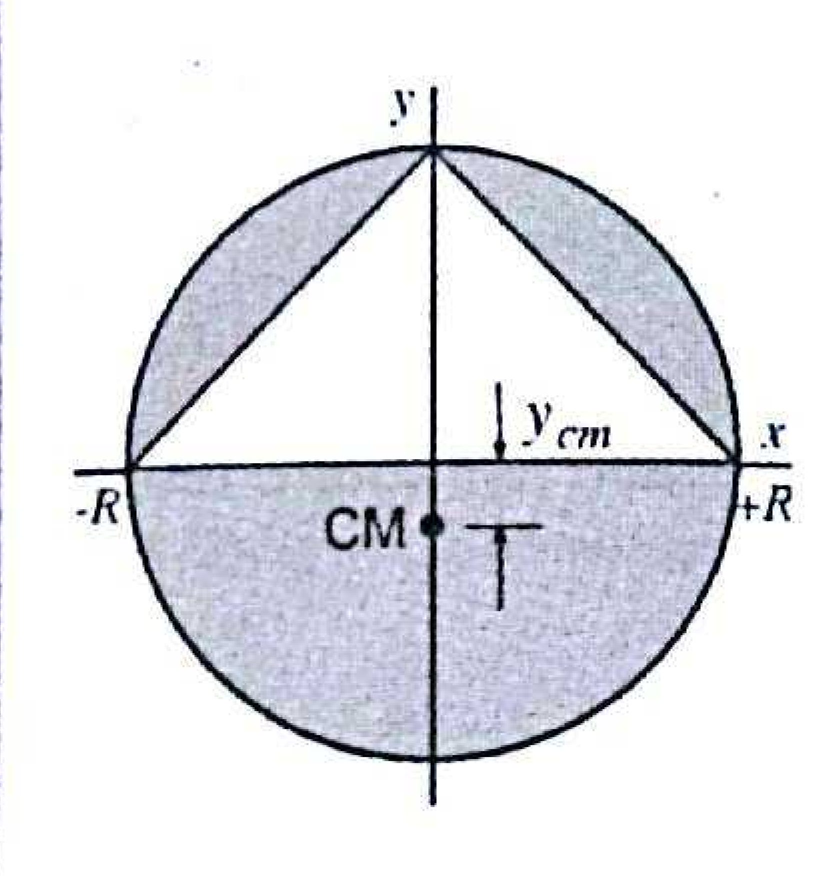
$$m_C y_C = (m_C - m_B) y_A + m_B y_B$$

$$y_A = \frac{m_C y_C + (-m_B) y_B}{m_C + (-m_B)}$$

Esta es la expresión del CM de un sistema constituido por: Un circulo C completo y un triángulo B que tiene masa (negativa) igual en magnitud a la de la parte cortada.

Sustituyendo las áreas en términos de la densidad superficial de masa $\sigma(\text{kg/m}^2)$, y tomando en cuenta que $y_C = 0$ e $y_B = R/3$, tenemos:

$$y_A = \frac{(\sigma\pi R^2)(0) + [-\sigma(2RxR/2)](R/3)}{\sigma\pi R^2 + [-\sigma(2RxR/2)]} = -\frac{R}{3(\pi - 1)}$$

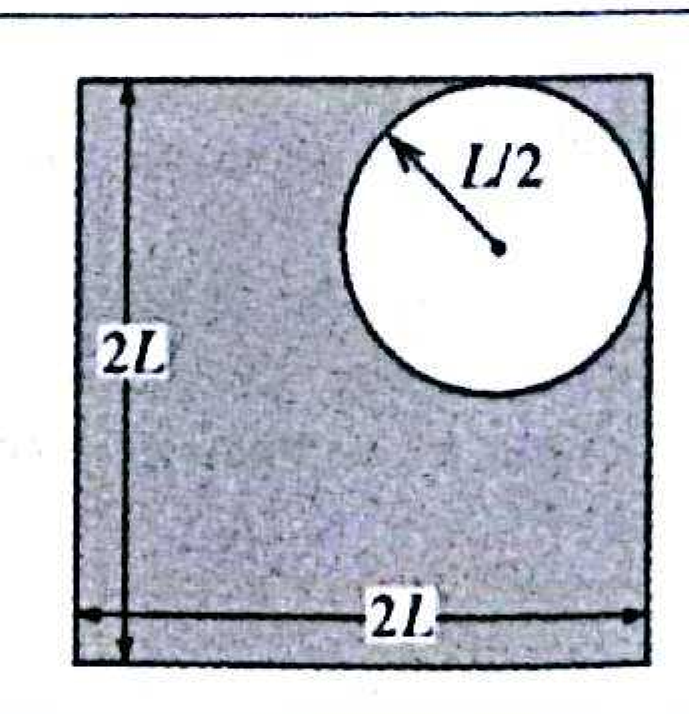


Respuesta:

$$x_{cm} = 0\,,\ y_{cm} = -\frac{R}{3(\pi - 1)}$$

PR-1.09. *Placa cuadrada con un orificio circular*

Una placa metálica cuadrada de lado $2L$ tiene en una esquina un orificio circular de radio $L/2$. ¿Dónde está su centro de masa?



Solución: El orificio puede representarse por dos discos superpuestos, uno de masa positiva y el otro de masa negativa. Sea $\sigma(\text{kg/m}^2)$ la densidad superficial o masa por unidad de área. La placa cuadrada queda completada y tiene una masa $m_1 = (2L)^2\sigma$ y su centro de masa está ubicado en (L, L). La placa circular tiene masa negativa: $m_2 = -\pi(L/2)^2\sigma$ y su centro de masa ubicado en $(3L/2, 3L/2)$. Para el sistema de dos cuerpos tenemos:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4L^2\sigma)L - (\pi L^2\sigma/4)(3L/2)}{4L^2\sigma - \pi L^2\sigma/4}$$

$$x_{cm} = \frac{4L^3 - 3\pi L^3/8)}{4L^2 - \pi L^2/4} = \frac{2{,}82}{3{,}21}L = 0{,}878L$$

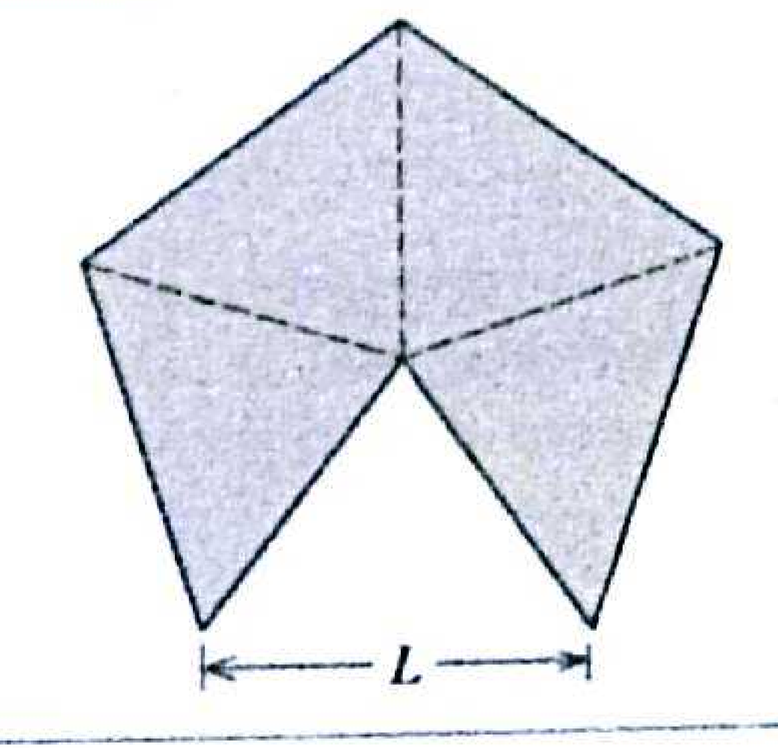
Por simetría: $y_{cm} = x_{cm} = 0{,}878L$

Respuesta:

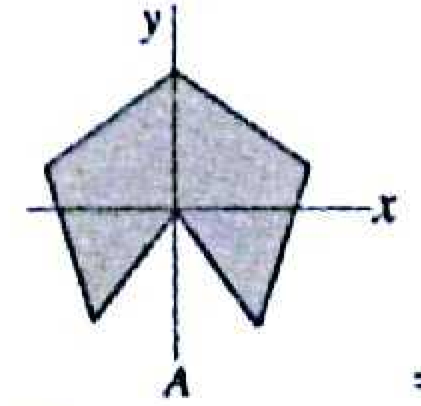
$$x_{cm} = 0{,}878L$$
$$y_{cm} = 0{,}878L$$

PR-1.10. *Centro de masa de pentágono incompleto*

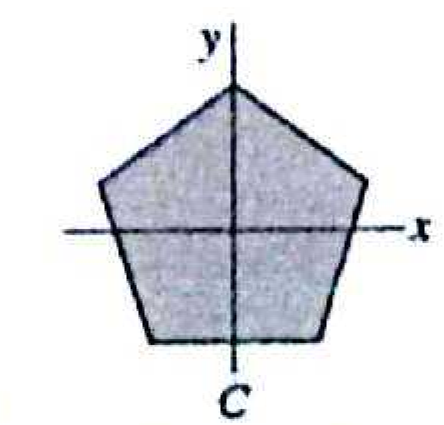
Determine el centro de masa de una placa delgada y uniforme que tiene la forma de un pentágono de lado L, al cual se le ha quitado una sección triangular, como se muestra en la figura.



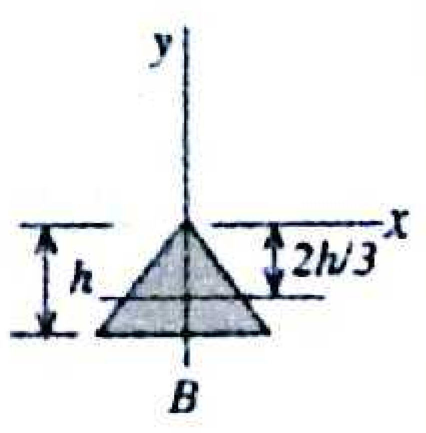
Solución: Podemos considerar esta placa (A) como la superposición de un pentágono completo (C) de masa: $5m/4$ y un triángulo (B) de masa negativa $-m/4$.

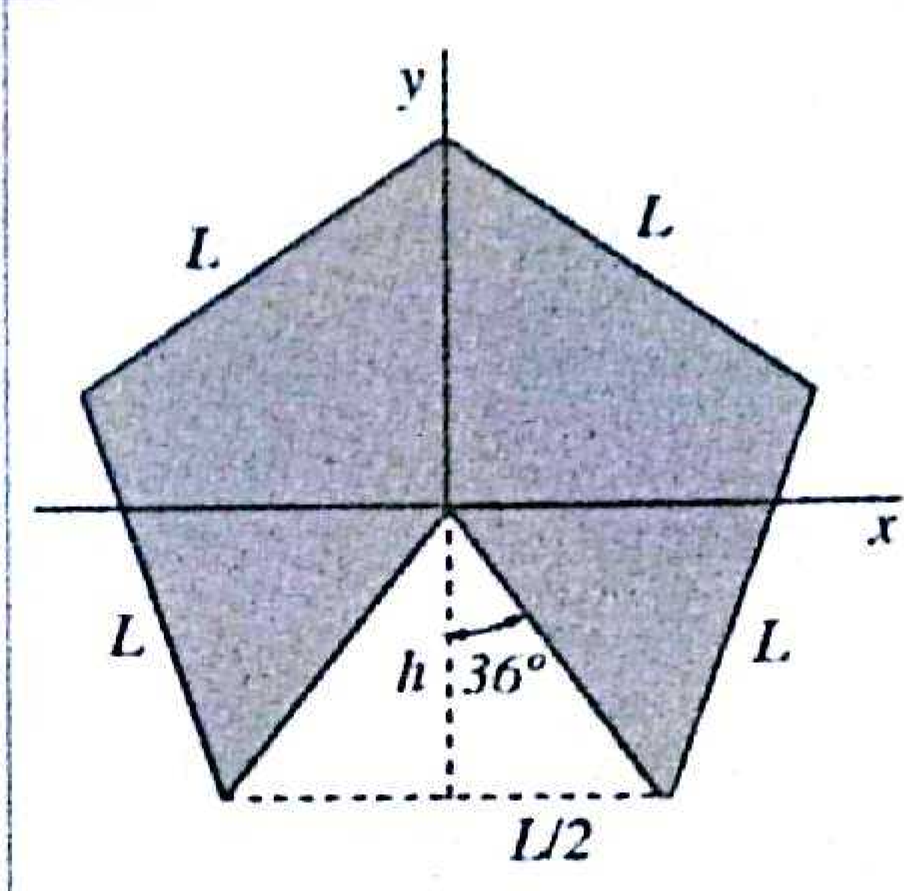


=



-





Tomando un sistema de coordenadas con origen en el centro del pentágono. El CM del pentágono queda en el origen de coordenadas ($y_C = 0$), mientras que el CM del triángulo queda a 1/3 de su base o a 2/3 de su vértice:

$$y_B = -\frac{2}{3}h = -\frac{2}{3}\frac{L/2}{tg36^o} = -0{,}459L$$

Por lo tanto, el centro de masas buscado es:

$$y_A = \frac{m_C y_C + (-m_B) y_B}{m_C + (-m_B)}$$

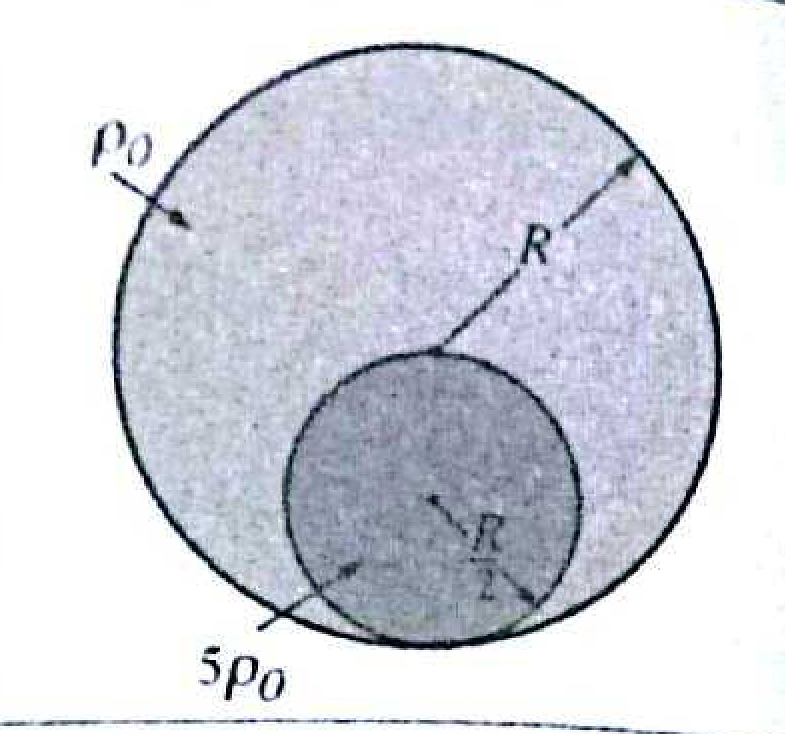
$$y_A = \frac{(5m/4)(0) + (-m/4)(0,459L)}{5m/4 + (-m/4)} = -0,115L$$

Respuesta:

$x_{cm} = 0$, $y_{cm} = -0,115L$

PR-1.11. *Centro de masa de esfera sólida compuesta*

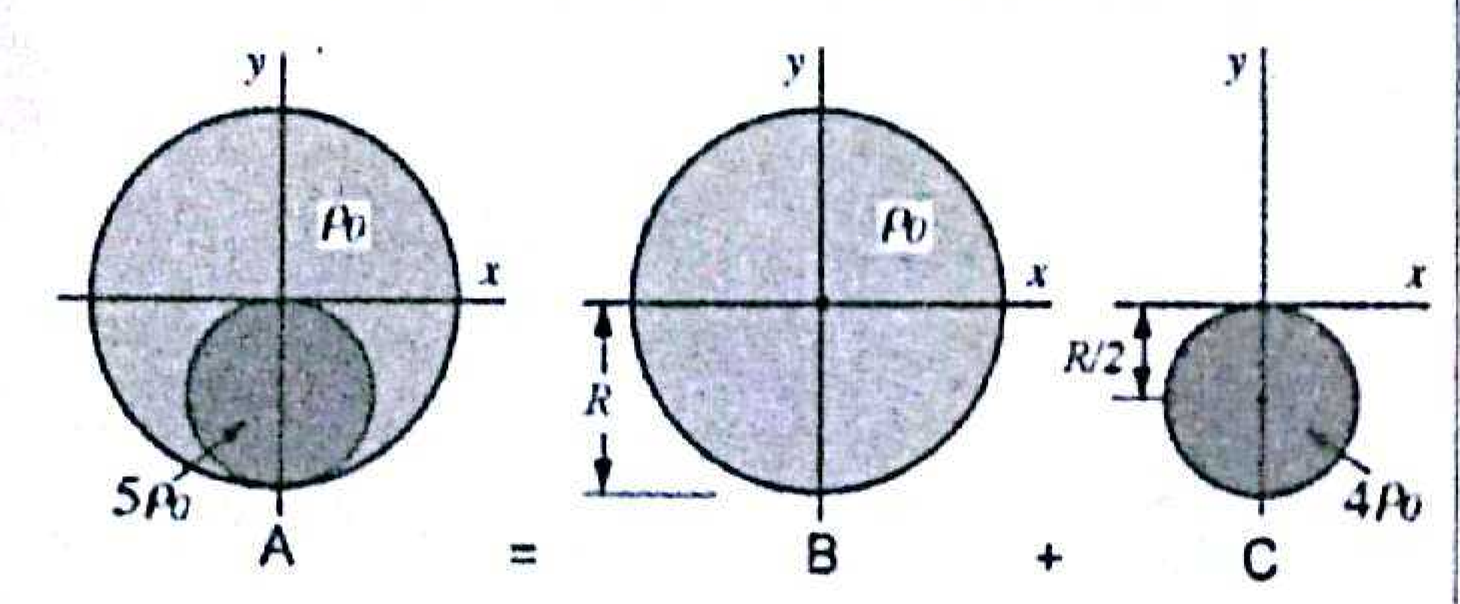
Una esfera sólida de radio R y masa uniforme de densidad ρ_0 (kg/m³) tiene una cavidad esférica de radio $R/2$, la cual está llena de un material de densidad uniforme $5\rho_0$, como se muestra en la figura. Determine dónde se encuentra el centro de masa de la esfera compuesta.



Solución: Si escogemos el centro de la esfera compuesta como el origen de coordenadas, por simetría tenemos: $x_{cm} = 0$. El sistema se puede considerar como si estuviese constituido por tres esferas uniformes y macizas:

1) Una esfera grande de radio R, densidad ρ_0, e $y_1 = 0$.
2) Una esfera de radio $R/2$, densidad $-\rho_0$, e $y_2 = -R/2$.
3) Una esfera de radio $R/2$, densidad $5\rho_0$, e $y_3 = -R/2$.

Las dos esferas de radio $R/2$ se pueden considerar como una sola, por lo tanto el sistema se reduce a dos esferas: Una grande de radio R, densidad ρ_0 centrada en $y_B = 0$ y una pequeña de radio $R/2$, densidad $4\rho_0$ en $y_C = -R/2$.



La coordenada y del centro de masa de la esfera compuesta es:

$$y_A = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_B y_B + m_C y_C}{m_B + m_C}$$

$$y_A = \frac{\rho_0(4\pi R^3/3)0 + 4\rho_0[4\pi(R/2)^3/3](-R/2)}{\rho_0(4\pi R^3/3) + 4\rho_0[4\pi(R/2)^3/3]} = -\frac{R}{6}$$

Respuesta:

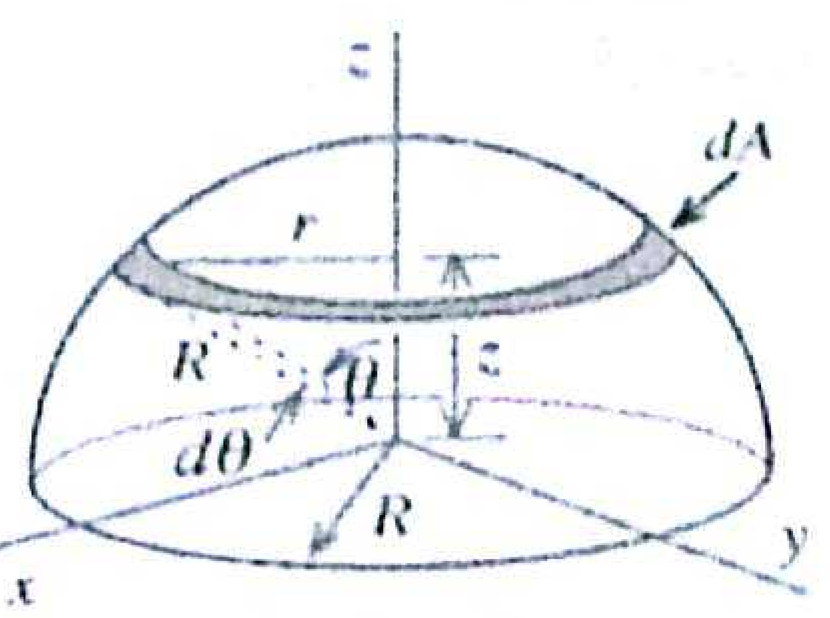
$x_{cm} = 0$, $y_{cm} = -\frac{R}{6}$
(por debajo del centro)

PR-1.12. *Centro de masa de un hemisferio hueco*

Determine la ubicación del centro de masa de una semiesfera hueca de masa uniforme y de radio R.

Solución: Escogemos los ejes de coordenadas con el origen en el centro de curvatura de la semiesfera, luego por simetría: $x_{cm} = 0$, $y_{cm} = 0$. Para hallar z_{cm} se divide la concha esférica en anillos de radio $r = R\,sen\theta$. El área elemental de una tira es:

$$dA = (2\pi r)(R d\theta) = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$$



$r = R\,sen\theta$
$dA = (2\pi r)(Rd\theta) = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$

Este anillo está ubicado a una altura: $z = R\cos\theta$, por lo tanto, la coordenada z del centro de masa es:

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z dm = \frac{1}{\sigma(2\pi R^2)}\int z\sigma dA$$

$$z_{cm} = \frac{1}{\sigma(2\pi R^2)}\int_0^{\pi/2}(R\cos\theta)\sigma(2\pi R^2 sen\theta d\theta)$$

$$z_{cm} = R\int_0^{\pi/2}\cos\theta sen\theta d\theta = R\frac{sen^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}$$

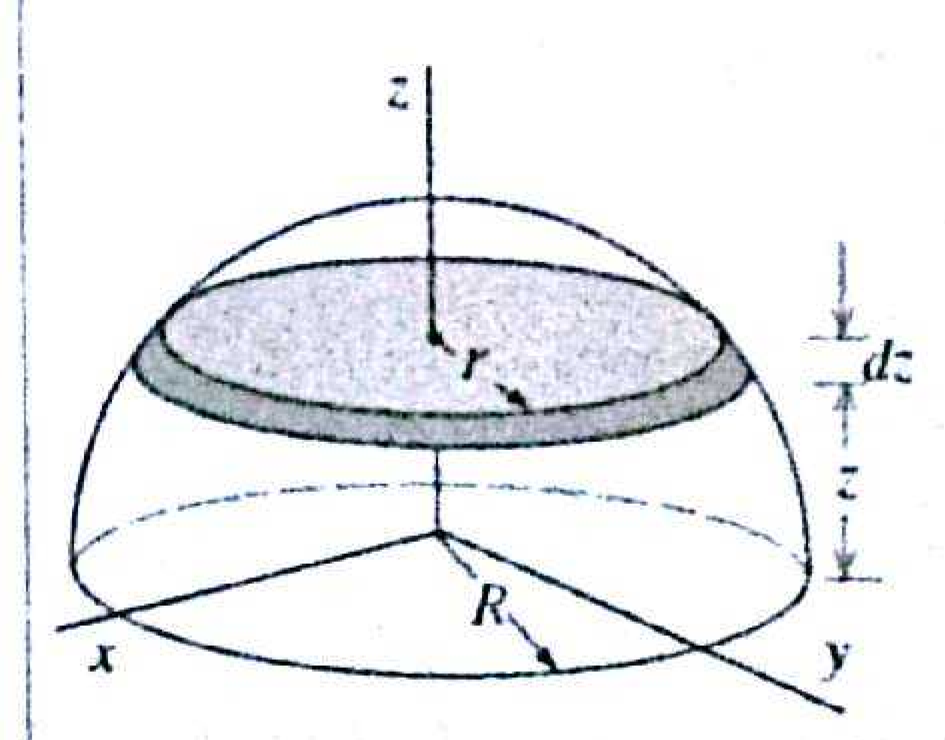
Respuesta:

$x_{cm} = 0$, $y_{cm} = 0$, $z_{cm} = \frac{R}{2}$

PR-1.13. *Centro de masa de un hemisferio sólido*

Determine la ubicación del centro de masa de una semiesfera sólida de masa uniforme y de radio R.

Solución: Escogemos los ejes de coordenadas con el origen en el centro de curvatura de la semiesfera, luego $x_{cm} = 0$, $y_{cm} = 0$. Para hallar z_{cm} se divide la semiesfera sólida en discos circulares paralelos al plano xy. Un disco de espesor dz, localizado a una altura z de la cara plana tiene un radio $r = \sqrt{R^2 - z^2}$. Si la masa por unidad de volumen es ρ (kg/m³), la masa del disco será:



$$dm = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi(R^2 - z^2)dz$$

La masa total del hemisferio es:

$$M = \int dm = \int_0^R \rho\pi(R^2 - z^2)dz = \rho\pi[zR^2 - \frac{z^3}{3}]_0^R$$

$$M = \frac{2}{3}\rho\pi R^3$$

Luego la coordenada y del centro de masa es:

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm = \frac{\rho\pi}{M}\int_0^R (R^2 - z^2)z\,dz$$

$$z_{cm} = \frac{\rho\pi}{M}[\frac{R^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}]_0^R = \frac{\rho\pi}{(2\rho\pi R^3/3)}\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R$$

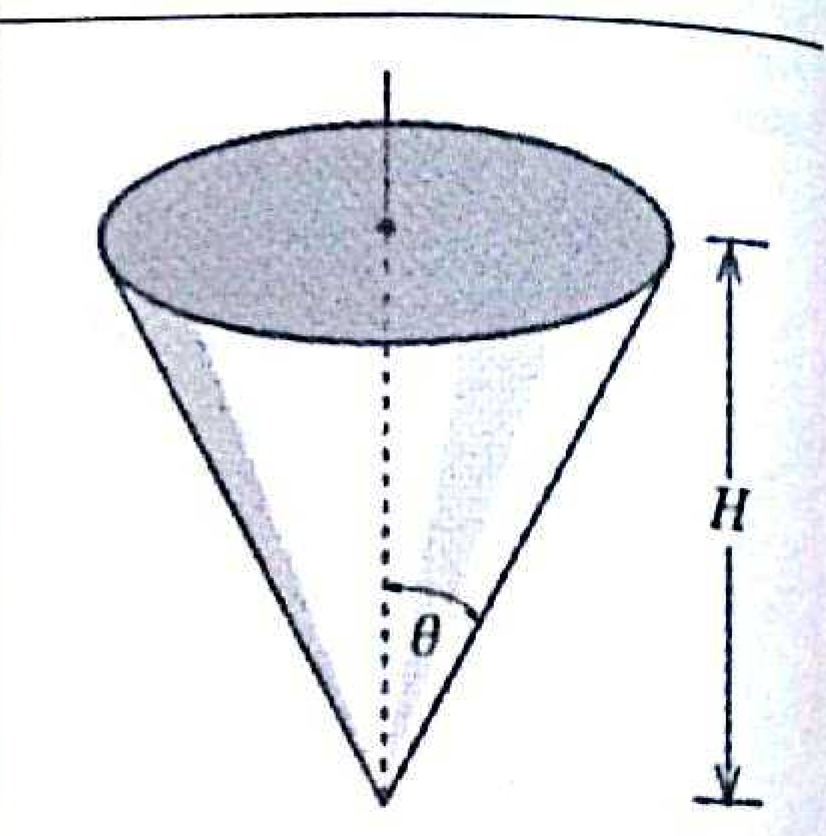
Respuesta:

$$x_{cm} = 0,\ y_{cm} = 0,\ z_{cm} = \frac{3}{8}R$$

PR-1.14. *Centro de masa de un cono circular sólido*

Determine el centro de masa de un cono circular sólido de masa uniforme, altura H y ángulo de su ápice 2θ.

Demuestre que el centro de masa depende únicamente de su altura y no depende del ángulo de su ápice.



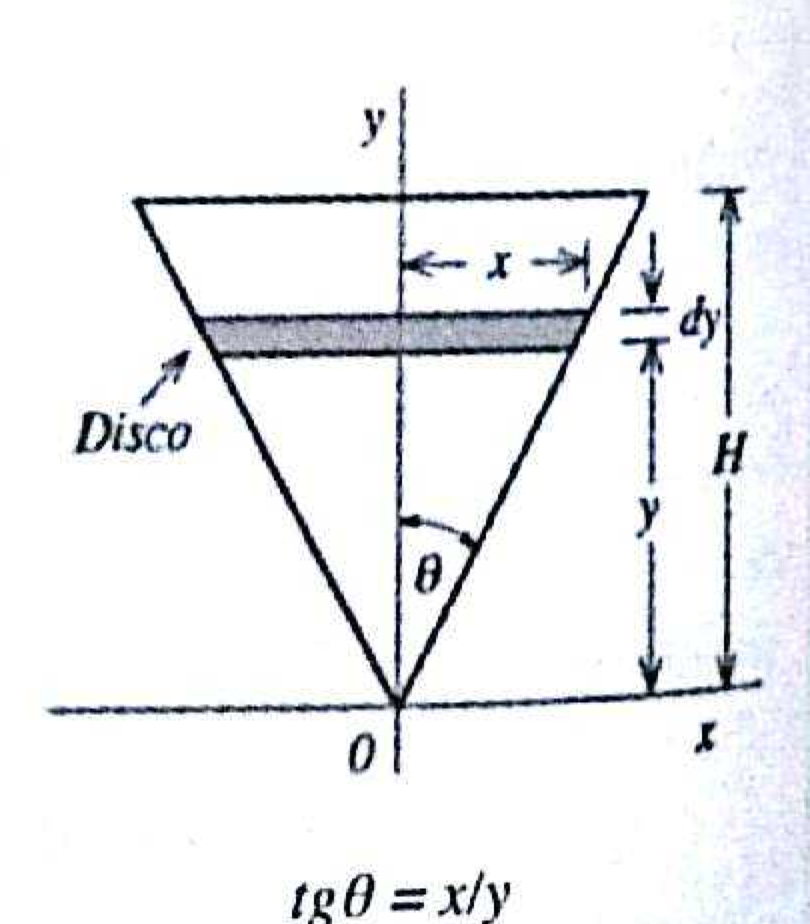
Solución: Es conveniente colocar el origen de coordenadas en el ápice del cono, y el eje y coincidiendo con el eje del cono. Por simetría el centro de masa quedará en este eje, es decir: $x_{cm} = 0$, $z_{cm} = 0$. Para hallar y_{cm} dividimos el cono en discos de radio x y espesor dy. Si ρ (kg/m^3) es la masa por unidad de volumen del cono, entonces la masa elemental de un disco de volumen dV es:

$$dm = \rho dV = \rho(\pi x^2 dy) = \rho\pi(y\,tg\,\theta)^2 dy$$

y la masa total del cono es:

$$M = \int dm = \rho\pi tg^2\theta\int_0^H y^2 dy = \rho\pi tg^2\theta\frac{H^3}{3}$$

La coordenada y del centro de masa está dada por:



$tg\,\theta = x/y$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{\rho\pi tg^2\theta}{M}\int_0^H y^3 dy = \frac{\rho\pi tg^2\theta}{M}\frac{H^4}{4}$$

Sustituyendo la expresión de la masa M del cono, encontramos:

$$y_{cm} = (\frac{3}{\rho\pi tg^2\theta H^3})(\frac{\rho\pi tg^2\theta H^4}{4}) = \frac{3}{4}H$$

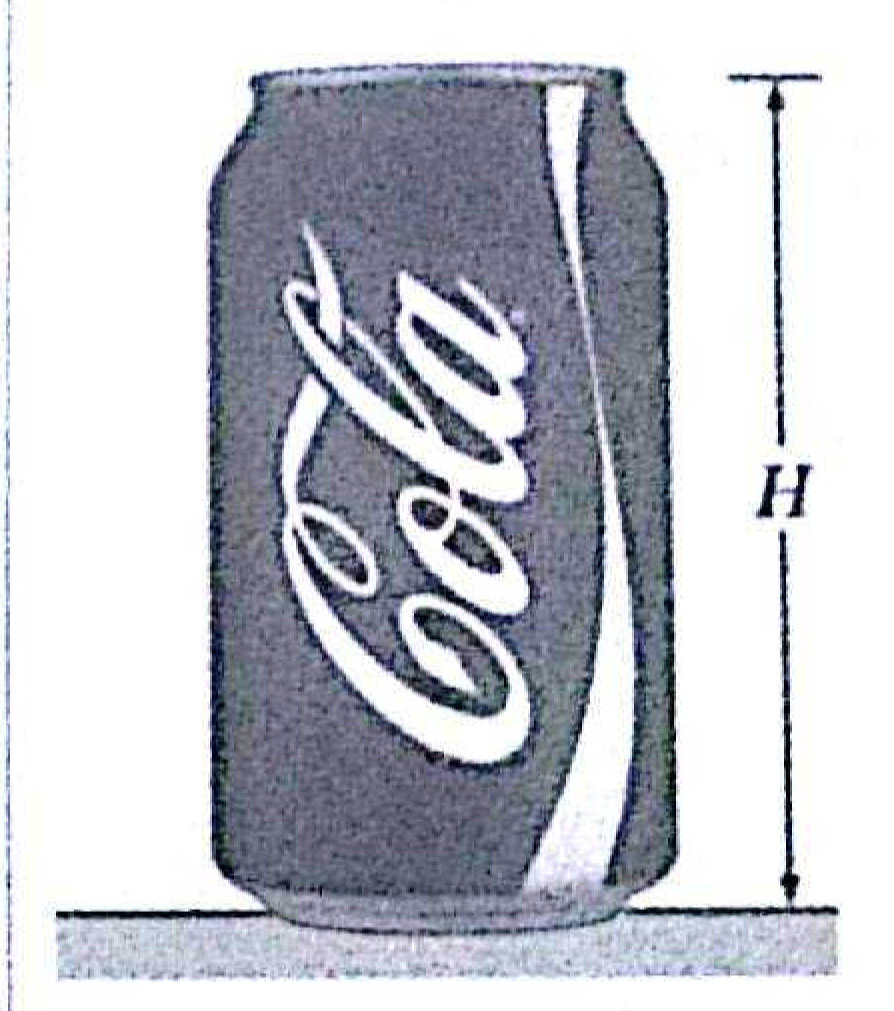
Observe que el centro de masa del cono queda a 1/4 de su altura medida desde su base, ¡independiente del ángulo θ!

Respuesta:

$$x_{cm} = 0,\ z_{cm} = 0,\ y_{cm} = \frac{3}{4}H$$

PR-1.15. *Para que la lata de refresco sea más estable*

Un alumno se plantea la siguiente situación: Si bebo algo de refresco, el centro de masa del sistema lata-líquido descenderá y por consiguiente será más estable cuando lo coloque sobre la mesa. Por otra parte, si me bebo todo el contenido, el CM volverá a subir y la lata se hará más inestable. Me pregunto, ¿qué cantidad de refresco tiene que haber para que la lata tenga la estabilidad máxima? Supongamos una lata de masa M y altura H que inicialmente está llena con líquido de masa $m = 8M$.
a) ¿Cuál es la altura inicial del centro de masa cuando la lata está completamente llena?
b) ¿Cuál será la altura del centro de masa cuando la lata quede completamente vacía?
c) ¿A qué altura y debe estar el nivel del refresco para que el CM de todo el sistema quede a su mínima altura?

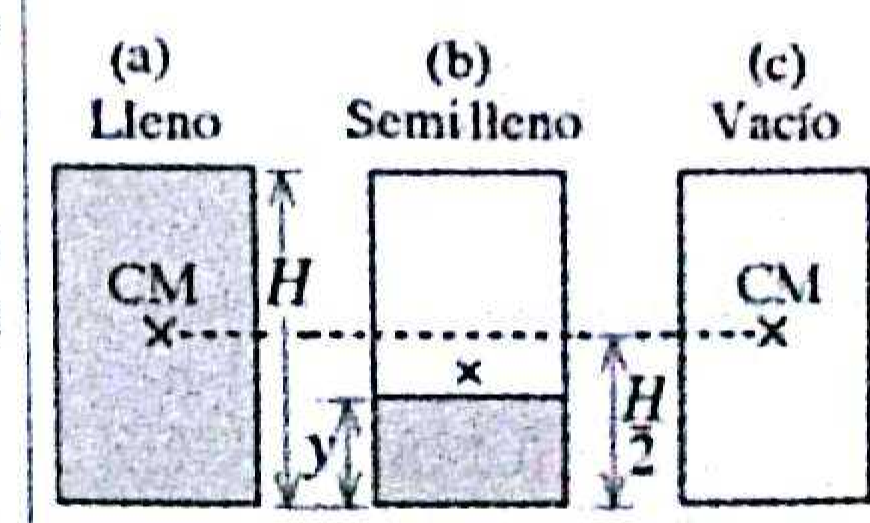


Solución: a) Cuando la lata esta llena, por tener el recipiente y el refresco masas uniformes, sus centros de masa coinciden y quedan en el centro geométrico, por lo tanto, el CM del sistema lata-refresco está a un altura $H/2$.

b) Al extraer refresco, el centro de masa del sistema empieza a descender, pero finalmente cuando el recipiente queda vacío el CM volverá a estar a su altura original $H/2$.

c) Cuando el nivel del refresco está a una altura y su masa es $m(y/H)$ y el CM del líquido estará a una altura $y/2$. La altura del centro de masa del sistema es:

$$h_{cm} = \frac{M(H/2) + m(y/H)(y/2)}{M + m(y/H)} = \frac{MH^2 + my^2}{2(MH + my)}$$



La mínima posición del CM ocurre cuando dh_{cm}/dy es cero:

$$\frac{dh_{cm}}{dy} = \frac{m^2y^2 + 2MmHy - mMH^2}{2(MH + my)^2} = 0$$

Tenemos así la ecuación cuadrática:

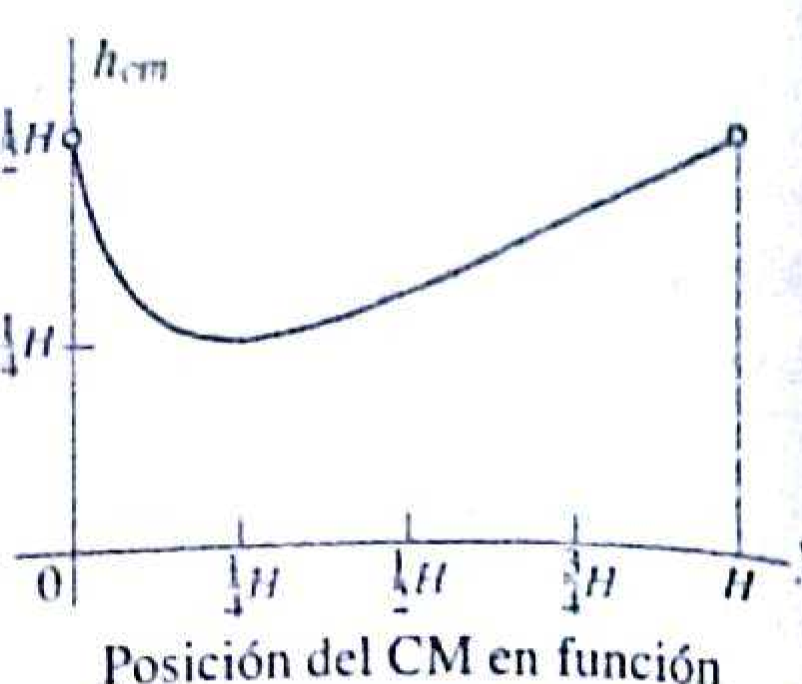
$$m^2y^2 + 2MmHy - mMH^2 = 0$$

Resolviendo y tomando solo la raíz positiva obtenemos:

$$y = \frac{MH}{m}\left[\sqrt{\frac{M+m}{M}} - 1\right] = \frac{H}{8}[\sqrt{1+8} - 1] = \frac{1}{4}H$$

En este caso la correspondiente altura mínima del CM es:

$$h_{cm}(\min) = \frac{MH^2 + my^2}{2(MH + my)} = \frac{MH^2 + 8M(H/4)^2}{2(MH + 8MH/4)} = \frac{1}{4}H$$



Posición del CM en función de la altura y del liquido

Respuesta:

$y = \frac{1}{4}H$,

$h_{cm}(min) = \frac{1}{4}H$

PR-1.16. *Movimiento del CM de dos partículas*

Dos partículas m_1 y m_2 se encuentran inicialmente en las posiciones y las velocidades siguientes:

Partícula	x (m)	y (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)
$m_1 = 1$ kg	2	3	6	-4
$m_2 = 3$ kg	-6	2	-2	1

a) Halle la posición y velocidad del centro de masa en $t = 0$.
b) Si en $t = 0$ se aplica sobre la partícula m_1 una fuerza: $\vec{F}_1 = 4N\hat{y}$ ¿Cuál será la posición y la velocidad del CM al cabo de un tiempo $t = 10$ segundos?

Solución: a) En el instante inicial el vector posición del centro de masa es:

$$\vec{r}_{cm}(0) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1)(2\hat{x} + 3\hat{y}) + 3(-6\hat{x} + 2\hat{y})}{(1+3)} \text{ m}$$

$$\vec{r}_{cm}(0) = (-4\hat{x} + 2{,}25\hat{y}) \text{ m}$$

y el vector velocidad del centro de masa es:

$$\vec{v}_{cm}(0) = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1)(6\hat{x} - 4\hat{y}) + 3(-2\hat{x} + \hat{y})}{(1+3)} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{cm}(0) = -0{,}25\hat{y} \text{ m/s}$$

b) La aceleración del centro de masa es:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m_{total}} = \frac{\vec{F}_1}{m_1 + m_2} = \frac{4\hat{y}N}{(1+3)kg} = 1\hat{y} \text{ m/s}^2$$

La aceleración es constante, por lo tanto el vector posición del centro de masa al cabo de 10 segundos es:

$$\vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cm}(0) + \vec{v}_{cm}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2$$

$$\vec{r}_{cm} = [(-4\hat{x} + 2{,}25\hat{y}) + (-0{,}25\hat{y})(10) + \frac{1}{2}(1\hat{y})(10)^2] \text{ m}$$

$$\vec{r}_{cm} = (-4\hat{x} + 49{,}8\hat{y}) \text{ m}$$

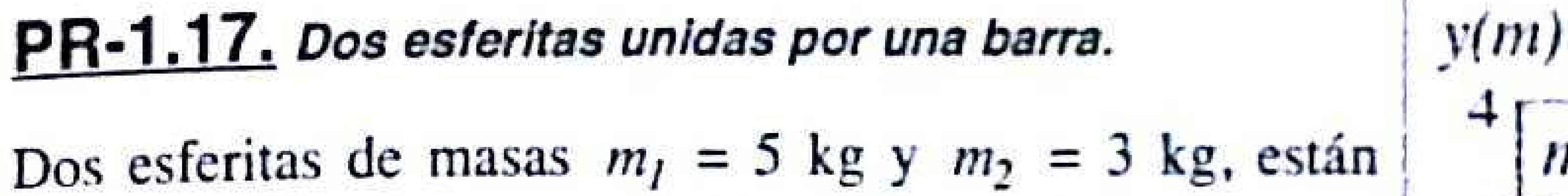
La velocidad del CM al cabo de 10 segundos será:

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{cm}(0) + \vec{a}_{cm}t = -0{,}25\hat{y} + (1\hat{y})(10) = 9{,}75\hat{y} \text{ m/s}$$

Respuesta:

a) $\vec{r}_{cm}(0) = (-4\hat{x} + 2{,}25\hat{y})$ m
$\vec{v}_{cm}(0) = -0{,}25\hat{y}$ m/s

b) $\vec{r}_{cm} = (-4\hat{x} + 49{,}8\hat{y})$ m
$\vec{v}_{cm} = 9{,}75\hat{y}$ m/s

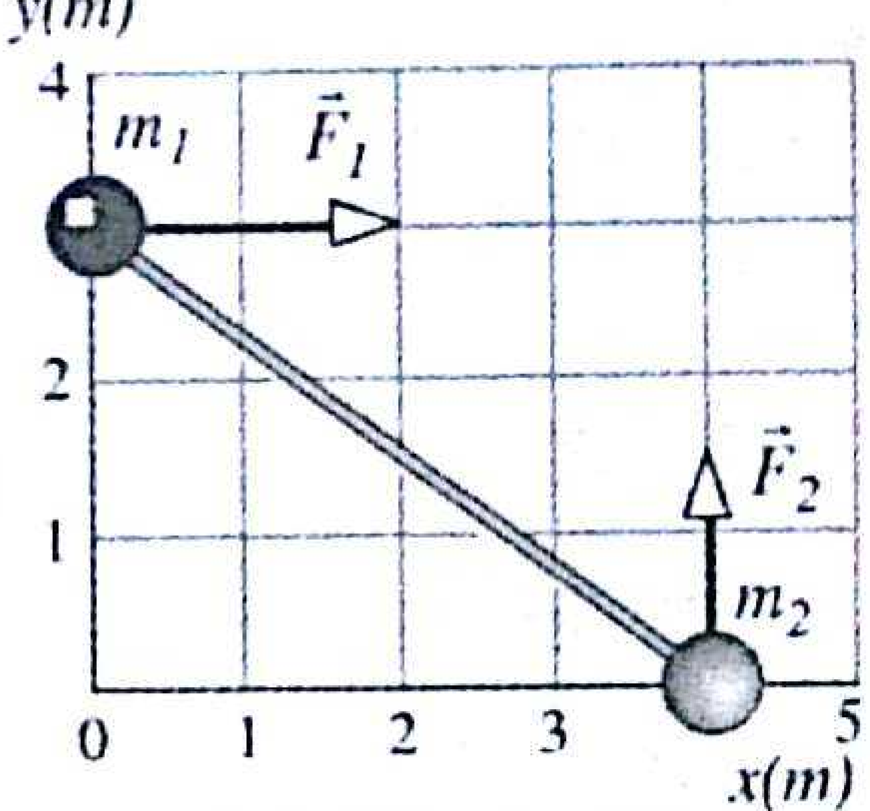


PR-1.17. *Dos esferitas unidas por una barra.*

Dos esferitas de masas $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 3$ kg, están unidas por una barra liviana. Inicialmente, el sistema está en reposo en la posición indicada y luego actúan dos fuerzas:

$$\vec{F}_1 = 4\hat{x}\text{ N} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = 3\hat{y}\text{ N}$$

a) Halle la posición del centro de masa del sistema en función del tiempo.
b) Halle la cantidad de movimiento en función del tiempo.



Solución: a) En el instante inicial el vector posición del centro de masa es:

$$\vec{r}_{cm}(0) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(5\text{kg})(3\hat{y}\text{m}) + (3\text{kg})(4\hat{x}\text{m})}{(5\text{kg} + 3\text{kg})} \text{ m}$$

$$\vec{r}_{cm}(0) = (\frac{3}{2}\hat{x} + \frac{15}{8}\hat{y}) \text{ m}$$

La aceleración del sistema es:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m_{total}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4\hat{x} + 3\hat{y})\text{N}}{(5+3)\text{kg}} = (\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{3}{8}\hat{y})\text{m/s}^2$$

El vector posición del CM en función del tiempo es:

$$\vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cm}(0) + \frac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2 = (\frac{3}{2}\hat{x} + \frac{15}{8}\hat{y}) + (\frac{1}{4}\hat{x} + \frac{3}{16}\hat{y})t^2$$

b) La velocidad del CM en función del tiempo es:

$$\vec{v}_{cm}(t) = \vec{a}_{cm}t = (\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{3}{8}\hat{y})t \text{ m/s}$$

y la cantidad de movimiento del sistema:

$$\vec{P}_{cm} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{cm} = (5+3)(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{3}{8}\hat{y})t = (4\hat{x} + 3\hat{y})t \text{ N.s}$$

Respuesta:

a) $x_{cm}(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}t^2$ m

$y_{cm}(t) = \frac{15}{8} + \frac{3}{16}t^2$ m

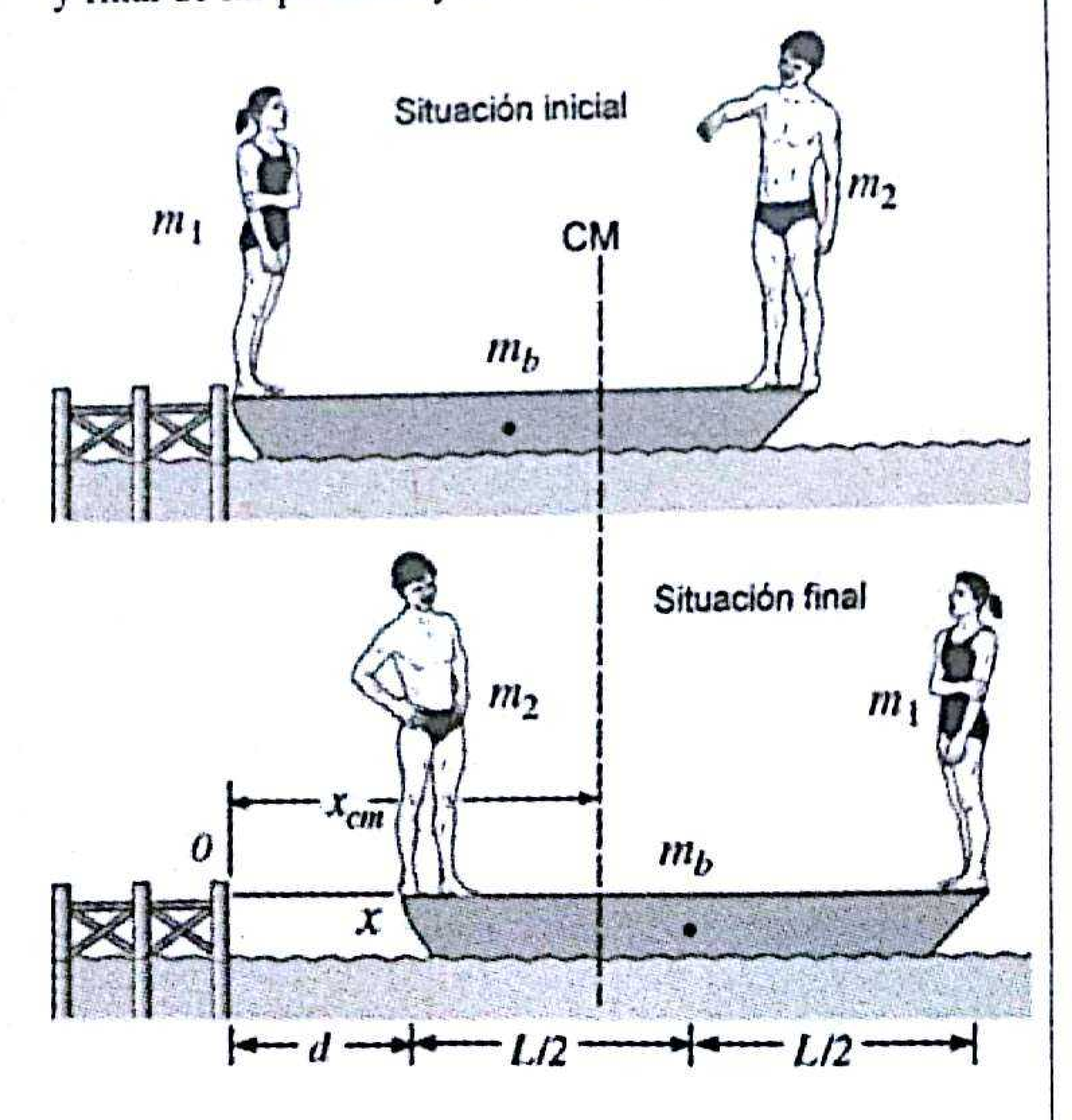
b) $\vec{P}_{cm} = (4\hat{x} + 3\hat{y})t$ N.s

PR-1.18. *Un truco para averiguar cuánto pesa María*

Pablo y María se encuentran en los extremos de un bote separados por una distancia L = 6 m. Pablo tiene curiosidad por averiguar el peso de María, y le pide que intercambien sus posiciones dentro del bote. Al hacerlo, el extremo del bote que estaba inicialmente en contacto con el muelle, se aleja de éste en una distancia d = 0,5 m.

Sabiendo que la masa de Pablo es m_2 = 75 kg y la del bote es m_b = 45 kg, ¿Cómo determina Pablo el peso de María?

Solución: Consideremos al bote como representado por una partícula de masa m_b ubicada en su centro geométrico. En el dibujo se ilustran las posiciones inicial y final de las personas y del bote respecto al muelle.



En la situación inicial, la posición del centro de masa es:

$$x_{cm}(i) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_bx_b}{m_1 + m_2 + m_b} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2L + m_bL/2}{m_1 + m_2 + m_b}$$

En la situación final, la posición del centro de masa es:

$$x_{cm}(f) = \frac{m_1(L+d) + m_2d + m_b(d + L/2)}{m_1 + m_2 + m_b}$$

Suponiendo que el agua no ejerce ninguna fuerza horizontal sobre el bote, el centro de masa del sistema debe permanecer fijo después del cambio de posiciones. Igualando las dos expresiones:

$$m_1 \cdot 0 + m_2L + m_b\frac{L}{2} = m_1(L+d) + m_2d + m_b(d + \frac{L}{2})$$

Despejando, se obtiene la masa m_l de María:

$$m_l = \frac{m_2(L-d) - m_bd}{L+d}$$

$$m_l = \frac{(75\text{kg})(6\text{m} - 0{,}5\text{m}) - 45\text{kg}(0{,}5\text{m})}{6\text{m} + 0{,}5\text{m}} = 60 \text{ kg}$$

El peso de María sería:

$$P_l = m_lg = (60\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 588\text{N}$$

Respuesta:

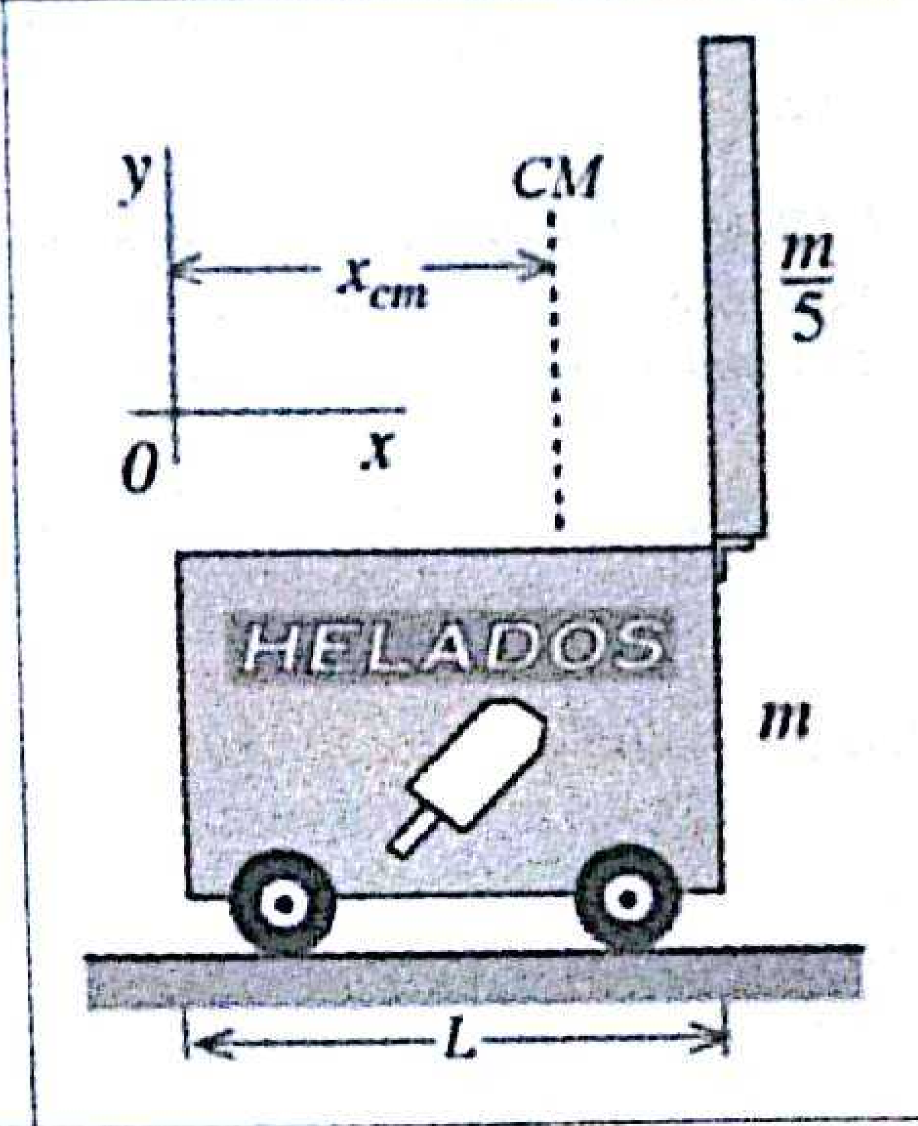
Masa de María: m_l = 60 kg

Peso de María: $P_l = m_lg$ = 588 N

PR-1.19. *Desplazamiento del carrito de helados*

Un carrito de helados de largo L y masa m tiene su tapa de masa $m/5$, que está inicialmente abierta en posición vertical. Si de repente la tapa cae por si sola a la posición horizontal, ¿cuál será el desplazamiento del carrito?

Suponga que la fuerza de fricción entre el carro y el piso es despreciable y que los centros de masa del carrito y de la tapa quedan en sus respectivos centros geométricos.



Solución: En la situación inicial, la posición horizontal del centro de masa del sistema respecto al origen O es:

$$x_{cm}(i)=\frac{m(L/2)+(m/5)L}{m+m/5}=\frac{(7/10)mL}{(6/5)m}=\frac{7}{12}L$$

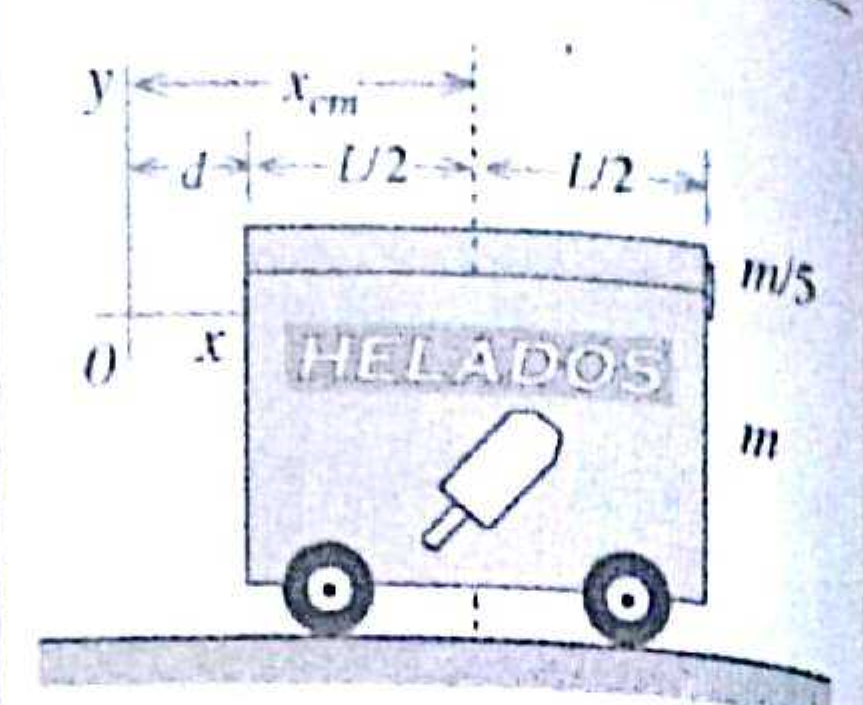
En la situación final, la posición horizontal del centro de masa respecto al origen O es:

$$x_{cm}(f)=\frac{m(d+L/2)+(m/5)(d+L/2)}{m+m/5}=d+\frac{L}{2}$$

Como no hay fuerzas horizontales, x_{cm} debe permanecer invariable: $x_{cm}(i)=x_{cm}(f)$. Por lo tanto:

$$\frac{7}{12}L=d+\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad d=\frac{1}{12}L$$

El desplazamiento del carrito es $L/12$ hacia la derecha.

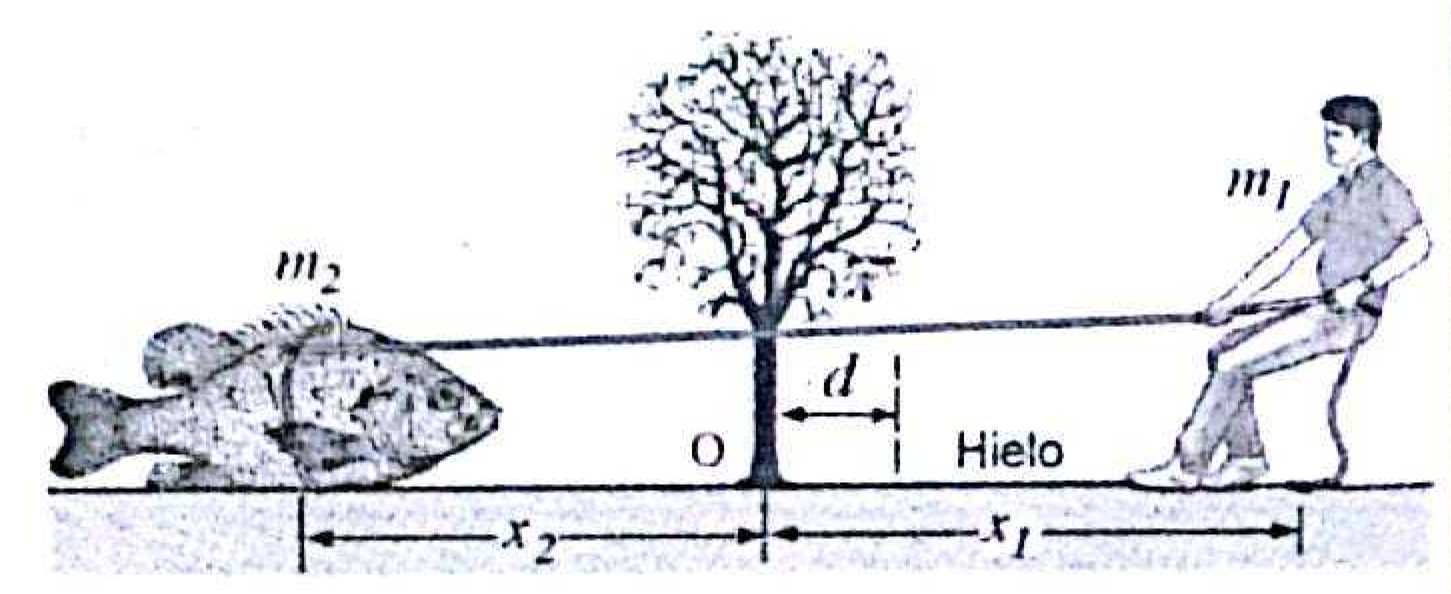


Respuesta:

$d = L/12$, hacia la derecha.

PR-1.20. *¿Cuánto pesa ese pescado?*

Un pescador sobre un lago congelado, desea determinar cuánto pesa un pescado, pero lo único que dispone es de una cuerda y una cinta métrica.



El pescador amarra la cuerda al pescado, con una separación inicial de 10 m, estando el punto medio de la cuerda enfrente de un árbol. Luego procede a tirar de la cuerda hasta encontrarse con el pescado lo cual ocurre a una distancia d = 2 m a la derecha del árbol. Si su masa es m_1 = 75 kg, ¿cuál es la masa del pescado?

Solución: Tomemos como origen O, la ubicación del árbol. En la situación inicial, la coordenada del centro de masa del sistema es:

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{(75kg)(5m)+m_2(-5m)}{75kg+m_2}$$

Después que el pescador jala de la cuerda, el encuentro ocurre a una distancia d a la derecha del árbol donde queda el CM del sistema. Igualando con la expresión anterior:

$$x_{cm}=\frac{375-5m_2}{75+m_2}=d=2\text{ m}$$

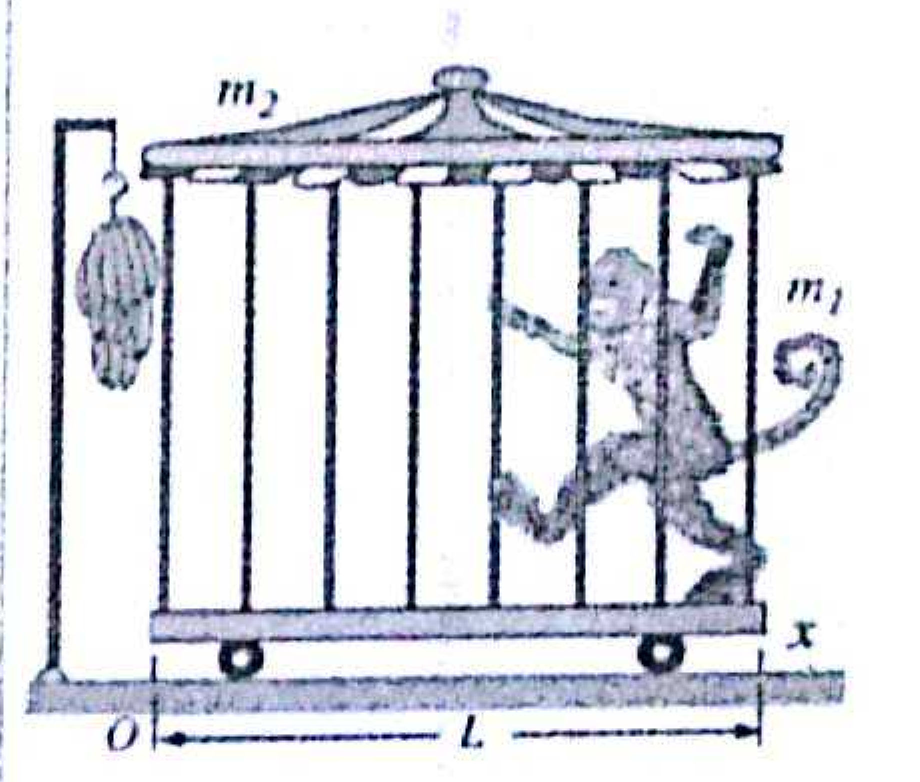
$$375\text{kg}-5m_2=150\text{kg}+2m_2 \quad \Rightarrow \quad m_2=32{,}1\text{ kg}$$

Respuesta:

Masa del pescado: m_2 = 32,1 kg
Peso del pescado: m_2g = 315 N

PR-1.21. *¿Podrá el mono alcanzar las bananas?*

Un mono de masa m_1 = 20 kg se encuentra dentro de una jaula que está montada sobre ruedas y tiene una masa m_2 = 35 kg y un largo L = 4 m. Inicialmente, el mono está en el extremo derecho de la jaula y observa que justo en el extremo izquierdo, han colocado un racimo de bananas. El mono comienza a caminar hacia ese lado para comerse las bananas. Suponiendo que la jaula rueda sin rozamiento y sabiendo que el mono puede extender sus brazos hasta una distancia máxima de un metro fuera de la jaula, ¿podrá alcanzar las bananas?



Solución: Si tomamos el origen de coordenadas x en la posición de las bananas, la ubicación inicial del centro de masa del sistema jaula-mono es:

$$x_{cm}(i)=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{(20\text{kg})L+(35\text{kg})L/2}{(20+35)\text{kg}}$$

Después que el mono llega al otro extremo de la jaula, quedará a una distancia d de las bananas, y la ubicación del centro de masa es:

$$x_{cm}(f)=\frac{(20\text{kg})d+(35\text{kg})(d+L/2)}{(20+35)\text{kg}}$$

Como no actuaron fuerzas horizontales, la posición del centro de masa no debe cambiar, por lo tanto:

$$x_{cm}(i)=x_{cm}(f) \quad \Rightarrow \quad 20L+35L/2=20d+35(d+L/2)$$

$$d=\frac{4}{11}L=\frac{14}{11}(4\text{m})=1{,}45\text{ m}$$

Respuesta:

El mono no puede agarrar las bananas. El vagón se aleja del racimo en 1,45 m.

PR-1.22. *La rana salta en la tabla sin caer al agua*

Una rana de masa m está en un extremo de una tabla recta de masa M y longitud L, que flota sobre las aguas tranquilas de una laguna. La rana da un salto hacia el otro extremo de la tabla con una velocidad $\vec{v}_0$, que forma un ángulo de elevación θ. Si la tabla permanece horizontal, ¿cuál debe ser el módulo de v_0, para que la rana llegue justamente al otro extremo sin caer al agua?

Solución: Tomemos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la tabla. Antes del salto, el centro de masa del sistema tabla-rana está en la posición:

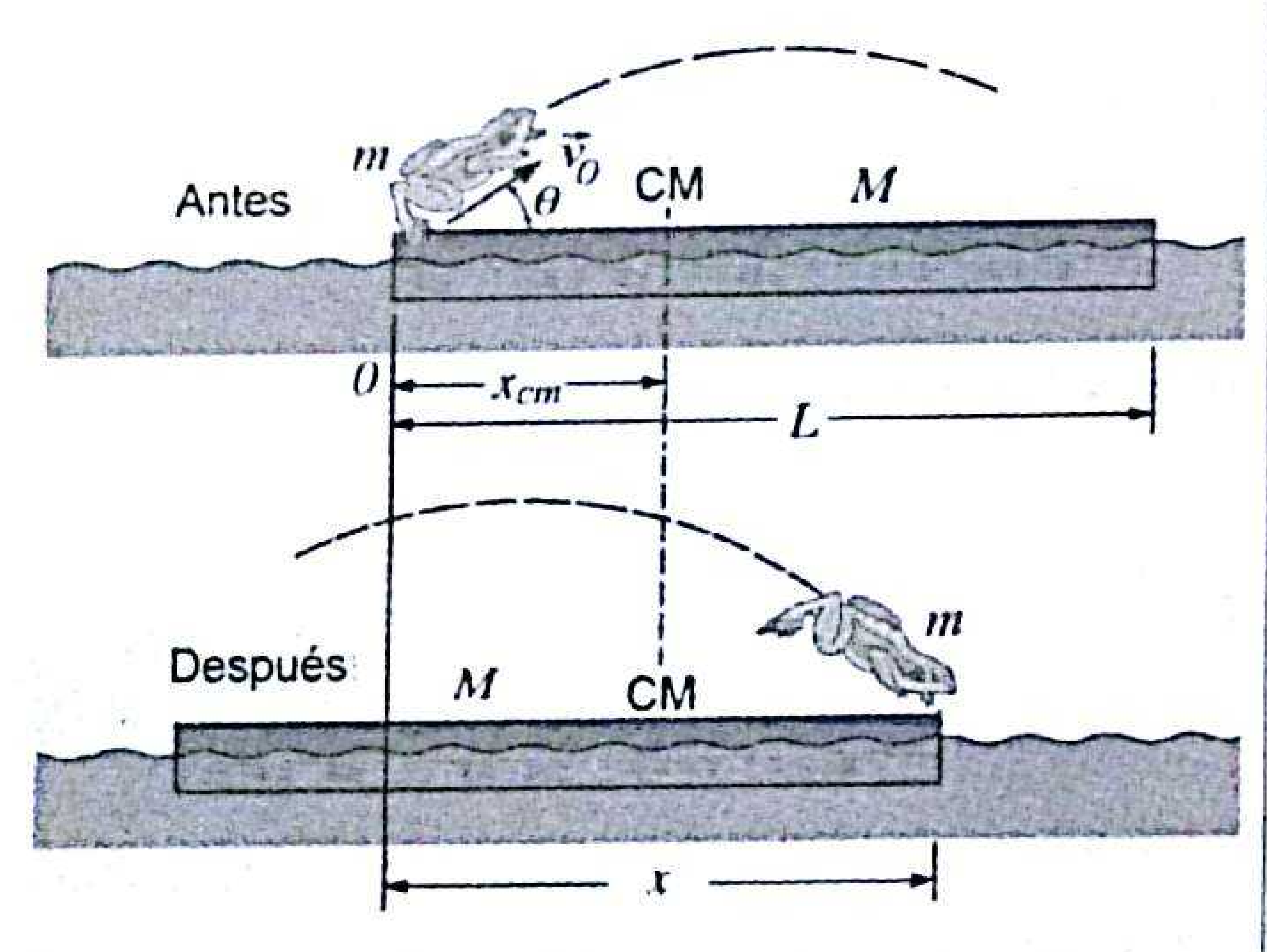
$$x_{cm} = \frac{ML/2 + m(0)}{M+m} = \frac{L}{2}\frac{M}{M+m}$$

Si despreciamos el rozamiento con el agua, la ubicación horizontal del CM luego del salto debe permanecer invariable:

$$x_{cm} = \frac{M(x - L/2) + mx}{M+m} = \frac{L}{2}\frac{M}{M+m}$$

Luego, la distancia horizontal x que recorre la rana es:

$$M(x - L/2) + mx = ML/2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{M}{M+m}L$$



El tiempo que permanece la rana en el aire viene dado por las ecuaciones cinemáticas:

$$y = 0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Durante ese tiempo, recorre la distancia horizontal:

$$x = v_x t = v_0 \cos\theta\left(\frac{2v_0 sen\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g} = \frac{M}{M+m}L$$

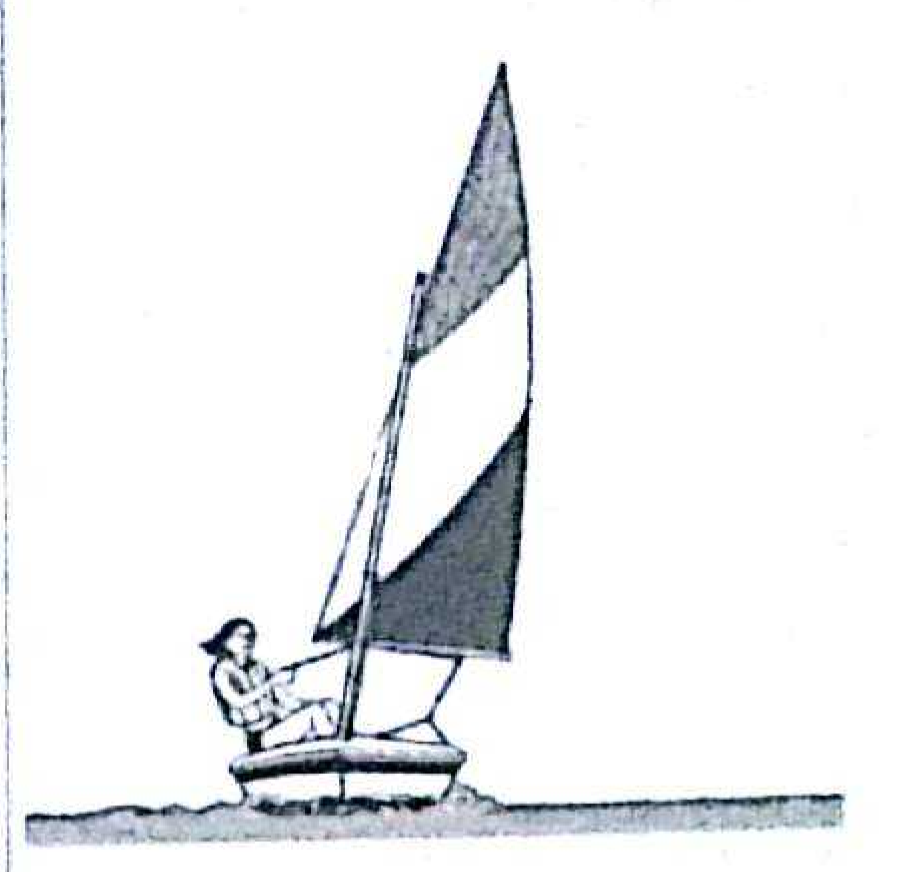
Por lo tanto, el valor de la velocidad inicial debe ser:

$$v_0 = \sqrt{\frac{MLg}{(M+m)sen2\theta}}$$

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{MLg}{(M+m)sen2\theta}}$$

PR-1.23. *Una decisión equivocada*



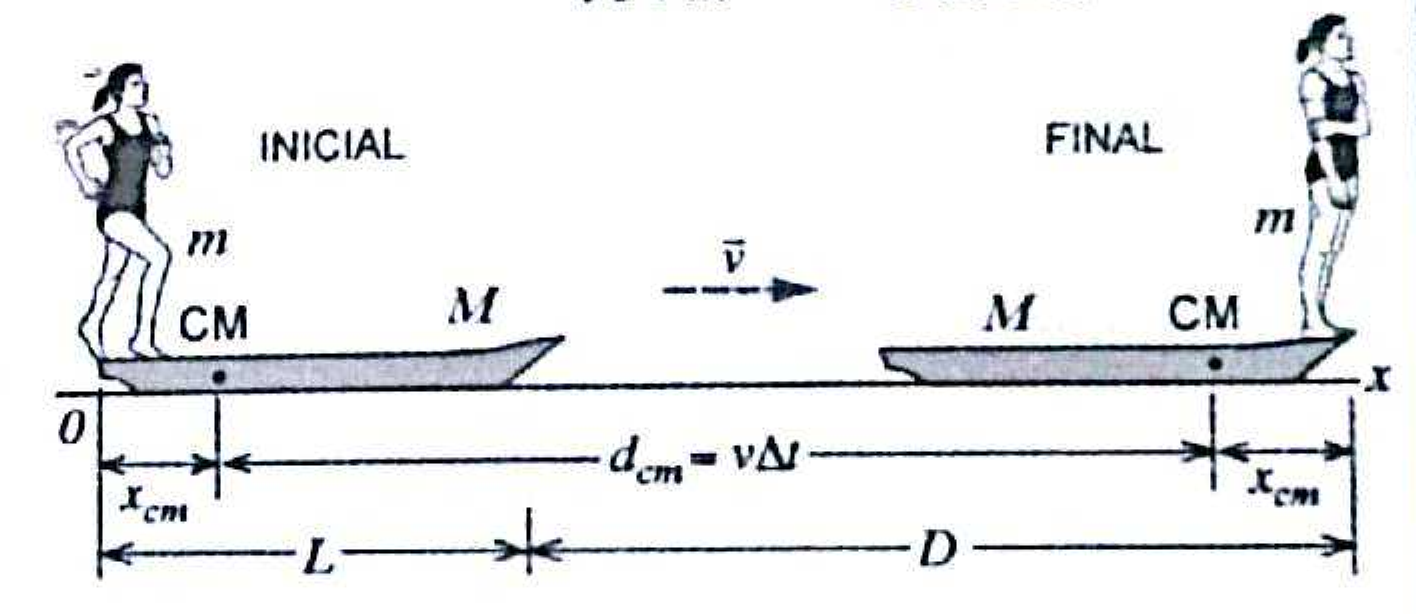
En una competencia, dos veleros A y B avanzan uno al lado del otro con igual velocidad, v = 4 m/s. Cuando van llegando a la meta, la velerista A deseando ganar ventaja, decide caminar desde la popa hacia la proa a una velocidad u = 2 m/s respecto al velero. La masa de la persona es m = 60 kg y la del velero es M = 300 kg. El velero tiene una longitud L = 18 m.

a) ¿Qué distancia avanzó el velero A durante el tiempo en que la persona estuvo caminando?

b) ¿Qué distancia hubiera avanzado el velero A en ese tiempo si ella se hubiese quedado quieta en la popa?

Solución: Si tomamos el origen en la popa del velero, la posición inicial del centro de masa del sistema es:

$$x_{cm} = \frac{m(0) + ML/2}{M+m} = \frac{L}{2}\frac{M}{M+m}$$



La velerista camina la longitud L a velocidad u durante un tiempo: $\Delta t = L/u$. En ese tiempo el centro de masa del sistema se ha movido a velocidad constante v, recorriendo una distancia $d_{cm} = v\Delta t$. La distancia que se traslada el velero es:

$$D = d_{cm} + 2x_{cm} - L = v\left(\frac{L}{u}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\frac{M}{M+m}\right) - L$$

$$D = L\left(\frac{v}{u} + \frac{M}{M+m} - 1\right) = 18\left(\frac{4}{2} + \frac{300}{300+60} - 1\right) = 33\text{m}$$

b) Si la persona se hubiese quedado quieta, el velero hubiese avanzado una distancia mayor en ese tiempo:

$$d_{cm} = v\Delta t = L\left(\frac{v}{u}\right) = 18\text{m}\left(\frac{4\text{m/s}}{2\text{m/s}}\right) = 36\text{m}$$

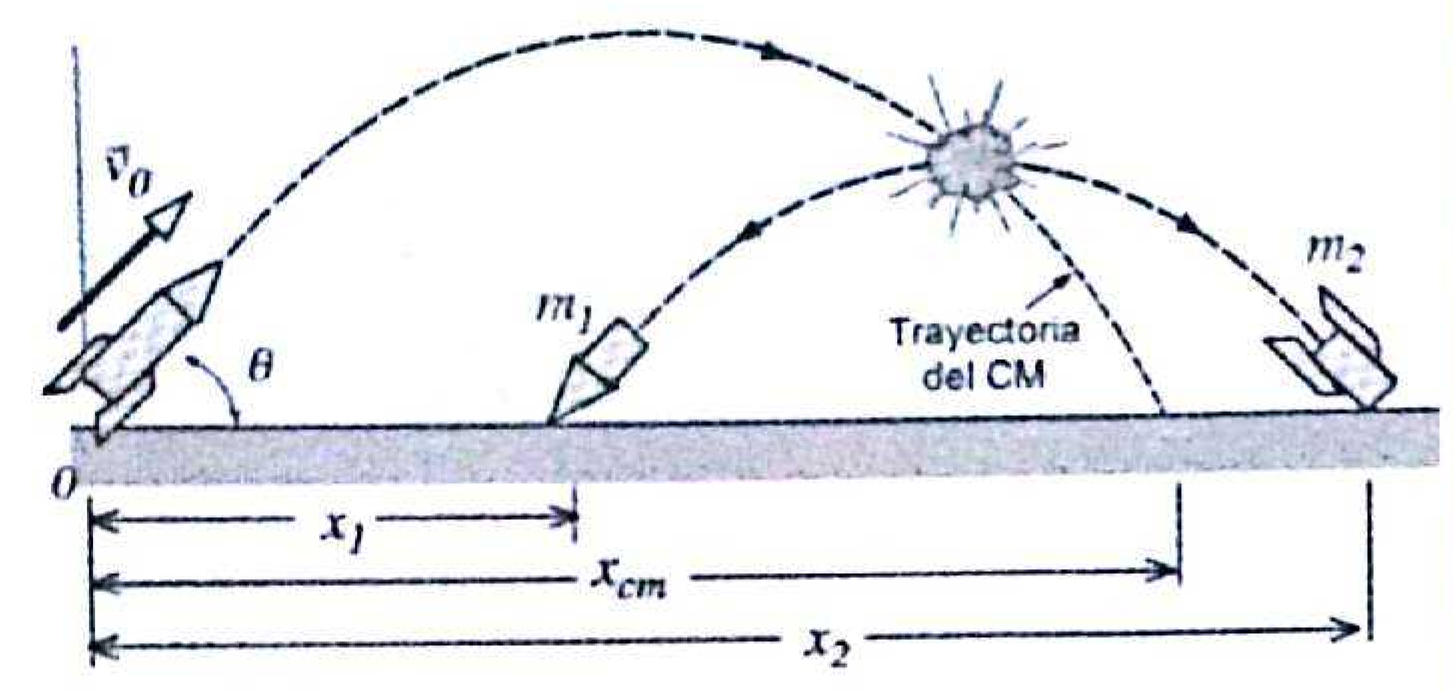
Respuesta:

a) D = 33 m
b) d_{cm} = 36 m

PR-1.24. *Explosión de un proyectil en el aire*

Un proyectil es disparado con velocidad inicial $v_0 = 20$ m/s a un ángulo $\theta = 30°$ respecto a la horizontal.

En el curso de su vuelo, el proyectil estalla rompiéndose en dos fragmentos, uno de los cuales tiene el doble de la masa que el otro. Los dos fragmentos aterrizan simultáneamente y el mas ligero, de masa m_1, aterriza a una distancia $x_1 = 20$ m del punto de lanzamiento. ¿Dónde aterrizará el otro fragmento?



Solución: Si se ignora la resistencia del aire, y como las fuerzas de explosión son internas, la única fuerza externa que actúa sobre el proyectil es la de la gravedad. En consecuencia, el centro de masa de los fragmentos continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica original que hubiera seguido el proyectil si no hubiera explotado. El tiempo de vuelo del centro de masa está dado por:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

La distancia final del centro de masa es justamente el alcance horizontal del proyectil:

$$x_{cm} = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta)(\frac{2v_0 sen\theta}{g}) = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$

$$x_{cm} = \frac{(20\text{m/s})^2 \text{sen}60°}{9.8\text{m/s}^2} = 35{,}4\text{m}$$

Como el pedazo m_1 aterriza a una distancia $x_1 = 20$ m, el pedazo m_2 aterrizará a la distancia x_2 dada por:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_2 = \frac{(m_1 + m_2)x_{cm} - m_1x_1}{m_2} = (\frac{m_1}{m_2} + 1)x_{cm} - \frac{m_1}{m_2}x_1$$

$$x_2 = (\frac{1}{2} + 1)(35{,}4\text{m}) - \frac{1}{2}(20\text{m}) = 43{,}1\text{m}$$

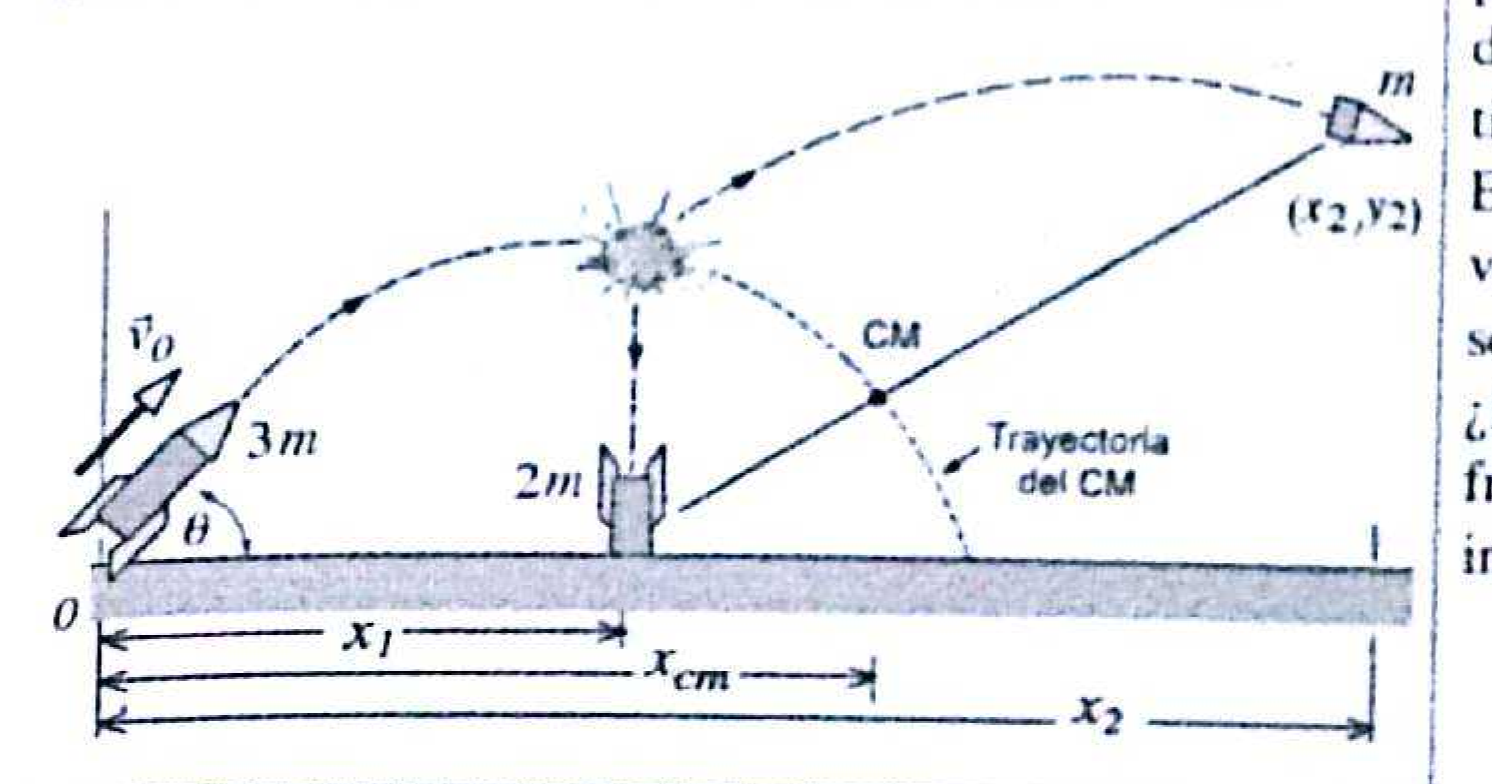
Respuesta:

$x_2 = 43{,}1$ m

PR-1.25. *Explosión de un proyectil en el aire II*

Un proyectil es disparado con velocidad inicial $v_0 = 100$ m/s formando un ángulo $\theta = 36{,}9°$ con la horizontal.

A los 8 segundos del disparo, el proyectil explota rompiéndose en dos fragmentos, uno de los cuales tiene el doble de masa que el otro. El fragmento mayor cae verticalmente y toca el suelo 4 segundos después de la explosión. ¿Por dónde se encontrará el fragmento menor en ese mismo instante?



Solución: En el instante $t_1 = 8$s cuando ocurre la explosión, la posición horizontal del fragmento mayor es:

$$x_1 = v_{0x}t_1 = v_0 \cos\theta t_1 = (100\text{m/s})(\cos 36{,}9°)(8\text{s}) = 640\text{m}$$

Después de la explosión el centro de masa de los dos fragmentos seguirá la trayectoria parabólica que habría seguido el proyectil original si no hubiese estallado. En el instante $t = t_1 + t_2 = 12$s, en que el fragmento mayor toca tierra, las coordenadas del CM son:

$$x_{cm} = v_{0x}t = v_0 t\cos\theta = (100\text{m/s})(12\text{s})\cos 36{,}9° = 960\text{m}$$

$$y_{cm} = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t sen\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{cm} = (100\text{m/s})(12\text{s})(0{,}6) - \frac{1}{2}(9{,}8\text{m/s}^2)(12\text{s})^2 = 14{,}4\text{m}$$

A partir de las expresiones que definen la posición del CM, encontramos las coordenadas respectivas del fragmento menor:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad 960\text{m} = \frac{2m(640) + mx_2}{3m}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 3(960\text{m}) - 2(640\text{m}) = 1600\text{m}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \qquad 14{,}4\text{m} = \frac{2m(0) + my_2}{3m}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = 3(14{,}4\text{m}) = 43{,}2\text{m}$$

Respuesta:

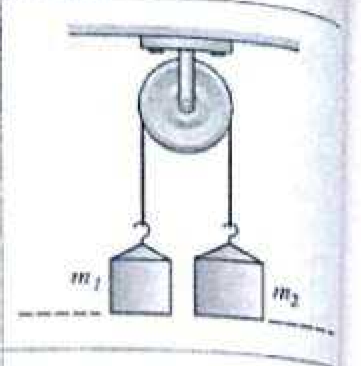
$x_2 = 1600$m
$y_2 = 43{,}2$m

PR-1.26. *CM de dos pesas suspendidas de una polea*

Dos pesas de masas desiguales m_1 y $m_2 > m_1$, están suspendidas de una polea de masa despreciable. Si las pesas se sueltan desde la misma altura:

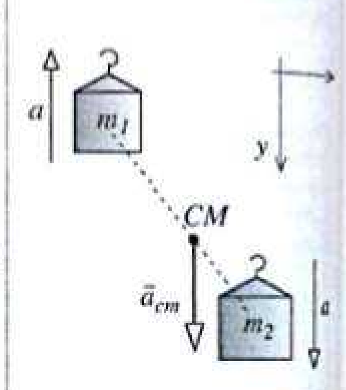
a) ¿En qué dirección se moverá el centro de masa?

b) ¿Cuál será la aceleración del centro de masa?



Solución: a) Cuando se sueltan las dos pesas, por ser la masa m_2 mayor se moverá hacia abajo mientras que la de masa menor m_1 se moverá hacia arriba. Por lo tanto el centro de masa (que siempre estará ubicado mas cerca de m_2) se moverá hacia abajo.

b) Como las pesas están conectadas por una cuerda, sus aceleraciones serán de igual módulo, a, pero tendrán sentidos contrarios. La aceleración del centro de masa del sistema de las dos pesas es:



$$a_{cm} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(-a) + m_2 a}{m_1 + m_2} = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})a$$

Para hallar la aceleración común a, aplicamos la segunda ley de Newton a cada una de las dos pesas, tenemos:

Pesa m_1: $\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$

Pesa m_2: $\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a$

Sumando estas dos ecuaciones se elimina la tensión T y se obtiene:

$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

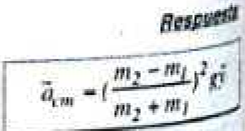
La aceleración de las pesas es:

$$a = (\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1})g$$

Finalmente, reemplazamos la aceleración a en la expresión para a_{cm}:

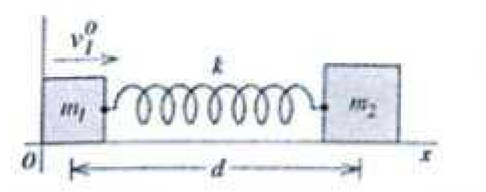
$$a_{cm} = (\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1})^2 g$$

Respuesta



PR-1.26. *Movimiento del CM de un oscilador*

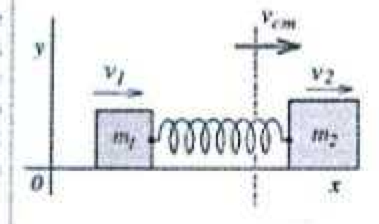
Dos bloques de masas respectivas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg, están conectados mediante un resorte ideal.



Los bloques se encuentran inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, separados por una distancia d = 0,3 m. Si al bloque de masa m_1 se le da una velocidad inicial v_1^0 = 4,5 m/s hacia la derecha, ¿cuál será la posición del centro de masa en función del tiempo?

Solución: El movimiento de cada bloque individual está determinado por la fuerza elástica del resorte. Inicialmente, a medida que el bloque m_1 se mueve hacia la derecha, el resorte se va comprimiendo. Esto origina una fuerza entre los dos bloques que tiende a frenar a m_1 y a acelerar a m_2. Luego el resorte se va expandiendo, tiende a jalar m_1 y a frenar a m_2.

El proceso de compresión y expansión del resorte se repite alternadamente y el movimiento de los bloques individuales ocurre de una manera complicada, ya que oscilan armónicamente a medida que van avanzando hacia la derecha. Por el contrario, el movimiento del centro de masa de todo el sistema es muy simple. La coordenada inicial del centro de masa es:



$$x_{cm}^0 = \frac{m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0}{m_1 + m_2} = \frac{(1\text{kg})(0) + (2\text{kg})(0{,}3\text{m})}{1\text{kg} + 2\text{kg}} = 0{,}2\text{m}$$

La velocidad inicial del centro de masa es:

$$v_{cm}^0 = \frac{m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0}{m_1 + m_2} = \frac{(1\text{kg})(4{,}5\text{m/s}) + (2\text{kg})(0)}{1\text{kg} + 2\text{kg}} = 1{,}5\text{m/s}$$

Como el sistema está aislado, la única fuerza que puede modificar el movimiento de cada bloque es la fuerza elástica del resorte, que es una fuerza interna. Por lo tanto el centro de masa no se acelera y su velocidad mantiene el valor constante, v_1^0. La posición (en metros) del centro de masa en función del tiempo (en segundos) está dada por la expresión:

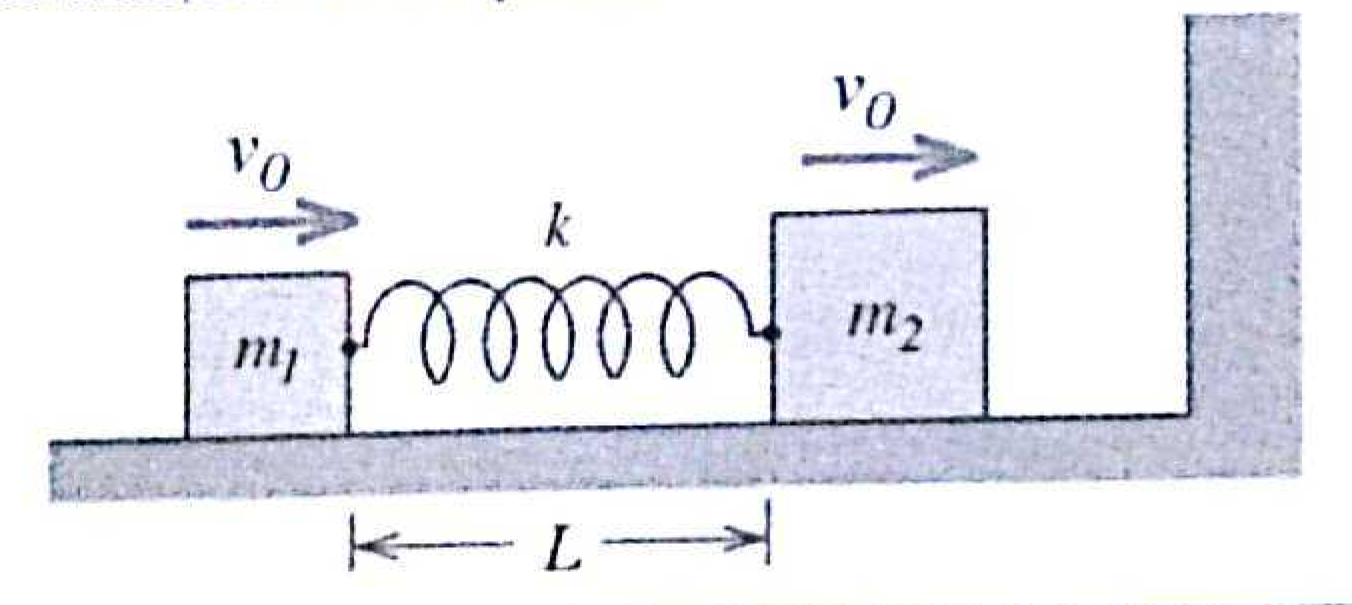
$$x_{cm} = x_{cm}^0 + v_{cm}^0 t = (0{,}2 + 1{,}5t) \text{ m}$$

Respuesta:

$x_{cm} = (0{,}2 + 1{,}5t)$ m/s

PR-1.27. *Colisión de bloques contra una pared*

Dos bloques de masas respectivas m_1 y m_2, están conectados por un resorte ideal de constante elástica k. Los bloques se mueven con igual velocidad v_0 hacia la derecha, sobre una superficie horizontal sin rozamiento.



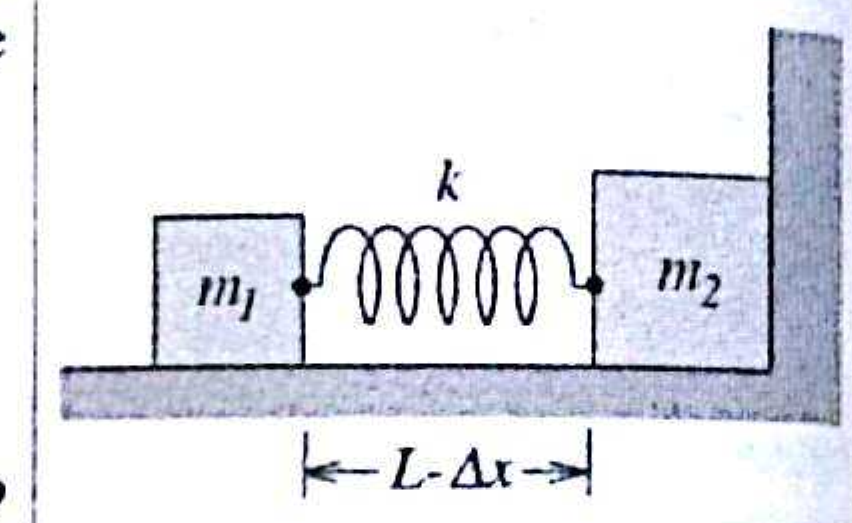
El bloque de masa m_2 choca con una pared vertical y se detiene. Determine:

a) La velocidad del CM del sistema después de la colisión

b) La aceleración del CM del sistema en el instante en que el resorte se ha comprimido en una longitud Δx.

Solución: a) Inmediatamente, después que el bloque m_2 se detiene, el bloque m_1 continúa moviéndose a la velocidad v_0. La velocidad del centro de masa en ese instante es:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_0 + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_0$$



b) El resorte ejerce una fuerza elástica de módulo $F = k\Delta x$ sobre el bloque m_2 y como éste no está acelerado, la pared ejerce una fuerza de igual módulo y de sentido opuesto. Por lo tanto, la fuerza neta externa que se ejerce sobre el sistema tiene un módulo $F = k\Delta x$ y está dirigida hacia la izquierda. La aceleración del centro de masa del sistema en ese instante será:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m_1 + m_2} = \frac{k\Delta x}{m_1 + m_2}(-\hat{x})$$

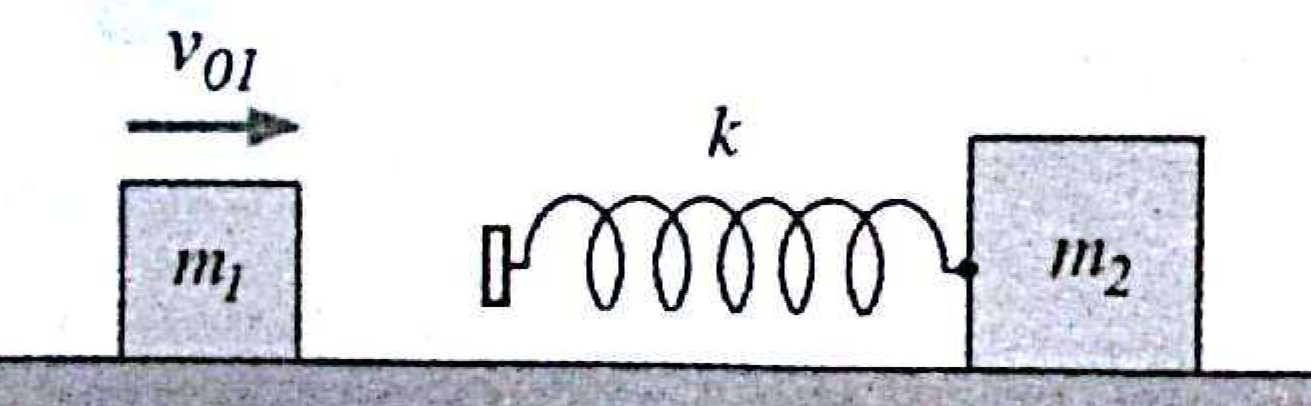
Respuesta:

a) $v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_0$

b) $\vec{a}_{cm} = \frac{k\Delta x}{m_1 + m_2}(-\hat{x})$

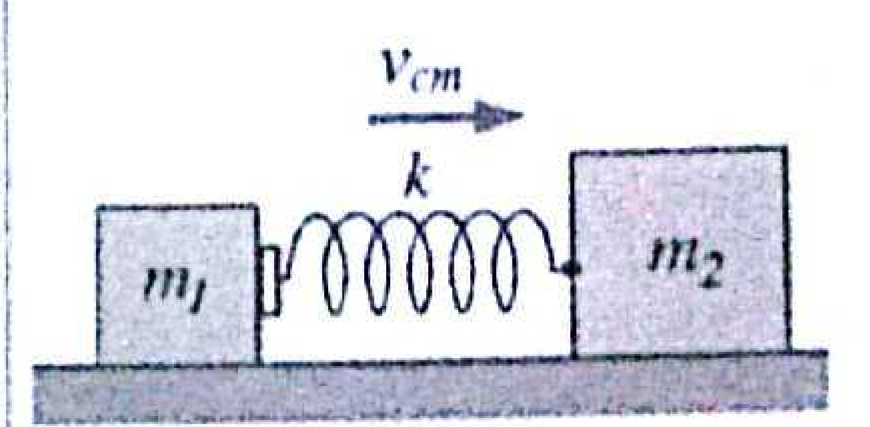
PR-1.28. *¿Cuál es la compresión máxima del resorte?*

Un bloque de masa m_1 = 1 kg se desliza a velocidad v_{01} = 8 m/s, sobre una mesa horizontal sin rozamiento y se dirige hacia otro bloque en reposo de masa m_2 = 3 kg.



En su parte delantera el bloque m_2 tiene fijo un resorte ideal de constante k = 300 N/m, de forma tal que resulte comprimido cuando lo golpee el bloque en movimiento. ¿Cuál será la máxima compresión del resorte?

Solución: Al final de la colisión el resorte se comprimirá al máximo, y los dos bloques alcanzan una velocidad común, que es la del centro de masa:



$$v_1 = v_2 = v_{cm} = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{cm} = \frac{(1\text{kg})(8\text{m/s}) + (3\text{kg})\cdot 0}{1\text{kg} + 3\text{kg}} = 2\text{m/s}$$

En esta colisión la energía mecánica total se conserva:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k x_m^2$$

Despejando x_m y sustituyendo la expresión para la velocidad del centro de masa, obtenemos la distancia máxima que se comprime el resorte:

$$x_m = \sqrt{\frac{m_1 v_{01}^2 - (m_1 + m_2) v_{cm}^2}{k}} = v_{01}\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)}$$

$$x_m = (8\text{m/s})\sqrt{\frac{(1\text{kg})}{300\text{N/m}}\left(1 - \frac{1\text{kg}}{1\text{kg} + 3\text{kg}}\right)} = 0{,}4\text{m}$$

Respuesta:

$x_m = v_{01}\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)}$

x_m = 0,4 m

PR-1.29. *En el marco del CM el momento lineal es nulo*

Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven con velocidades v_1 y v_2 con respecto a un observador estacionario en el marco de referencia del laboratorio.

a) Halle la velocidad de cada partícula con relación al centro de masa.

b) Demuestre que, con relación al CM, las dos partículas tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas, y por lo tanto, la cantidad de movimiento total es nula.

Solución: La velocidad del centro de masa con respecto al marco de referencia del laboratorio es:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Para hallar la velocidad de cada partícula con relación al centro de masa, aplicamos la transformación galileana de velocidades. Para la partícula m_1, tenemos:

$$\vec{v}_1^{cm} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\vec{v}_1^{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12}$$

Análogamente para la partícula m_2:

$$\vec{v}_2^{cm} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\vec{v}_2^{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -(\frac{m_1}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12}$$

Donde $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ es la velocidad relativa de la partícula m_1 con respecto a m_2. Es decir, en el marco de referencia del centro de masa, las dos partículas se mueven en sentidos opuestos con velocidades inversamente proporcionales a sus masas.

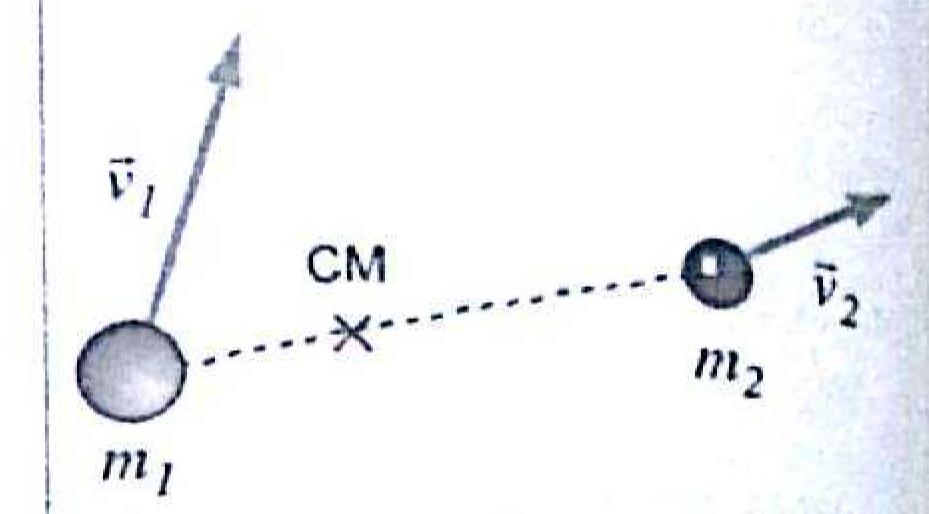
b) La cantidad de movimiento de cada partícula es:

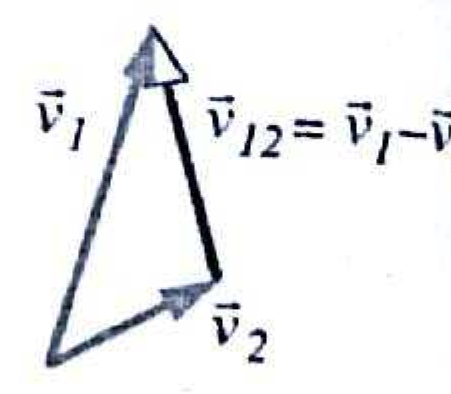
$$\vec{p}_1^{cm} = m_1\vec{v}_1^{cm} = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12}$$

$$\vec{p}_2^{cm} = m_2\vec{v}_2^{cm} = -(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12} = -\vec{p}_1^{cm}$$

Queda demostrado que, en el marco de referencia del centro de masa, las dos partículas tienen cantidades de movimiento iguales pero opuestos. En este marco de referencia la cantidad de movimiento total será nula:

$$\vec{p}_{total}^{cm} = \vec{p}_1^{cm} + \vec{p}_2^{cm} = 0$$





Marco LAB

Respuesta:

a) $\vec{v}_1^{cm} = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12}$

$\vec{v}_2^{cm} = -(\frac{m_1}{m_1 + m_2})\vec{v}_{12}$

Donde $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

b) $\vec{p}_2^{cm} = -\vec{p}_1^{cm}$, $\vec{p}_{total}^{cm} = 0$

PR-1.30. *La energía en distintos marcos de referencia*

Un protón de masa m lleva una velocidad u y se dirige hacia el núcleo de un deuterón (masa $2m$) que está en reposo. Determine la energía cinética del sistema:

(a) En el marco de referencia del laboratorio (LAB)

(b) En el marco de referencia del centro de masa (CM)

(c) ¿Cómo se comparan estas dos energías?

Solución: (a) En el marco de referencia de laboratorio, la energía cinética total del sistema es:

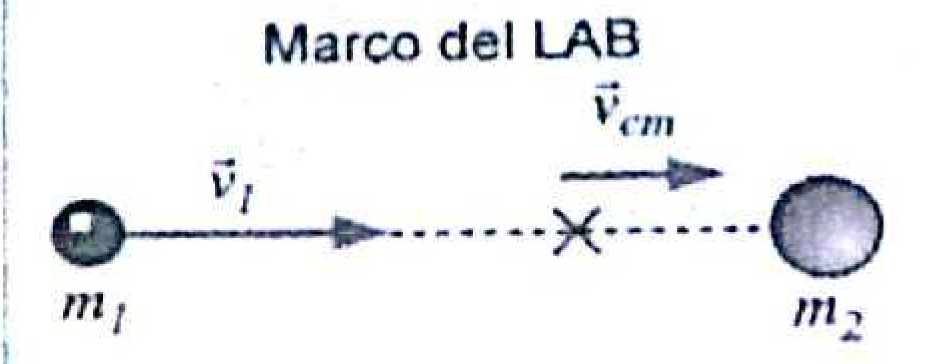
$$K_{LAB} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mu^2$$

La velocidad del centro de masa es:

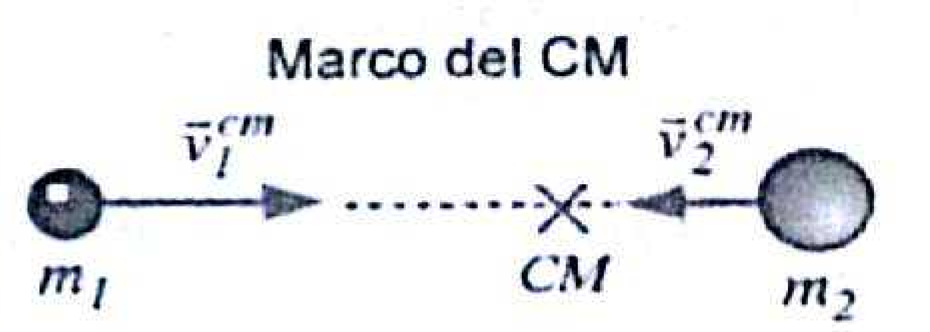
$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{mu + 2m \cdot 0}{m + 2m} = \frac{1}{3}u$$

y la energía cinética del centro de masa del sistema es:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 = \frac{1}{2}(3m)(\frac{u}{3})^2 = \frac{1}{6}mu^2$$



(2) En el marco de referencia del centro de masa, el CM está fijo y las partículas se acercan a este punto con las siguientes velocidades respectivas:



$$v_1^{cm} = v_1 - v_{cm} = u - \frac{1}{3}u = \frac{2}{3}u$$

$$v_2^{cm} = v_2 - v_{cm} = 0 - \frac{1}{3}u = -\frac{1}{3}u$$

La energía cinética total del sistema de las dos partículas en el marco CM es:

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m_1(v_1^{cm})^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^{cm})^2 =$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m(\frac{2}{3}u)^2 + \frac{1}{2}2m(-\frac{1}{3}u)^2 = \frac{1}{3}mu^2$$

c) Se verifica así que, en el marco de referencia del laboratorio (LAB), la energía cinética total del sistema es la suma de la energía cinética del centro de masa (CM) más la energía cinética de las partículas respecto al CM.

$$K_{LAB} = \frac{1}{2}m_{total}v_{cm}^2 + K_{CM}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{6}mu^2 + \frac{1}{3}mu^2$$

Respuesta:

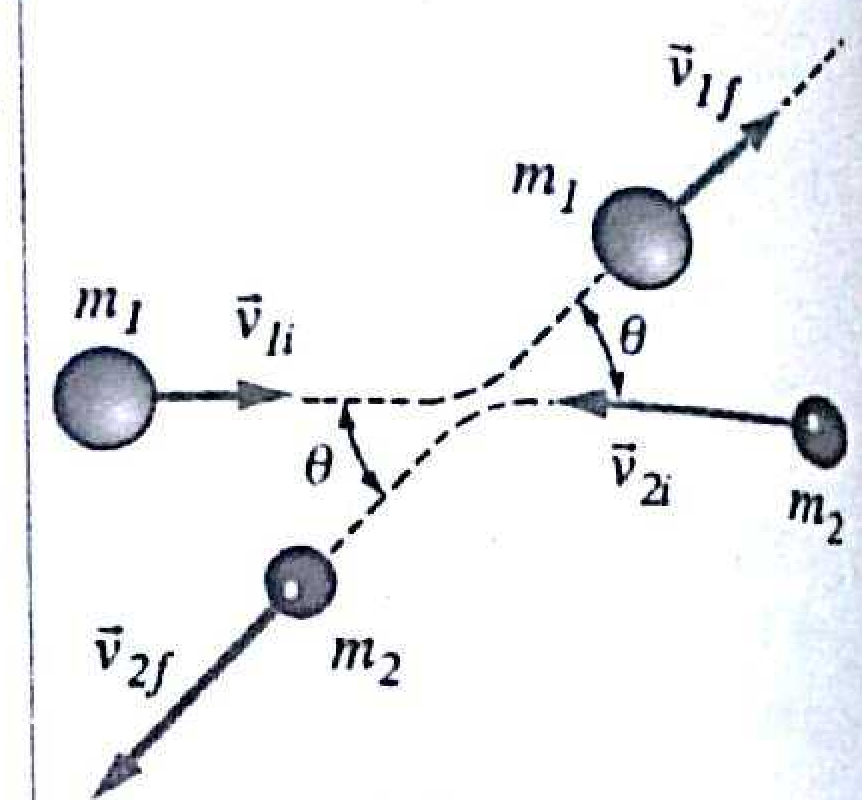
$K_{LAB} = \frac{1}{2}m_{total}v_{cm}^2 + K_{CM}$

PR-1.31. *Una colisión elástica en 2D vista desde el CM*

Demuestre que en una colisión elástica, en el marco de referencia del centro de masa, la magnitud de la cantidad de movimiento lineal de cada partícula no cambia.

Solución: Hemos demostrado que en el marco de referencia del centro de masa la cantidad de movimiento total es cero, de modo que ambas partículas tienen cantidades de movimiento iguales y opuestos, tanto antes como después del choque:

$$|\vec{p}_{1i}| = |\vec{p}_{2i}| = p_i \qquad |\vec{p}_{1f}| = |\vec{p}_{2f}| = p_f$$



Choque elástico en el marco de referencia del centro de masa

La energía cinética total, antes y después de la colisión es la suma:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_i^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} = \frac{p_f^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Como la colisión es elástica, la energía cinética total del sistema permanece constante. Igualando las dos expresiones anteriores:

$$K_f = K_i \quad \Rightarrow \quad p_f = p_i$$

Hemos demostrado que, en una colisión elástica, cuando es analizada desde el marco de referencia del centro de masa, la magnitud de la cantidad de movimiento de cada partícula no cambia.

Respuesta:

$$p_f = p_i$$

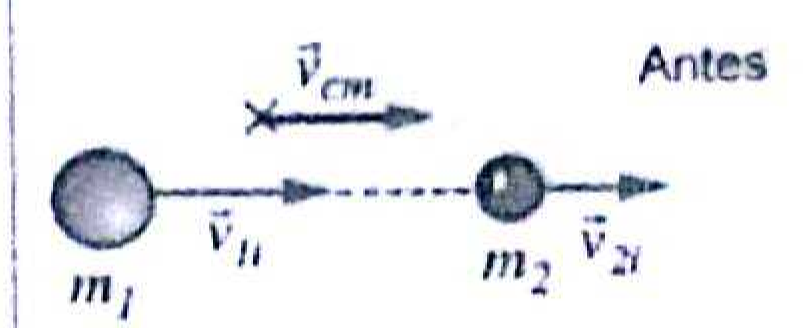
PR-1.32. *Colisión elástica en 1D vista desde el CM*

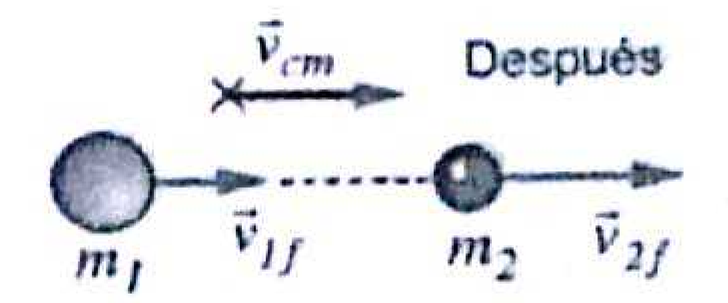
Una partícula de masa $m_1 = 2$ kg moviéndose a velocidad $v_1 = 15$ m/s choca elásticamente con otra partícula de masa $m_2 = 1$ kg que se mueve en la misma dirección con una velocidad $v_2 = 9$ m/s. Determine las velocidades de las dos partículas después del choque, analizando la colisión en el marco de referencia del centro de masa.

Solución: En el marco de referencia del laboratorio la velocidad del centro de masa del sistema es:

$$v_{cm} = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(2\text{kg})15\text{m/s} + (1\text{kg})9\text{m/s}}{2\text{kg} + 1\text{kg}} = 13\text{m/s}$$

Marco de referencia del LAB





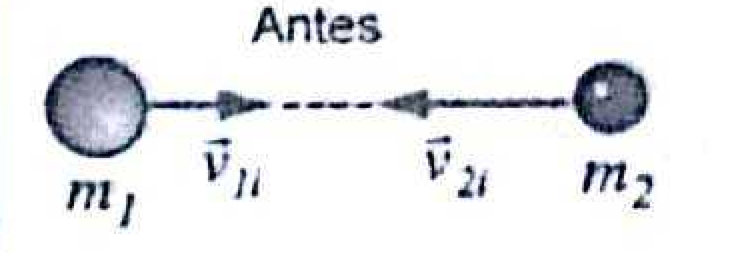
Aplicando la transformación galileana, hallamos las velocidades iniciales de las partículas en el marco de referencia del centro de masa:

$$v_{1i}^{cm} = v_{1i} - v_{cm} = 15\text{m/s} - 13\text{m/s} = +2\text{m/s}$$

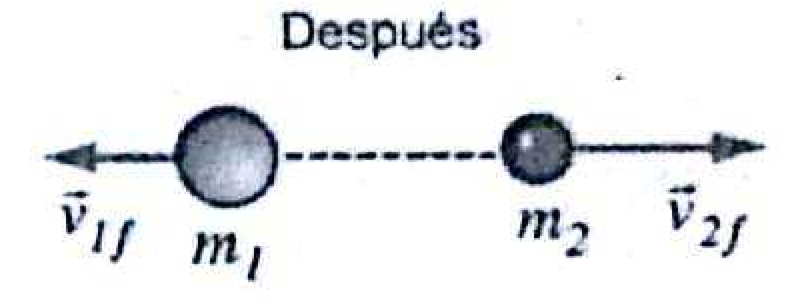
$$v_{2i}^{cm} = v_{2i} - v_{cm} = 9\text{m/s} - 13\text{m/s} = -4\text{m/s}$$

Según el problema anterior, en un choque perfectamente elástico cada partícula sale con una cantidad de movimiento igual y opuesta a la que tenía antes del choque. Puesto que la velocidad es igual a la cantidad de movimiento dividida por la masa, implica también que cada partícula sale con una velocidad de igual módulo pero con sentido invertido.

Marco de referencia del CM



$$v_{1f}^{cm} = -v_{1i}^{cm} = -2\text{m/s} \qquad v_{2f}^{cm} = -v_{2i}^{cm} = +4\text{m/s}$$



En el marco de referencia original del laboratorio, se calculan las velocidades de las partículas, simplemente sumando v_{cm}:

$$v_{1f} = v_{1f}^{cm} + v_{cm} = -2\text{m/s} + 13\text{m/s} = +11\text{ m/s}$$

$$v_{2f} = v_{2f}^{cm} + v_{cm} = 4\text{m/s} + 13\text{m/s} = +17\text{ m/s}$$

Vemos que el análisis de un choque unidimensional perfectamente elástico resulta muy sencillo si usamos primero el marco de referencia del centro de masa, en el cual cada cuerpo simplemente invierte su sentido y sale con la misma velocidad que tenía antes. Luego regresamos al marco de referencia original.

Respuesta:

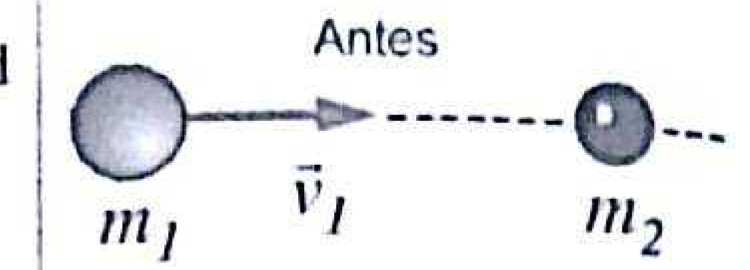
Marco del centro de masa: $v_{1f}^{cm} = -2\text{m/s}$, $v_{2f}^{cm} = +4\text{m/s}$
Marco del Laboratorio: $v_{1f} = +11$ m/s, $v_{2f} = +17$ m/s

PR-1.33. *Colisión inelástica 1D vista desde el CM*

Una partícula de masa m_1 moviéndose con velocidad v_1 choca contra otra partícula de masa m_2 que se encuentra en reposo. El choque es frontal y perfectamente inelástico. Describa la colisión en el marco de referencia del centro de masa.

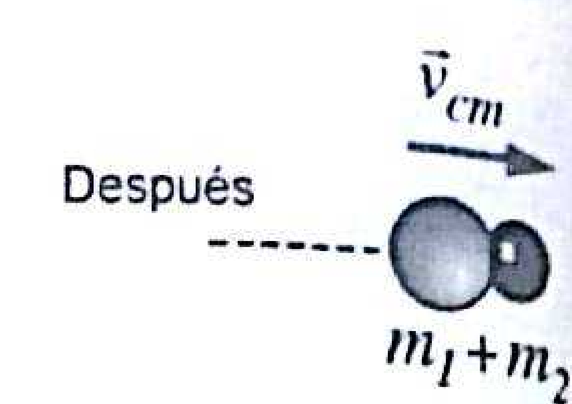
Solución: La velocidad del centro de masa en el marco de referencia del laboratorio es:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$



En el marco de referencia del centro de masa, la velocidad inicial de la partícula m_1 es:

$$v_1^{cm} = v_1 - v_{cm} = v_1 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1$$



Mientras que la velocidad inicial de la partícula m_2 es:

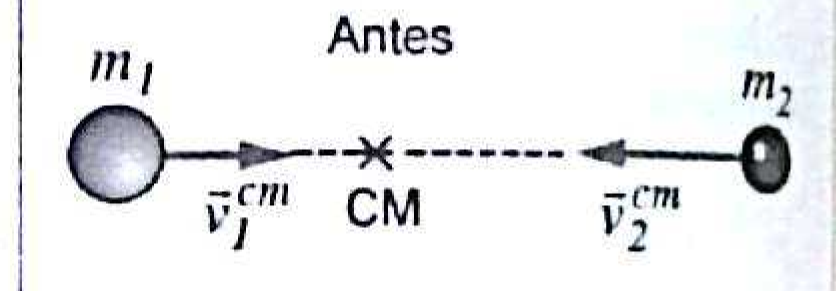
$$v_2^{cm} = 0 - v_{cm} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

La cantidad de movimiento total del sistema es:

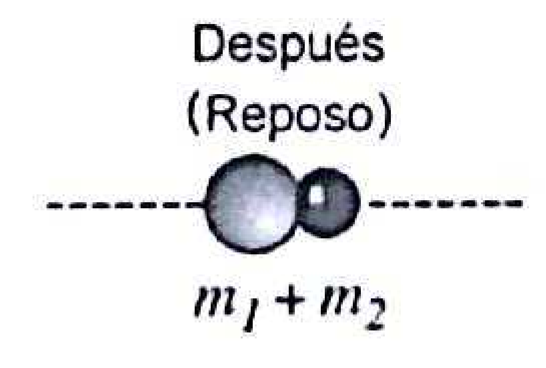
$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1^{cm} + m_2 \vec{v}_2^{cm}$$

$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\left(\frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}\right) + m_2\left(\frac{-m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right) = 0$$

Después de la colisión las dos partículas quedan unidas. La partícula resultante de masa $(m_1 + m_2)$ queda en reposo respecto al centro de masa y por lo tanto sin cantidad de movimiento.



En los choques perfectamente inelásticos, la partícula resultante queda sin energía cinética en el marco del centro de masa y toda la energía cinética inicial se transforma en energía interna. A diferencia de lo que sucede en el marco de referencia del laboratorio, donde las partículas salen juntas después del choque a la velocidad del centro de masa, reteniendo parte de su energía cinética inicial.



PR-1.34. ***La conservación de la energía: un invariante***

Dos bloques $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 1$ kg se aproximan sobre una superficie sin fricción, con velocidades $v_1 = +3$m/s y $v_2 = -2$ m/s. El choque es perfectamente elástico. Calcule la energía cinética inicial y final del sistema:

a) En el marco de referencia del laboratorio.

b) En el marco de referencia del centro de masa.

c) Verifique que, aunque la energía cinética total es diferente en los dos marcos de referencia, se cumple en ambos el principio de conservación de la energía.

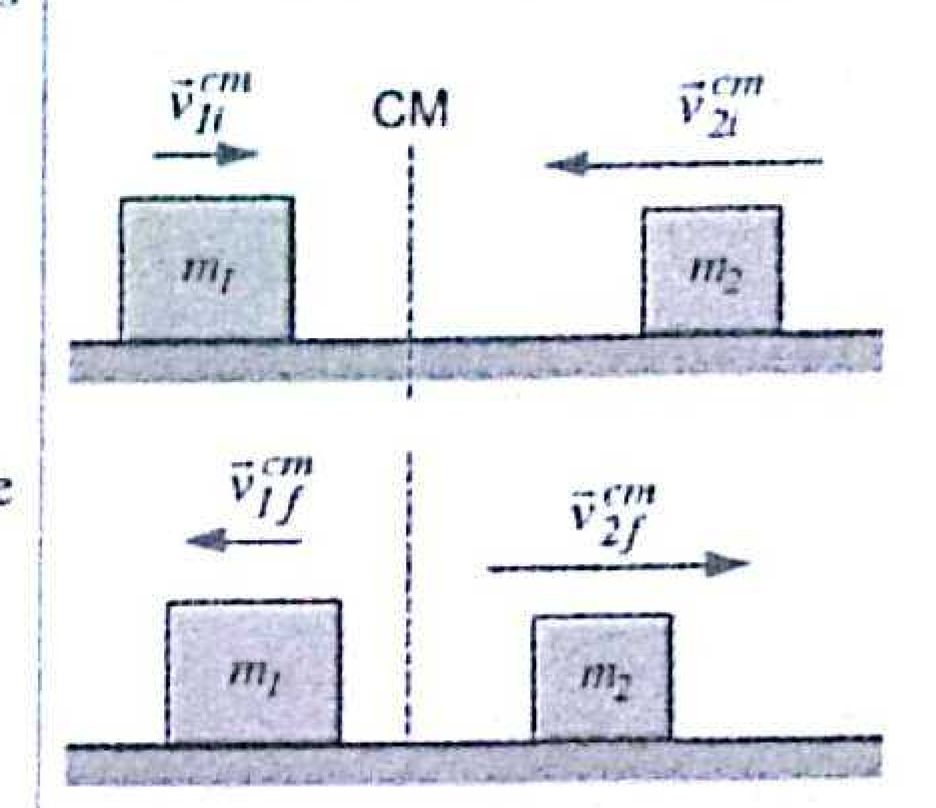
Solución: (a) La velocidad del centro de masa es:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4\text{kg})(3\text{m/s}) + (1\text{kg})(-2\text{m/s})}{4\text{kg} + 1\text{kg}} = +2\text{m/s}$$

En el marco de referencia del centro de masa, las velocidades iniciales de los bloques son:

$$v_{1i}^{cm} = v_1 - v_{cm} = 3\text{m/s} - 2\text{m/s} = +1\text{m/s}$$

$$v_{2i}^{cm} = v_2 - v_{cm} = -2\text{m/s} - 2\text{m/s} = -4\text{m/s}$$



En el marco de referencia del CM, después del choque perfectamente elástico, las velocidades se invierten:

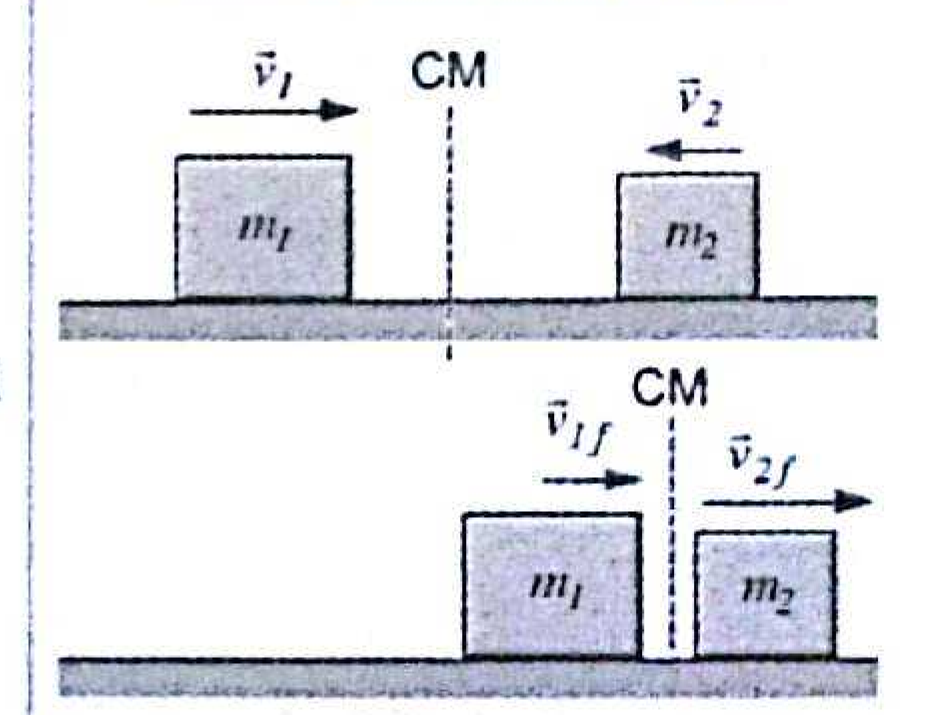
$$v_{1f}^{cm} = -v_{1i}^{cm} = -1\text{m/s}$$

$$v_{2f}^{cm} = -v_{2i}^{cm} = +4\text{m/s}$$

Volviendo al marco de referencia original del LAB, se calculan las velocidades de las partículas simplemente sumando v_{cm}:

$$v_{1f} = v_{1f}^{cm} + v_{cm} = -1\text{m/s} + 2\text{m/s} = +1\text{m/s}$$

$$v_{2f} = v_{2f}^{cm} + v_{cm} = +4\text{m/s} + 2\text{m/s} = +6\text{m/s}$$



a) Las energías cinéticas totales, antes y después del choque, en el marco de referencia del LAB son:

$$K_i^{LAB} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$K_i^{LAB} = \frac{1}{2}(4\text{kg})(3\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})(2\text{m/s})^2 = 20\text{J}$$

$$K_f^{LAB} = \frac{1}{2}(4\text{kg})(1\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})(6\text{m/s})^2 = 20\text{J}$$

b) Las energías cinéticas totales, antes y después del choque, en el marco de referencia del CM son:

$$K_i^{CM} = \frac{1}{2}(4\text{kg})(1\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})(-4\text{m/s})^2 = 10\text{J}$$

$$K_f^{CM} = \frac{1}{2}(4\text{kg})(-1\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})(+4\text{m/s})^2 = 10\text{J}$$

c) Se verifica que, aunque la energía cinética total es diferente en los dos marcos de referencia, se garantiza el principio de conservación de la energía en cada uno de éstos. La diferencia en energía cinética es justamente, la energía cinética del centro de masa:

$$K^{LAB} - K^{CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 = \frac{1}{2}(4+1)\text{kg}(2\text{m/s})^2 = 10\text{J}$$

Respuesta:

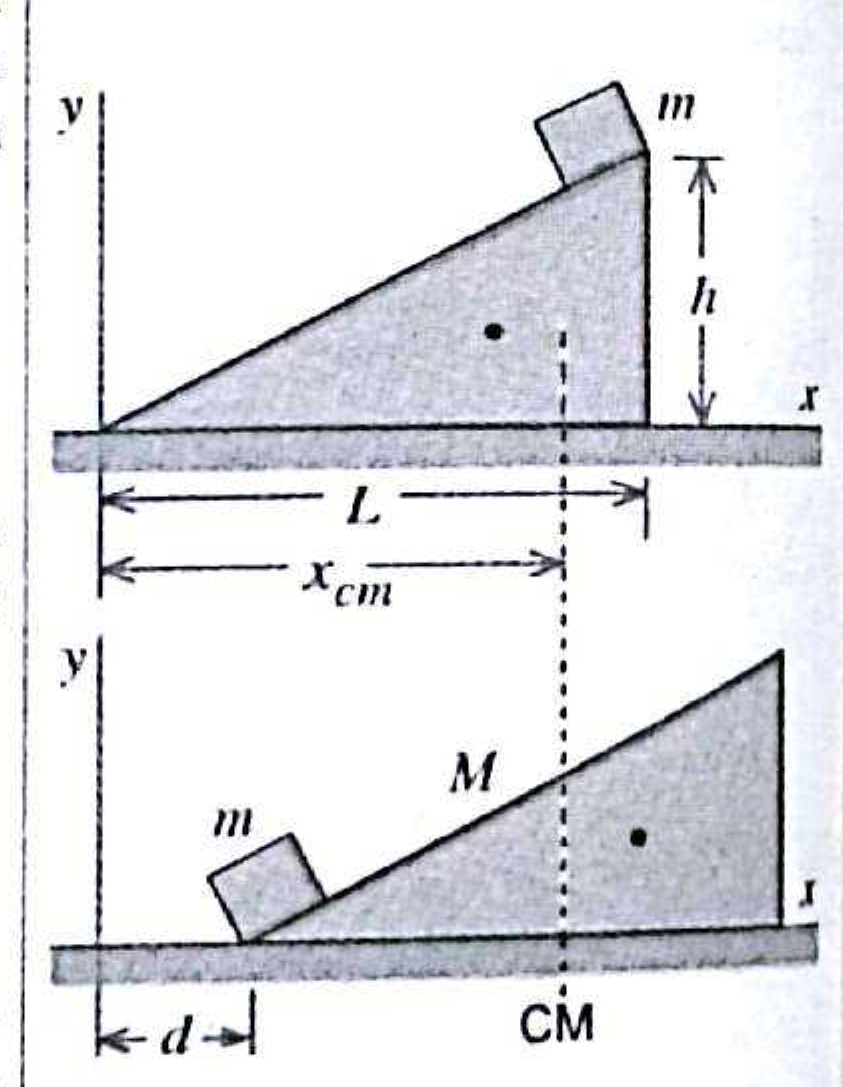
a) $K_f^{LAB} = K_i^{LAB} = 20\text{J}$
b) $K_f^{CM} = K_i^{CM} = 10\text{J}$
c) $\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 = 10\text{J}$

PR-1.35. *Al soltar el bloque, la cuña se desplaza*

Un pequeño bloque de masa m = 1 kg se coloca sobre la parte superior de una cuña de masa M = 4 kg, de altura h = 1 m y longitud de base L = 5 m. La cuña descansa sobre una superficie horizontal lisa. Si el bloque se suelta desde el reposo, ¿qué distancia d se moverá la cuña cuando el bloque alcanza la parte inferior.

Solución: Para la cuña de forma triangular, la coordenada x de su centro de masa está ubicada a una distancia $2L/3$ desde el vértice. Inicialmente, la coordenada del centro de masa del sistema es:

$$x_{cm}(inicial) = \frac{m \cdot L + M \cdot 2L/3}{m + M}$$



Al descender el bloque, la cuña se desplaza una distancia d hacia la derecha. La nueva expresión para el centro de masa del sistema es:

$$x_{cm}(final) = \frac{m \cdot d + M(d + 2L/3)}{m + M}$$

Como no actúan fuerzas horizontales externas, la coordenada x del centro de masa del sistema cuña-bloque no debe moverse:

$$x_{cm}(final) = x_{cm}(inicial)$$

$$mL + M(\frac{2}{3}L) = md + M(d + \frac{2}{3}L)$$

Despejando, encontramos el desplazamiento d de la cuña:

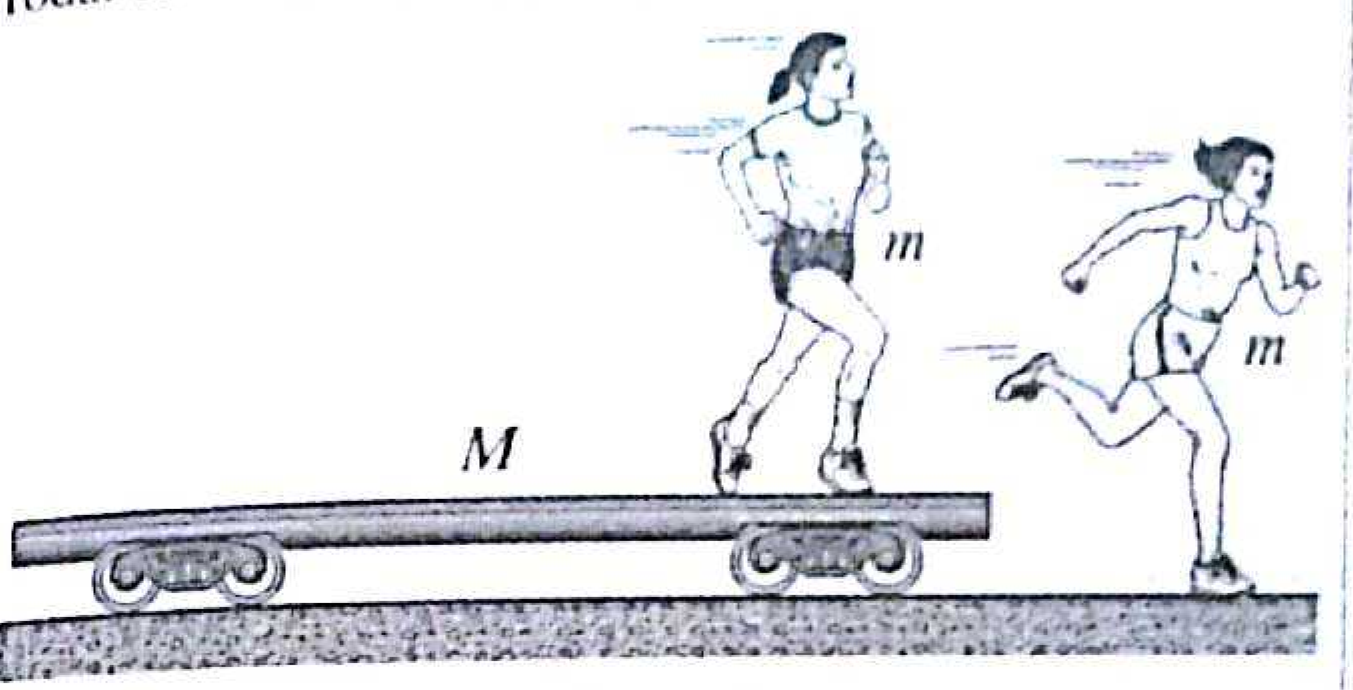
$$d = (\frac{m}{m+M})L = \frac{1\text{kg}}{1\text{kg} + 4\text{kg}}(5\text{m}) = 1\text{m}$$

Respuesta:

$$d = (\frac{m}{m+M})L = 1\text{m}$$

PR-1.36. *No da lo mismo saltar una que las dos a la vez*

Dos alumnas de igual masa, m = 50 kg, están sobre una plataforma en reposo de masa M = 500 kg, que puede rodar sin fricción sobre una vía horizontal recta.



Las alumnas empiezan a correr a hacia la derecha con una velocidad v_r = 8 m/s (respecto a la plataforma) y saltan al llegar al extremo. Calcular la velocidad final de la plataforma en los dos casos siguientes:
a) Las dos alumnas saltan a la vez.
b) Primero salta una y después salta la otra.

Solución: Si v_2 es la velocidad final de la plataforma en el marco de referencia del suelo, la velocidad de salto de una alumna con respecto al suelo es igual a su velocidad respecto a la plataforma mas la velocidad de la plataforma ($v_1 = v_r + v_2$).

a) Cuando las dos alumnas saltan a la vez, al no haber fuerzas de rozamiento, justo después del salto, la velocidad del centro de masa del sistema se mantiene constante e igual al valor inicial nulo

$$v_{cm} = \frac{(2m)v_1 + Mv_2}{2m + M} = \frac{(2m)(v_r + v_2) + Mv_2}{2m + M} = 0$$

$$2mv_r + (2m + M)v_2 = 0$$

$$v_2 = -\frac{2m}{2m + M}v_r = -\frac{2\text{x}50\text{kg})}{2\text{x}50\text{kg} + 500\text{kg}}(8\text{m/s}) = -1.33\text{m/s}$$

El signo menos indica que la velocidad v_2 de la plataforma es hacia la izquierda (en sentido contrario al salto de las alumnas).

b) Supongamos que una alumna salta primero y calculemos la velocidad v_2' con que queda la plataforma justo después del salto. De nuevo la velocidad del CM sigue con su valor inicial nulo:

$$v_{cm} = \frac{mv_1 + (M + m)v_2'}{2m + M} = \frac{m(v_r + v_2) + (M + m)v_2'}{2m + M} = 0$$

$$v_2' = -\frac{m}{2m+M}v_r = -\frac{50\text{kg}}{2\text{x}50\text{kg}+500\text{kg}}(8\text{m/s}) = -0{,}666\text{m/s}$$

Para el segundo salto, el sistema plataforma-segunda alumna tiene una velocidad de centro de masa no nulo, la cual se mantiene. Por lo tanto:

$$v_{cm}' = \frac{mv_1 + Mv_2''}{m+M} = \frac{m(v_r + v_2'') + Mv_2''}{m+M} = -0{,}666\text{m/s}$$

Despejando, encontramos la velocidad final de retroceso de la plataforma después de los dos saltos:

$$v_2'' = \frac{-mv_r - (m+M)(0{,}666\text{m/s})}{m+M}$$

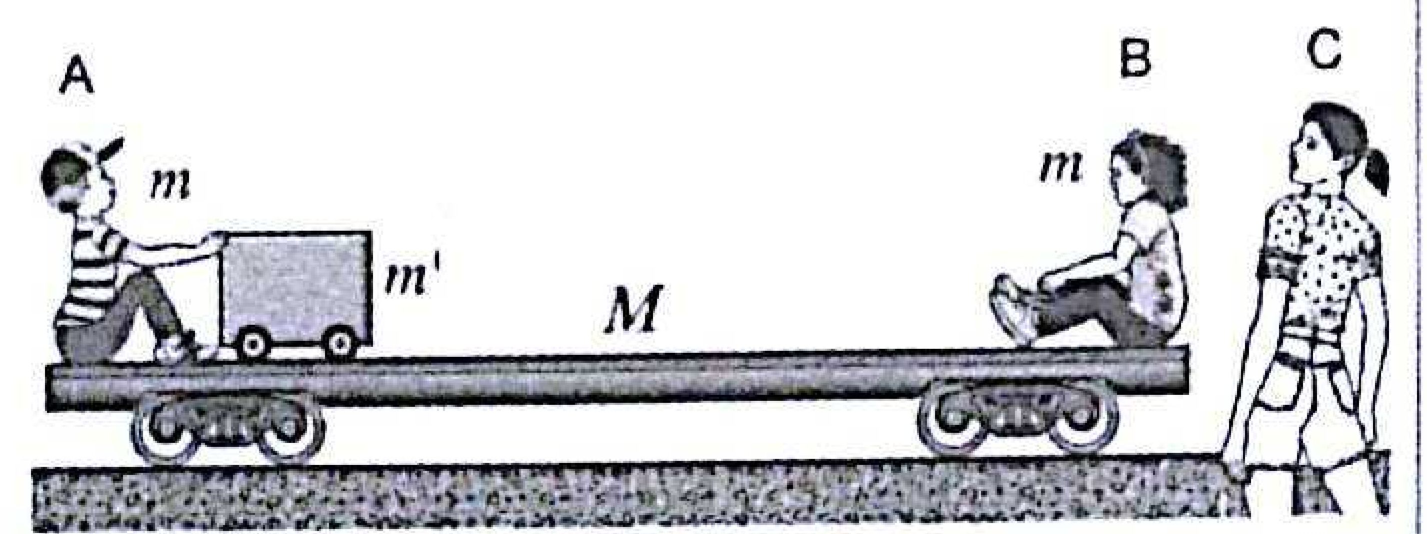
$$v_2'' = \frac{-(50\text{kg})(8\text{m/s}) - (550\text{kg})(0{,}666\text{m/s})}{50\text{kg}+500\text{kg}} = -1{,}393 \text{ m/s}$$

Respuesta:

a) $v_2 = -1.33$ m/s
b) $v_2'' = -1{,}39$ m/s

PR-1.37. *Jugando sobre un vagón*

En la figura se muestra dos niños A y B, de igual masa $m = 32{,}5$ kg que están sentados en los extremos de un vagón en reposo de longitud $L = 6$ m y masa $M = 15$ kg, el cual puede rodar sin fricción sobre una vía horizontal recta.



El niño A da un empujón a un carrito de masa $m' = 1{,}5$ kg, que rueda sin fricción hacia B con velocidad $v_r = 6$ m/s en relación al vagón. Determine:

a) La velocidad del vagón respecto a la observadora C que está en el suelo.
b) La velocidad del vagón después que la niña atrapa el carrito.
c) La distancia que se ha desplazado el vagón.

Solución: a) La velocidad del carrito con relación al suelo es igual a su velocidad relativa al vagón mas la velocidad del vagón respecto al suelo, $(v_r + v_v)$. El momento lineal total del sistema conserva su valor inicial nulo:

$$\sum p_x = 0 = (2m+M)v_v + m'(v_r + v_v)$$

La velocidad del vagón es:

$$v_v = -\frac{m'v_v}{2m+M+m'} = -\frac{(1{,}5\text{kg})(6\text{m/s})}{2(32{,}5\text{kg})+15\text{kg}+1{,}5\text{kg}} = -0{,}11\text{m/s}$$

b) Cuando el carrito es atrapado por la niña B, la cantidad de movimiento total del sistema sigue siendo nula:

$$\sum p_x = 0 = (2m+M+m')v_v' \quad \Rightarrow \quad v_v' = 0$$

c) Como el carrito viaja con velocidad v_r con respecto al vagón, el tiempo de viaje es:

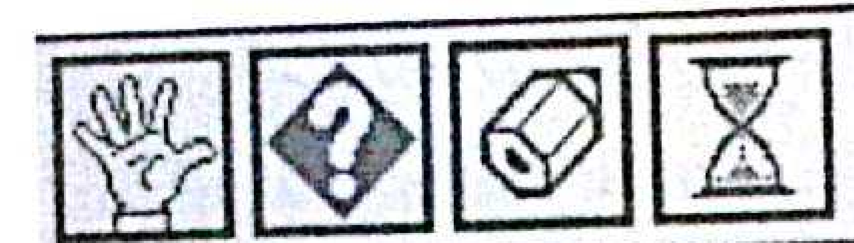
$$\Delta t = \frac{L}{v_r} = \frac{6\text{m}}{6\text{m/s}} = 1{,}0\text{s}$$

Durante ese tiempo, el vagón se ha desplazado hacia la izquierda una distancia:

$$\Delta x_v = v_v \Delta t = (-0{,}11\text{m/s})(1{,}0\text{s}) = -0{,}11\text{m}$$

Respuesta:

a) $v_v = -0{,}11$m/s
b) $v_v' = 0$
c) $\Delta x_v = -0{,}11$m



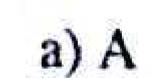
VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. ***El centro de masa de un objeto....***

a) Es un punto equidistante de todas sus partículas.
b) Siempre queda en un punto medio del objeto.
c) Está en su partícula mas masiva.
d) Siempre queda dentro del cuerpo del objeto.
e) Puede ser determinado dividiendo el objeto en varias partes, y, tratando cada parte como una partícula ubicada en su propio centro de masa.

PE-1.02. ***Es incorrecto decir que....***

a) El momento lineal total de un sistema es igual al producto de la masa total por la velocidad del CM.
b) Las fuerzas internas no afectan el movimiento del CM.
c) Si la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es nula, el centro de masa no puede moverse.
d) El CM de un sistema aislado tiene velocidad constante.
e) En un marco de referencia del CM, el momento lineal total de un sistema de partículas es nulo.



PE-1.03. ***¿Dónde queda el CM de la escuadra?***

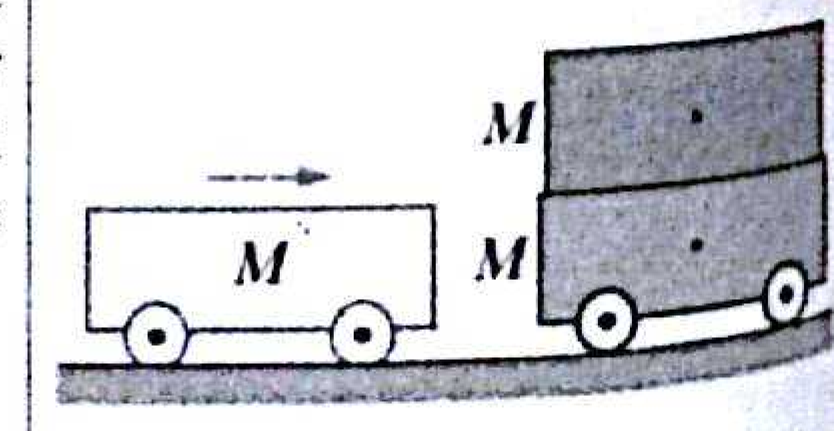
Considere una escuadra metálica de carpintero con masa uniforme, como se muestra en la figura. Sin realizar ningún cálculo, determine en cuál de los puntos indicados quedará mas probablemente ubicado su centro de masa:

a) A b) B c) C d) D e) E

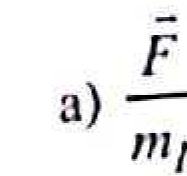


PE-1.04. ***Dejando caer un ladrillo sobre carrito móvil***

Un carrito de masa M se traslada por una superficie horizontal sin fricción con una velocidad v_0. Se deja caer un ladrillo de igual masa, M, cuál será la velocidad horizontal del centro de masa del sistema inmediatamente después del choque?

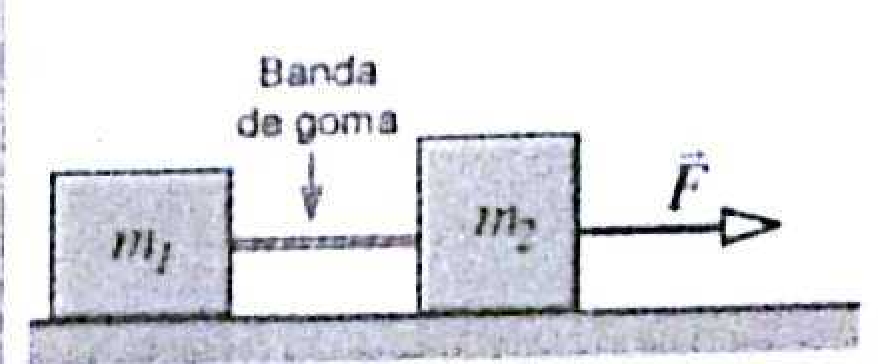


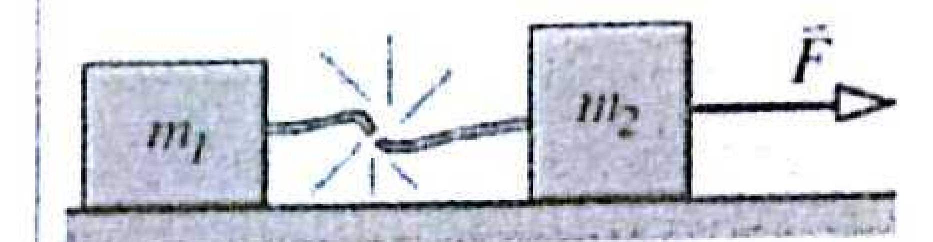
a) cero b) $v_0/4$ c) $v_0/3$ d) $2v_0/3$ e) $v_0/2$



PE-1.05. ***¿Qué sucede si se rompe la banda de goma?***

Un sistema constituido por dos bloques de masas m_1 y m_2 respectivamente, están unidos mediante una banda de goma, sobre un plano horizontal sin fricción. Si se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre m_2, todo el sistema comienza a moverse hasta que, de repente se rompe la banda de goma. ¿Cuál será la aceleración del centro de masas del sistema?

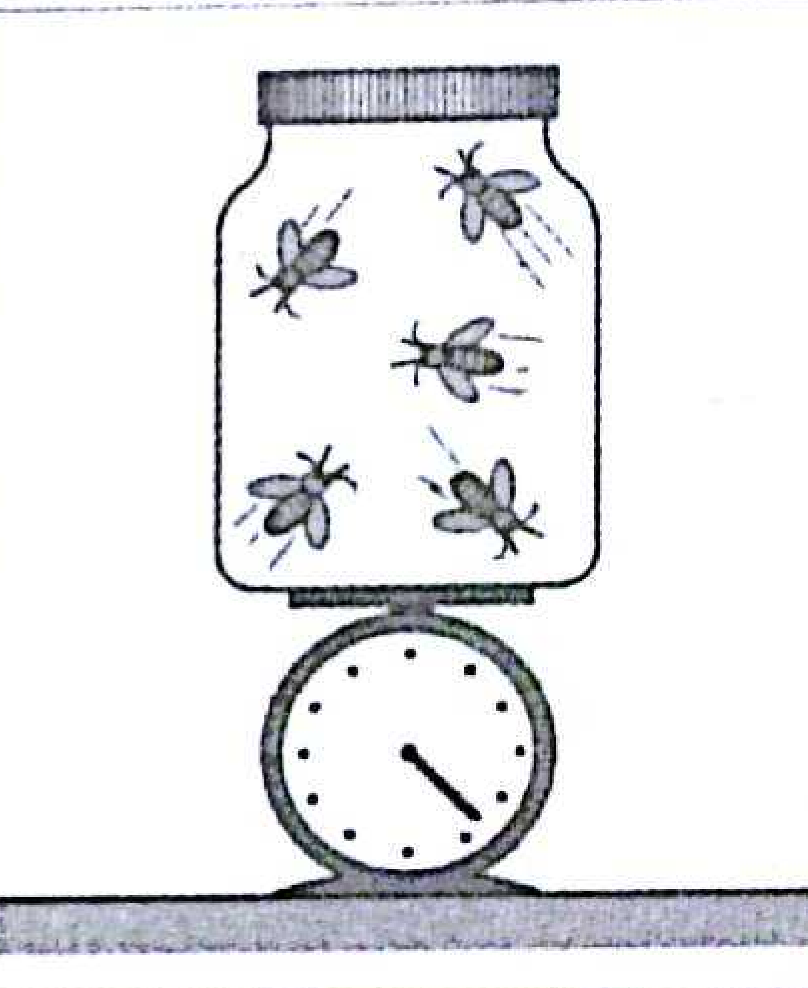




a) $\dfrac{\vec{F}}{m_1}$ b) $\dfrac{\vec{F}}{m_2}$ c) $\dfrac{\vec{F}}{m_1 + m_2}$ d) $\dfrac{\vec{F}}{m_1 - m_2}$

PE-1.06. ***Las moscas en el frasco no se dejan pesar***

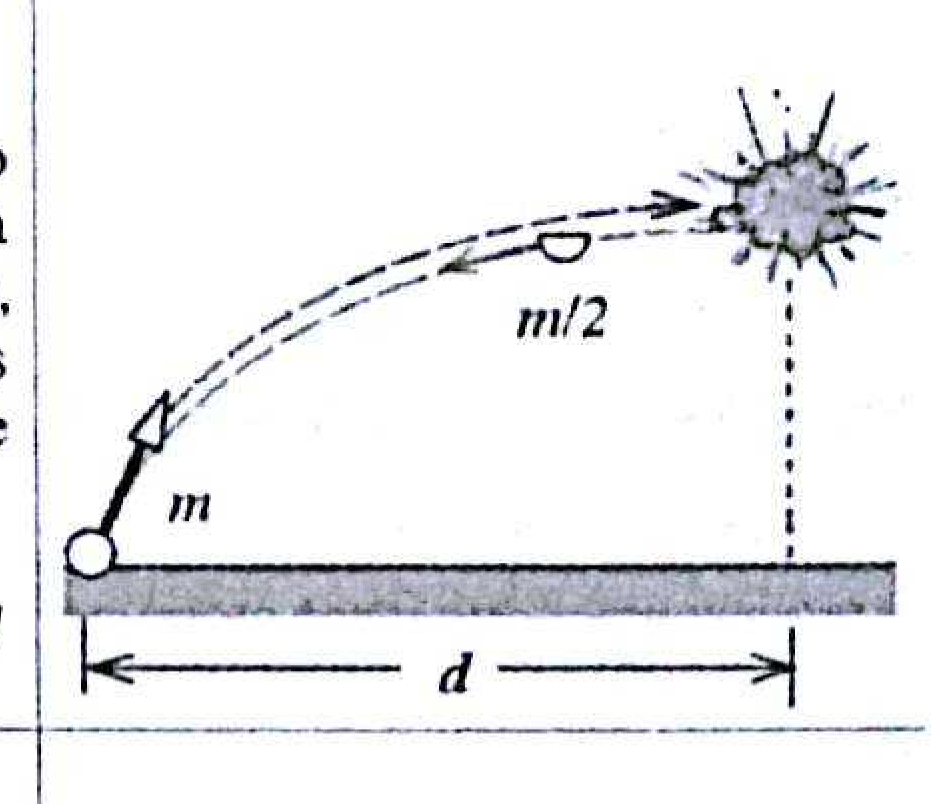
Para determinar el peso de unas moscas, primero se pesa el frasco vacío y después se introducen las moscas dentro del frasco, se cierra herméticamente con la tapa y se pesa nuevamente. ¿ En cuál de los siguientes casos será mayor la lectura de la balanza?



a) Si las moscas están quietas en el fondo del frasco.
b) Si las moscas están volando.
c) La lectura será igual en ambos casos.

PE-1.07. ***¿Dónde cayó el otro pedazo del proyectil?***

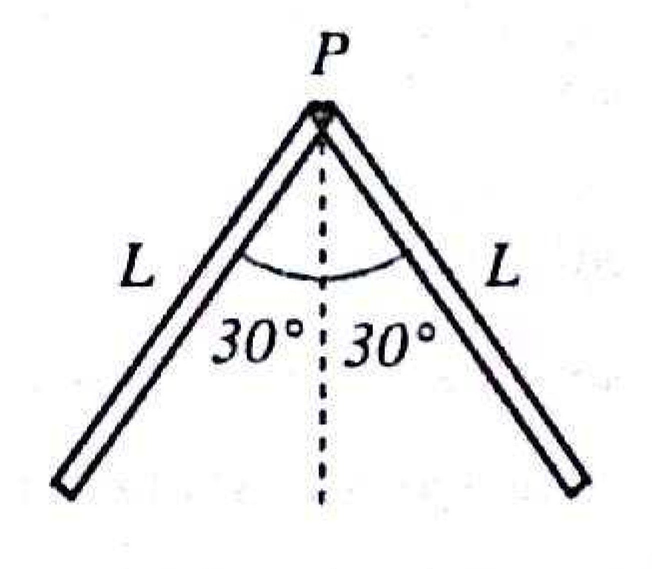
Un proyectil es lanzado al aire a cierta velocidad. Cuando el proyectil va por la parte superior de su trayectoria parabólica (a una distancia horizontal del cañón $x = d$), estalla en dos fragmentos de igual masa. Uno de los fragmentos se devuelve por la trayectoria original y cae en el sitio del cañón. ¿Dónde caerá el otro fragmento?



a) $x = 0$, b) $x = d/2$, c) $x = d$, d) $x = 2d$, e) $x = 4d$

PE-1.08. ***¿Donde queda el CM de esta doble barra?***

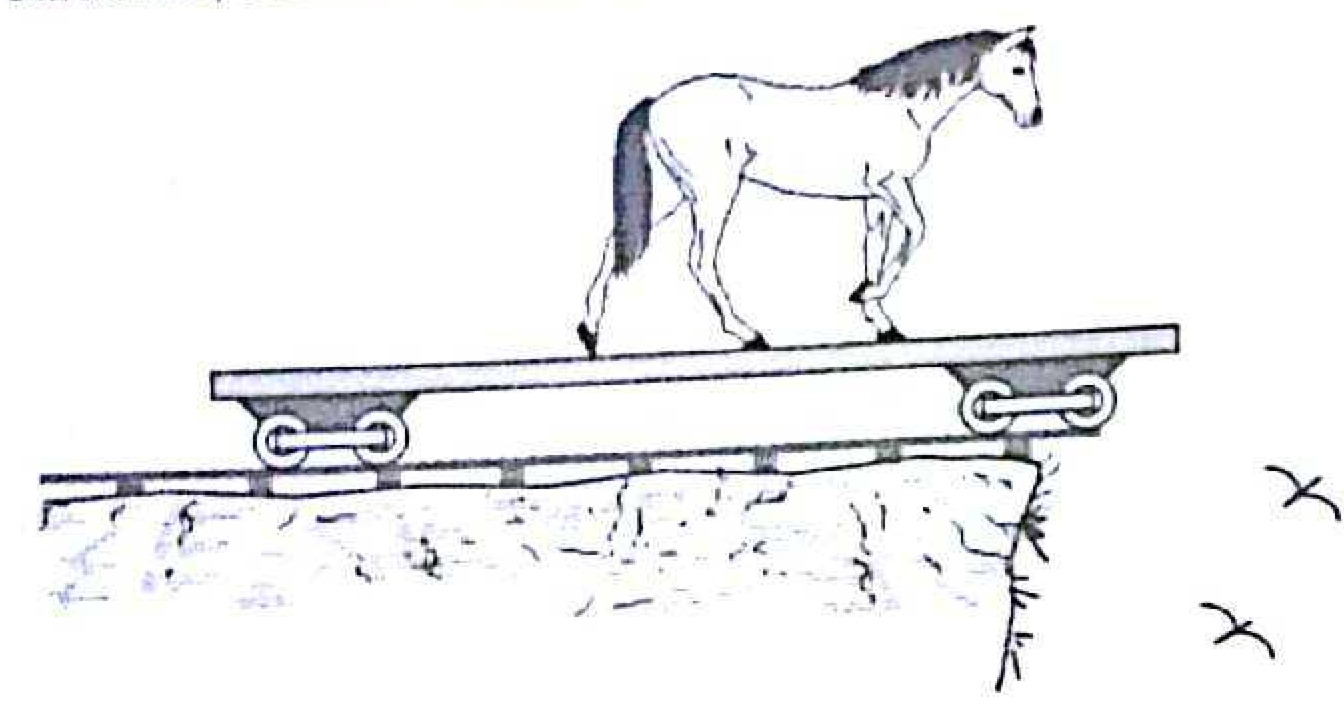
Dos barras uniformes idénticas de longitud L están soldadas por un extremo y forman un ángulo de 60°. ¿A qué distancia por debajo del punto de suspensión P está el centro de masa?



a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}L$, b) $\dfrac{1}{2}L$, c) $\dfrac{1}{4}L$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}L$, e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}L$

PE-1.09. *Decisión de vida o muerte*

Después de un accidente ferroviario, un caballo queda en el medio de un vagón sobre rieles a la orilla de un barranco, como se ilustra en la figura.



¿En cuál caso existe *menor* riesgo de que el vagón se precipite al vacío?

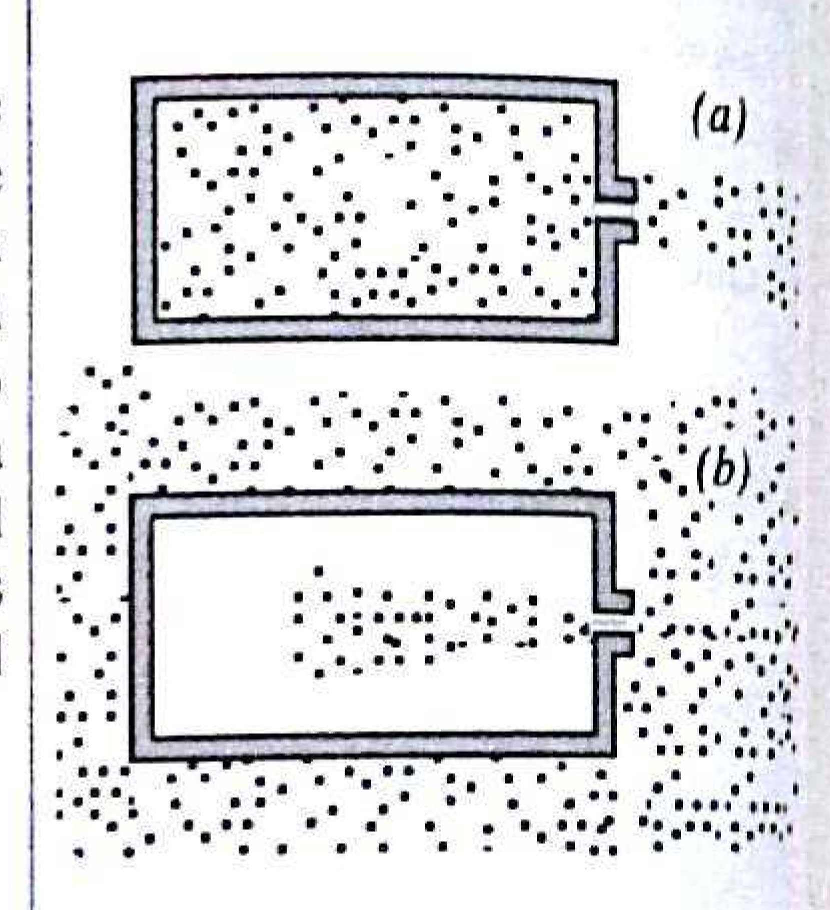
a) Si el caballo da un paso hacia el barranco.

b) Si el caballo da un paso en dirección opuesta al barranco.

c) Es igual en ambos casos.

PE-1.10. *¿Hacia dónde se mueve el recipiente?*

Sabemos que si a un recipiente que contiene aire comprimido se le hace un agujero, a medida que el aire se escapa hacia la derecha el recipiente se moverá hacia la izquierda (figura a). Este es el principio de propulsión a chorro mediante el cual operan los cohetes en el espacio interplanetario. Considere ahora el caso ilustrado en la figura b, donde al mismo recipiente se le extrae todo el aire y a continuación se le hace un agujero. Podemos asegurar que a medida que el aire entra por el agujero, el recipiente....



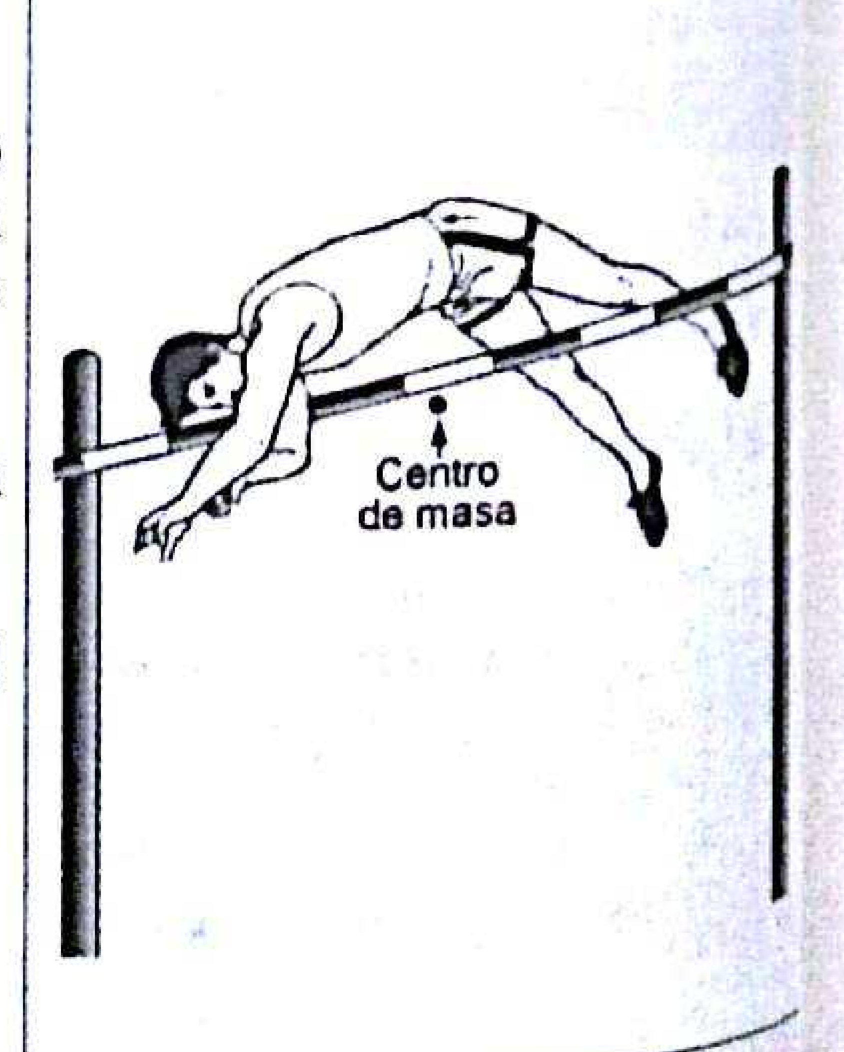
a) se moverá hacia la derecha

b) se moverá hacia la izquierda

c) no se moverá

PE-1.11. *El CM del atleta durante un salto alto*

Un atleta de salto alto afirma que su salto es exitoso gracias a que, mientras su cuerpo está pasando por encima de la barra sin tocarla, su centro de masa siempre permanece por debajo de la misma. Esto sería.....



a) Imposible porque violaría la conservación de la energía.

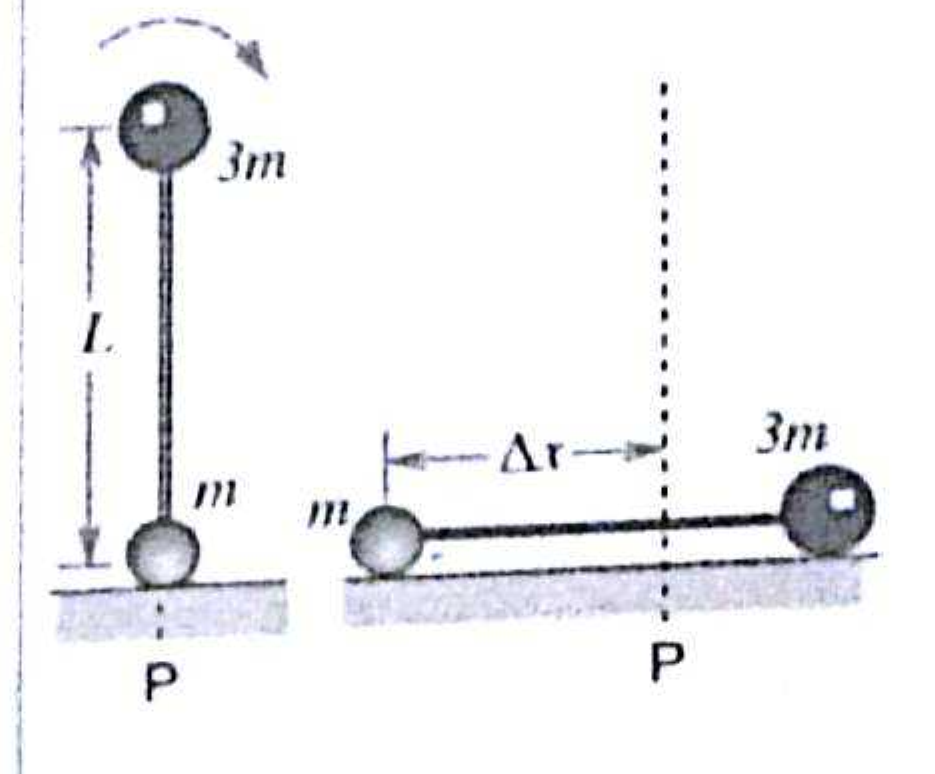
b) Imposible porque violaría la conservación del momento lineal.

c) Imposible porque violaría la Segunda ley de Newton.

d) Posible y no violaría ninguna ley de la física.

PP-1.12. *¿Dónde quedará la barra después de caer?*

Dos esferitas de masa m y $3m$ están en los extremos de una barra de longitud L y de masa despreciable. El sistema está colocado verticalmente con la masa $3m$ en la parte superior y la masa m sobre un plano horizontal *sin fricción*. ¿Cuando se suelta el sistema, cuál será el desplazamiento de la masa m en el momento en que la masa $3m$ choca contra el plano?



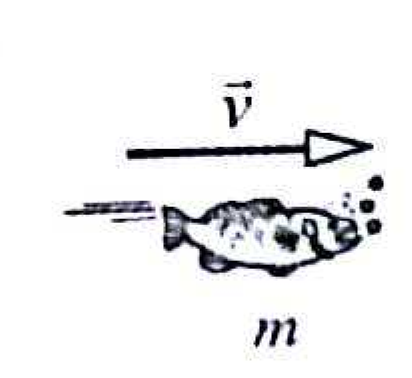


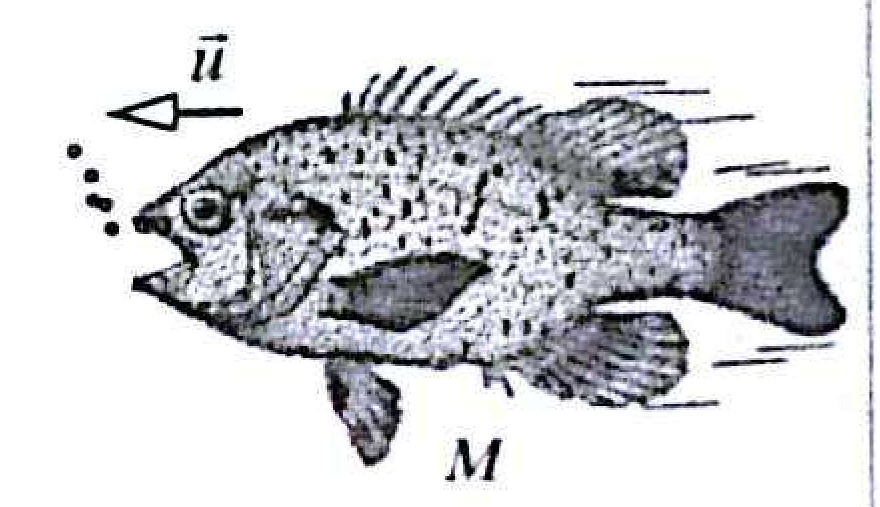
a) $\Delta x = L$, b) $\Delta x = L/2$, c) $\Delta x = L/4$

d) $\Delta x = 3L/4$, e) $\Delta x = 2L/3$

PE-1.13. *El pez grande se traga al pequeño*

Un pececito de masa $m = 0{,}5$ kg que nada hacia la derecha con una velocidad $v = 2$ m/s es tragado por un pez grande de masa $M = 4{,}5$ kg que nada hacia la izquierda a una velocidad $u = 1$ m/s.





¿Cuál será la nueva velocidad del pez grande después de haberse comido al más pequeño ?

a) 0,5 m/s

b) 0,7 m/s

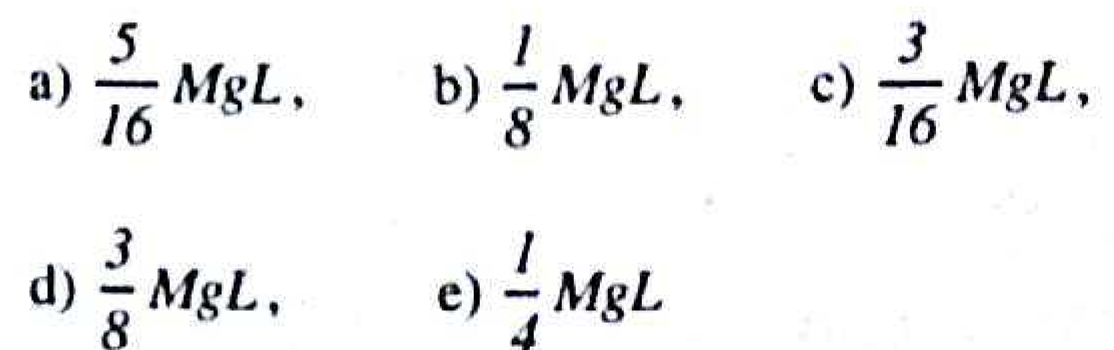
c) 1 m/s

d) 1,5 m/s

e) 2 m/s

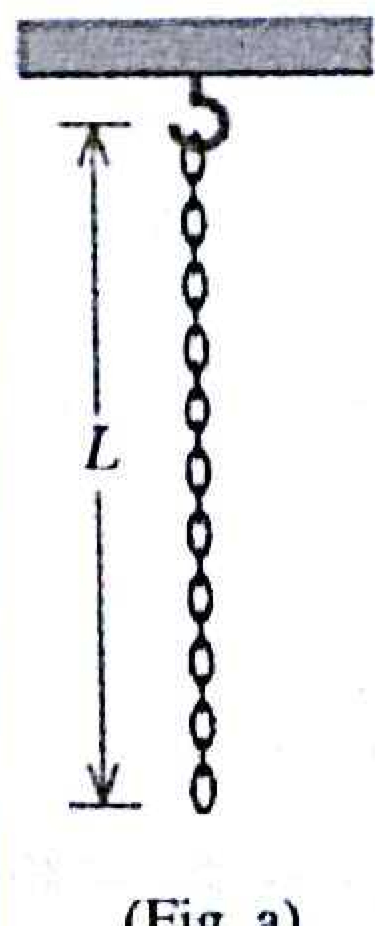
PE-1.14. *Trabajo para recoger la mitad de la cadena*

Una cadena uniforme de masa M y longitud L cuelga inicialmente por un gancho desde el techo (fig. a). Determine el trabajo que se requiere realizar para levantar la mitad inferior de la cadena y colocarla en el gancho, de la manera indicada en la figura b.

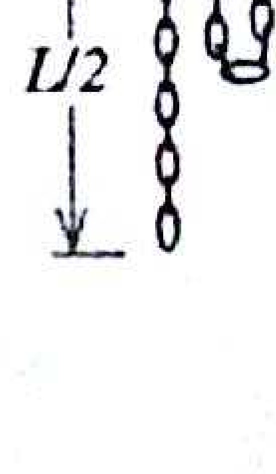


a) $\frac{5}{16}MgL$, b) $\frac{1}{8}MgL$, c) $\frac{3}{16}MgL$,

d) $\frac{3}{8}MgL$, e) $\frac{1}{4}MgL$



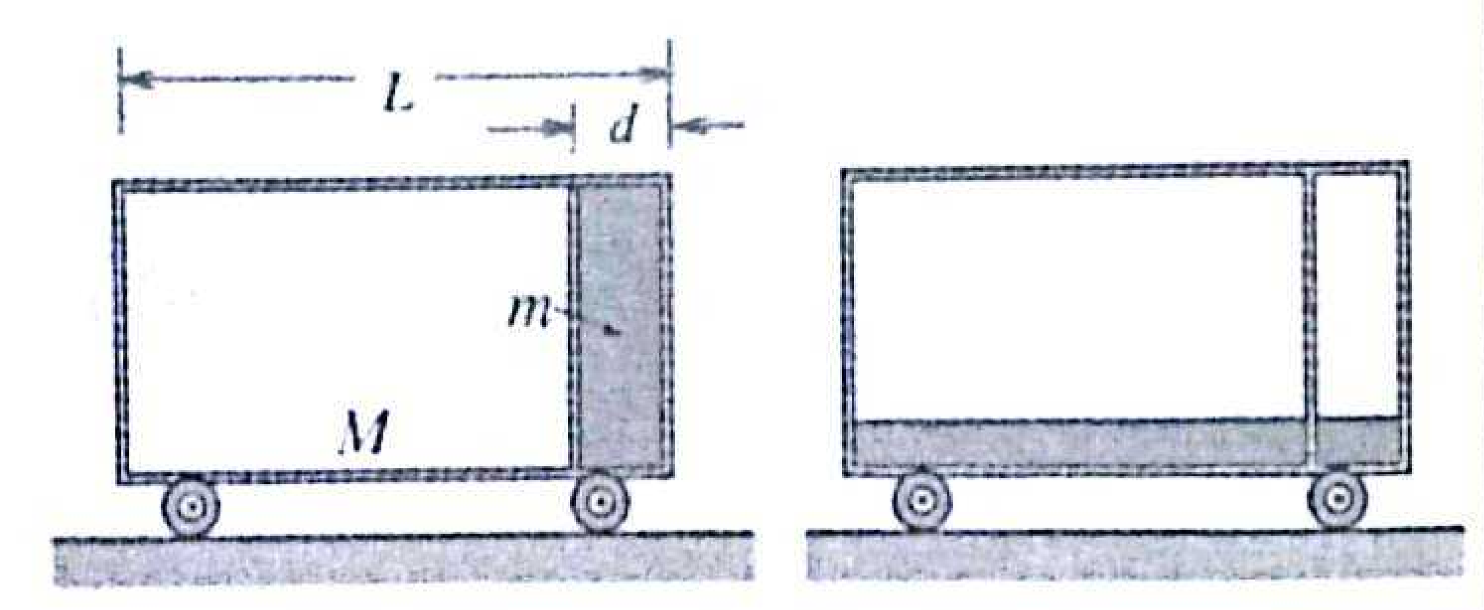
(Fig. a)



(Fig. b)

PE-1.15. *Derrame de agua dentro de un vagón*

Un vagón de masa $M = 800$ kg y longitud $L = 4$ m tiene en el extremo derecho un tanque de agua de masa $m = 600$ kg y longitud $d = 0,5$ m. El vagón está en reposo y libre de moverse sobre una superficie horizontal.



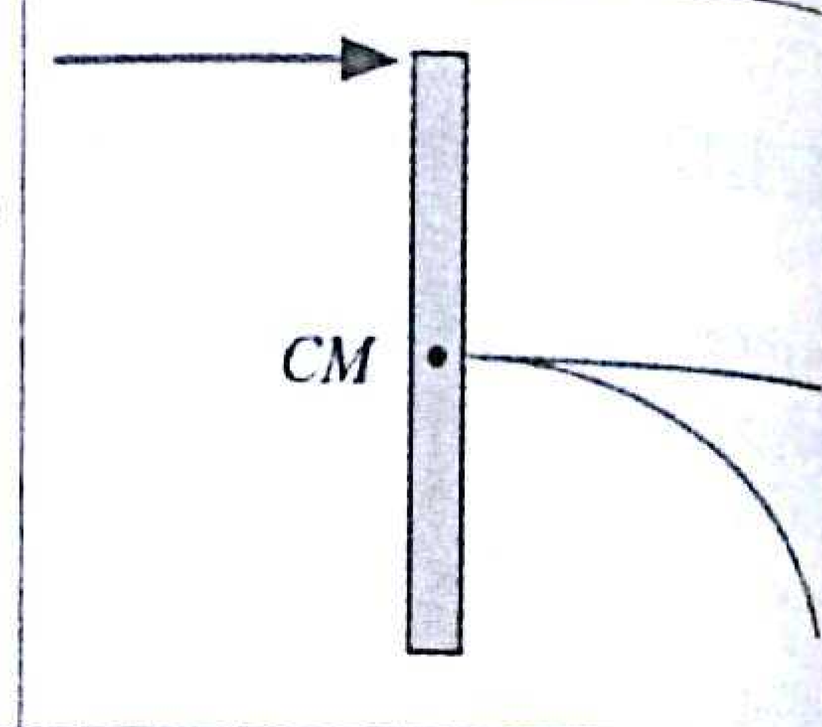
Si al tanque se le hace un agujero en el fondo, inundando con agua todo el piso del vagón. ¿cómo será el desplazamiento del vagón?

a) 1,25 m hacia la derecha
b) 0,100 m hacia la izquierda
c) 0,75 m hacia la derecha
d) 0,50 m hacia la izquierda
e) 0,25 m hacia la derecha

PE-1.16. *¿Cómo se moverá el CM de la barra?*

Una barra delgada descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Si le damos a la barra un golpe instantáneo horizontal transversal por un extremo, su centro de masa se mueve…

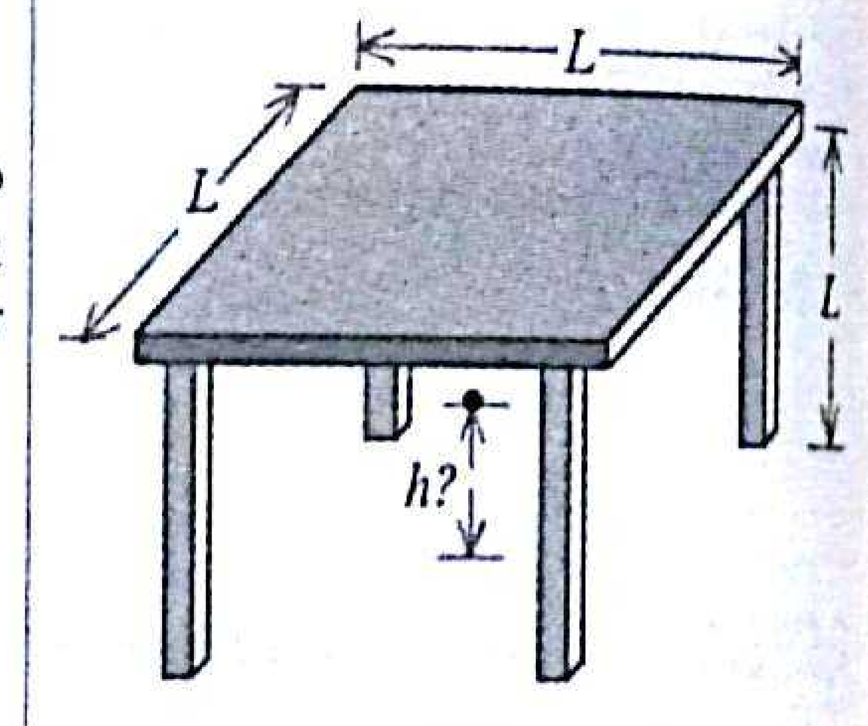
a) en un círculo. b) en línea recta.
c) en una parábola. d) no se mueve.



PE-1.17. *Centro de mesa*

Una mesa está constituida por una tabla cuadrada de lado L y cuatro patas idénticas de altura L. Si la masa de la tabla es 4 veces la masa de cada pata, ¿a qué altura por encima del piso quedará el centro de masa de la mesa?

a) $h = L/2$. b) $h = 3L/4$ c) $h = L/3$
d) $h = 2L/3$ e) $h = L/4$



PE-1.18. *Un cilindro sólido dentro de uno hueco*

Un cilindro sólido de radio R está situado dentro de un tubo cilíndrico hueco de igual masa y de radio interior $2R$.

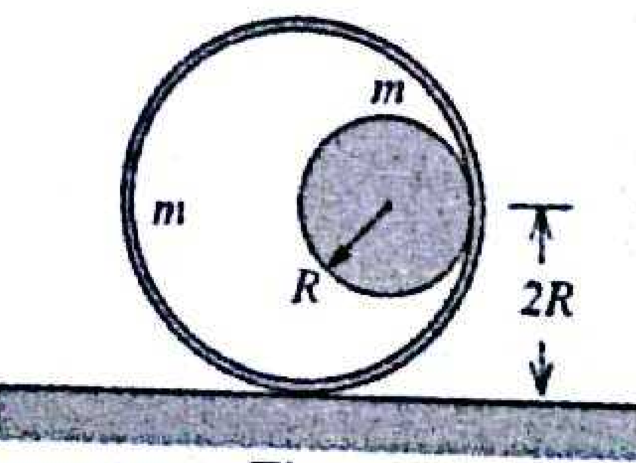
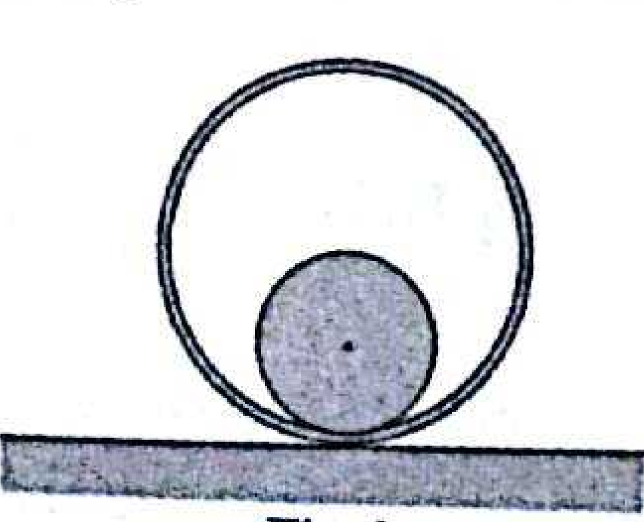


Fig. a

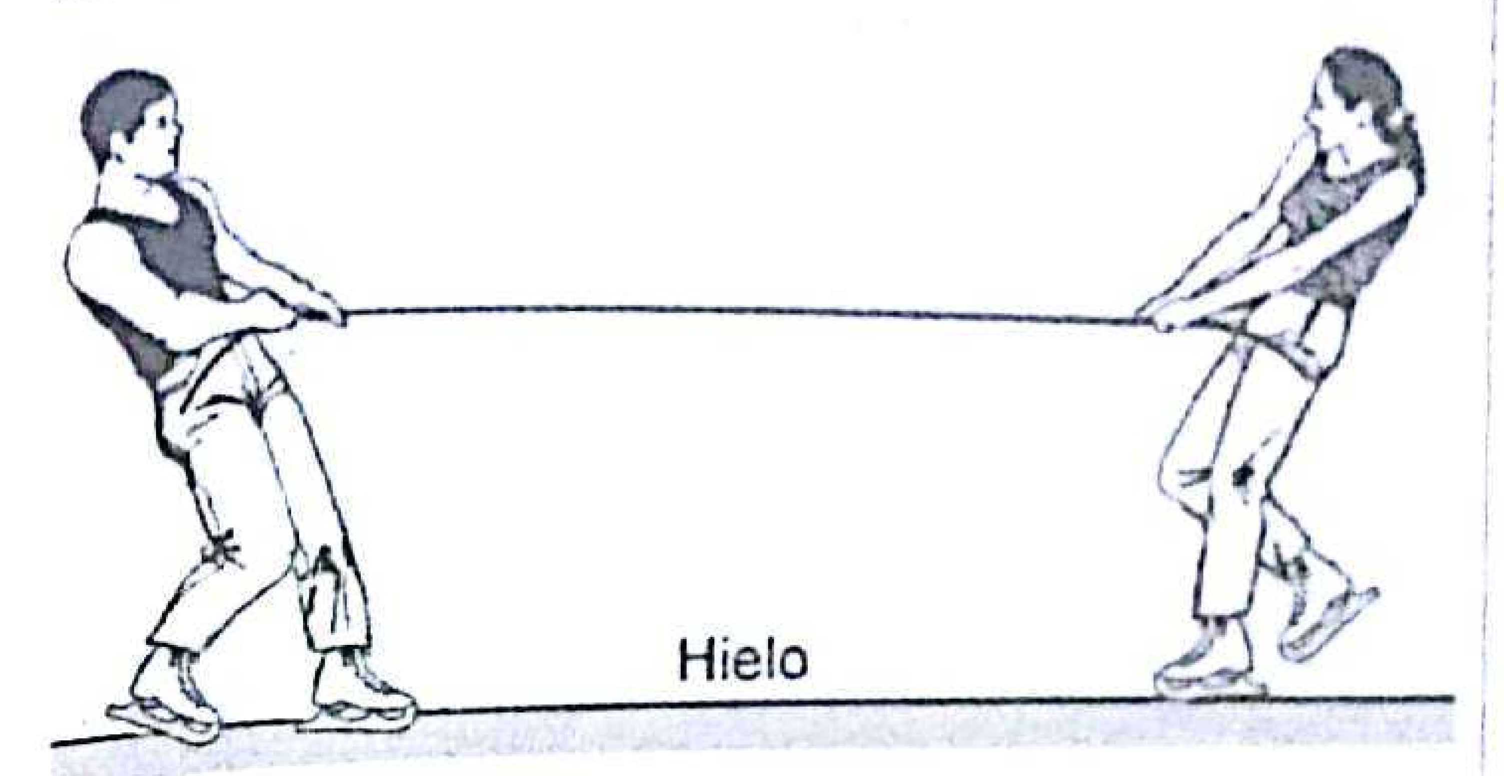

Fig. b

El sistema se suelta desde el reposo sobre una mesa horizontal (Fig. a). El cilindro sólido, desciende y después de oscilar, se detiene en el fondo (Fig. b) ¿Cuál será el desplazamiento horizontal del tubo hueco?

a) $3R/4$, b) $R/4$, c) $R/3$
d) $3R/2$, e) $R/2$

PE-1.19. *Jalándose mediante una cuerda*

Sobre una pista de hielo están, Enrique de 60 kg y Enriqueta de 40 kg, agarrados por los extremos de una cuerda de 10 metros de longitud.



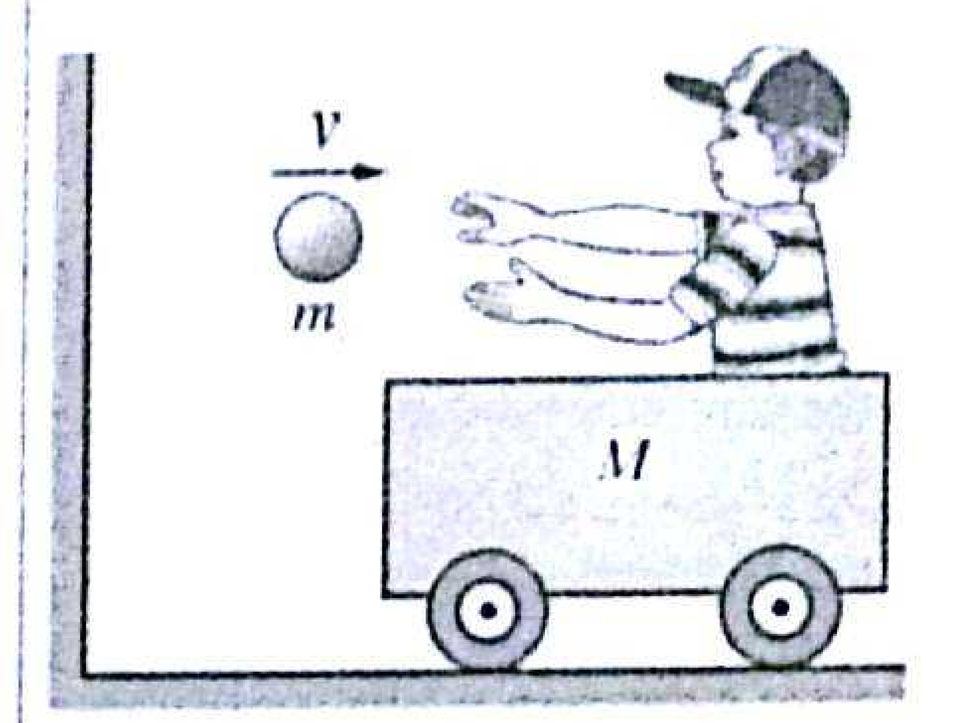
Si ellos empiezan a jalarse mutuamente, entonces cuando se produce el encuentro, la distancia que ha recorrido Enriqueta es:

a) 4 m,
b) 5 m,
c) 6 m,
d) 8 m,
e) Depende de quien jale mas.

PE-1.20. *Impulsándose con el rebote de una pelota*

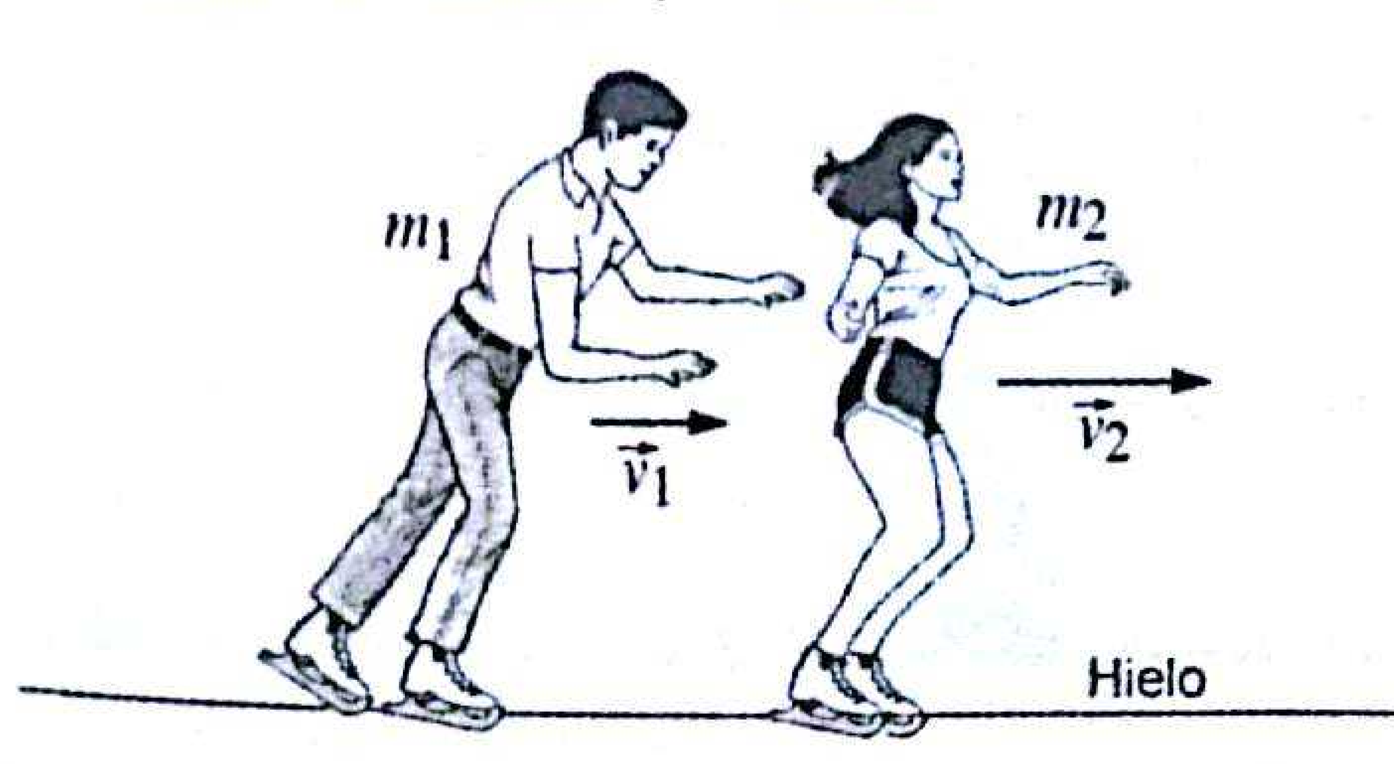
Un niño está dentro de un carrito que puede rodar sin fricción (masa combinada $M = 19,5$ kg), y lanza una pelota de masa $m = 0,5$ kg hacia una pared, con una velocidad de 10 m/s (con relación al suelo). Si el niño atrapa la pelota después que ésta rebota elásticamente de la pared, ¿a qué velocidad se moverá el carrito?

a) 0,025 m/s, b) 0,05 m/s, c) 0,25 m/s,
d) 0,5 m/s e) 1,0 m/s



PE-1.21. *Un empujón para averiguar la masa de ella*

En una pista de hielo, Teodoro y Dorotea patinan juntos a una velocidad de 6 m/s. Teodoro quiere averiguar la masa de Dorotea y, al darle un empujón hacia adelante, ella se acelera hasta una velocidad $v_2 = 8$ m/s mientras que él se frena hasta una velocidad $v_1 = 4,5$ m/s.

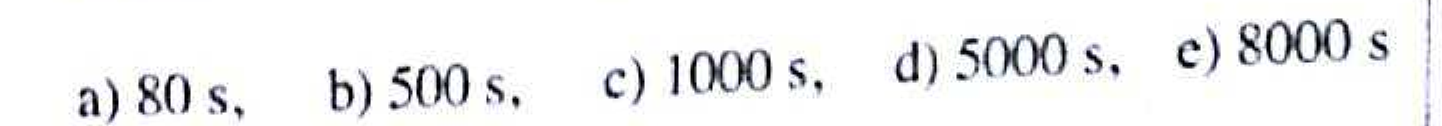


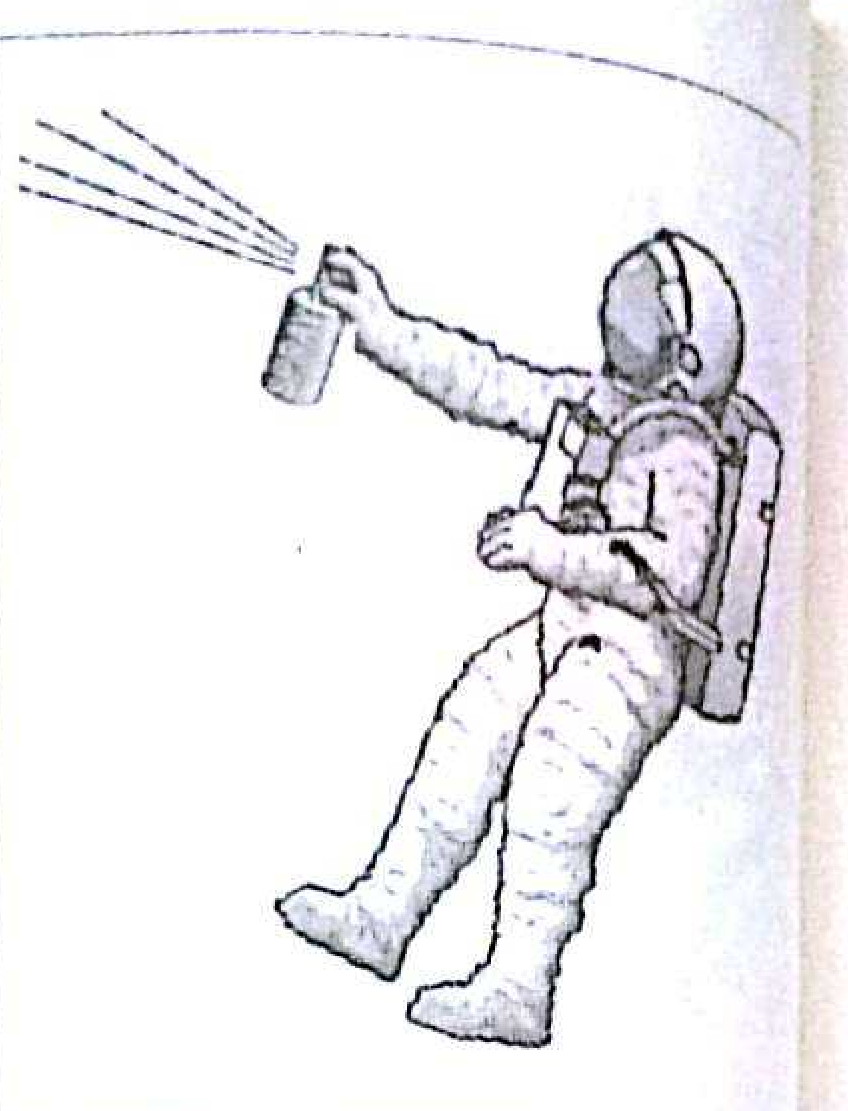
Si la masa de Teodoro es 60 kg, ¿cuál es la masa de Dorotea?

a) 56 kg,
b) 52 kg,
c) 48 kg,
d) 45 kg
e) 43 kg

PE-1.22. *Para poder regresar a la cápsula espacial*

Un astronauta de 80 kg se encuentra fuera de la cápsula espacial a una distancia de 5 m cuando se rompe el cable que lo mantenía unido a la cápsula. Ante la imposibilidad de impulsarse de regreso a sí mismo, saca una lata con desodorante y rocía instantáneamente todo el contenido en dirección contraria a la de la nave. Si había 100 g de líquido en la lata y la expulsa a 50 cm/s, ¿cuánto tiempo le toma al astronauta regresar a la nave?


a) 80 s, b) 500 s, c) 1000 s, d) 5000 s, e) 8000 s



CAP. 1: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
1.01					√
1.03				√	
1.05			√		
1.07					√
1.09	√				
1.11				√	
1.13		√			
1.15			√		
1.17		√			
1.19			√		
1.21				√	

	a	b	c	d	e
1.02			√		
1.04					√
1.06			√		
1.08	√				
1.10			√		
1.12				√	
1.14	√				
1.16		√			
1.18					√
1.20			√		
1.22					√

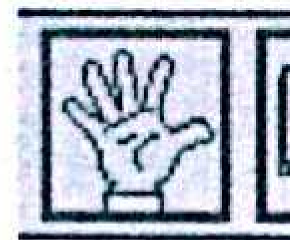
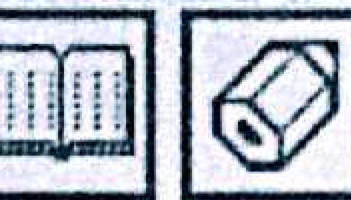
2

CINEMÁTICA DE ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

Un cuerpo rígido es un objeto o sistema de partículas en el cual las diversas distancias entre sus partículas están fijas y permanecen constantes; esto significa que el cuerpo tiene una forma definida que no cambia. Cuando un cuerpo rígido está sujeto a un movimiento de rotación pura en torno a un eje, cada una de sus partículas se mueven en una trayectoria circular alrededor del eje de rotación. Para describir el movimiento de rotación empleamos variables angulares, como la velocidad angular y la aceleración angular. Estas cantidades se definen por analogía con las cantidades correspondientes del movimiento lineal. Las ecuaciones que describen el movimiento de rotación uniformemente acelerado, es decir, aquel con aceleración constante, son particularmente sencillas y tienen la misma estructura matemática que las del movimiento lineal uniformemente acelerado. En general, el movimiento de un cuerpo rígido en el espacio puede ser muy complejo. En este capítulo limitaremos nuestro estudio a la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje que está fijo en el espacio y, posteriormente, extenderemos nuestro análisis al movimiento de rodadura en un plano de cuerpos rígidos que poseen un alto grado de simetría, tales como cilindros o esferas.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

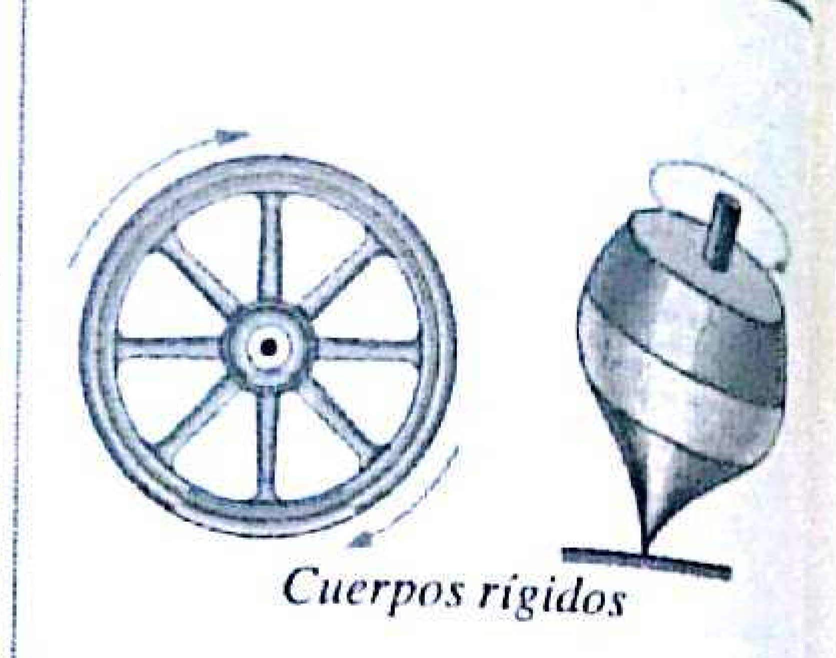
- Cuerpos rígidos
- Traslación y Rotación
- Desplazamiento angular
- Velocidad angular y Aceleración angular
- Cinemática de rotación
- Relaciones entre magnitudes lineales y angulares
- Relaciones vectoriales en la rotación

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

CUERPOS RÍGIDOS

Un cuerpo rígido es un caso especial de los sistemas constituidos por muchas partículas. En el sentido estricto, un cuerpo se considera rígido si las distancias entre todas las partículas que lo constituyen permanecen invariables bajo la aplicación de fuerzas externas. Los cuerpos rígidos como las ruedas siempre mantienen su forma y su tamaño durante su movimiento.



Cuerpos rígidos

El concepto de cuerpo rígido es en realidad una idealización, es el modelo más simple que podemos imaginar. Todos los cuerpos en determinadas condiciones se deforman, dependiendo de la magnitud de las fuerzas aplicadas. La posición relativa entre las partículas puede variar y el cuerpo puede cambiar tanto su forma como su volumen en el transcurso del tiempo. En esta unidad, estudiaremos el movimiento de cuerpos bajo la suposición de que éstos son absolutamente rígidos.



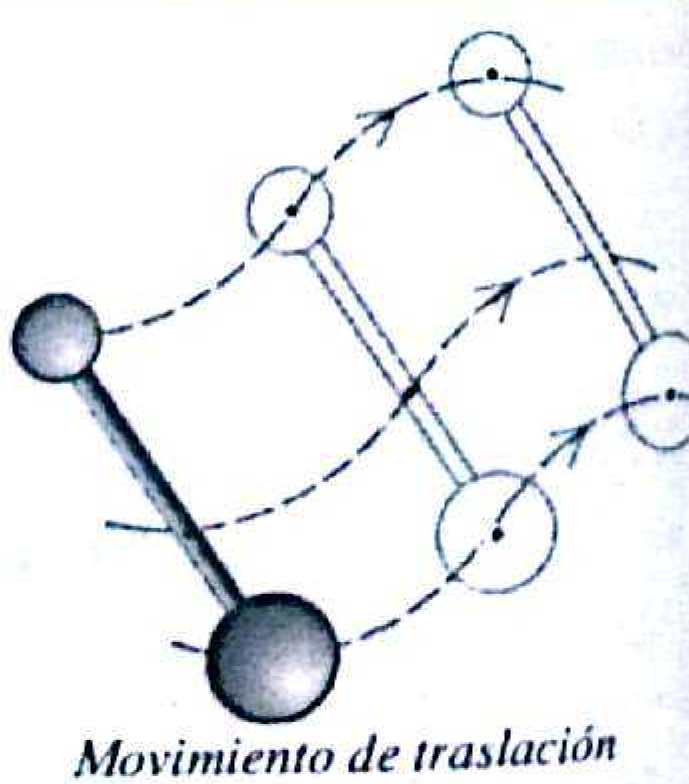
Cuerpos no-rígidos

TRASLACIÓN Y ROTACIÓN

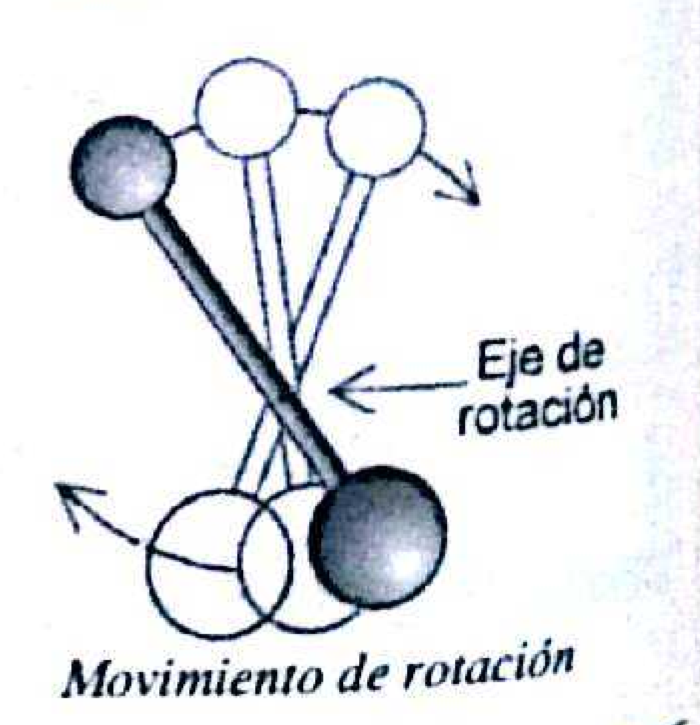
En un cuerpo rígido podemos distinguir dos tipos de movimiento: La traslación y la rotación.

Traslación: La traslación es un *cambio de posición* del cuerpo en el espacio. En un cuerpo que se traslada, las líneas que unen dos puntos cualquiera permanecen siempre paralelas. Todos los puntos del cuerpo en cada momento tienen igual velocidad y las trayectorias que describen, tienen igual forma. Por eso, durante la traslación de un cuerpo rígido todos sus puntos tienen en un instante dado, velocidades iguales y aceleraciones iguales. Es un error común creer que durante la traslación cada punto del cuerpo debe moverse en línea recta; en general la trayectoria puede ser curvilínea.

Rotación: En la rotación es un *cambio en la orientación* espacial del cuerpo. Los distintos puntos del cuerpo que gira se mueven en arcos de círculos alrededor de una línea denominada *eje de rotación*.

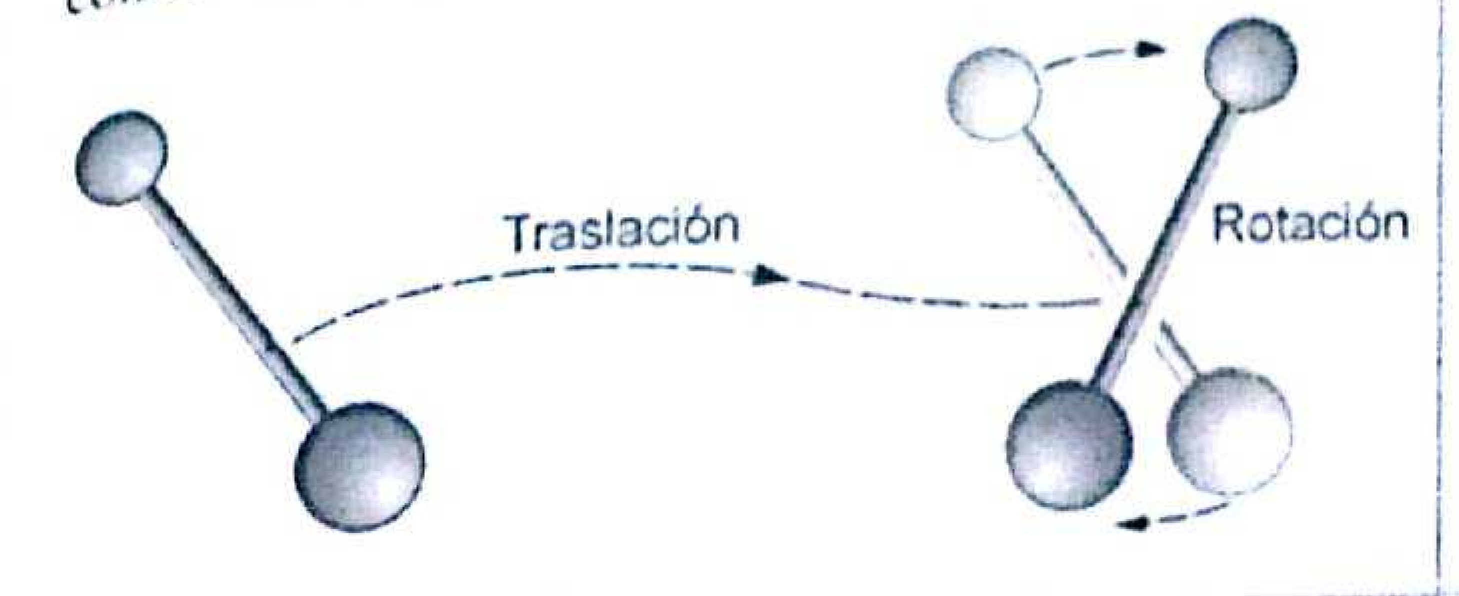


Movimiento de traslación



Movimiento de rotación

Traslación mas rotación: El movimiento más general de un cuerpo rígido puede considerarse como una combinación de una traslación y una rotación.



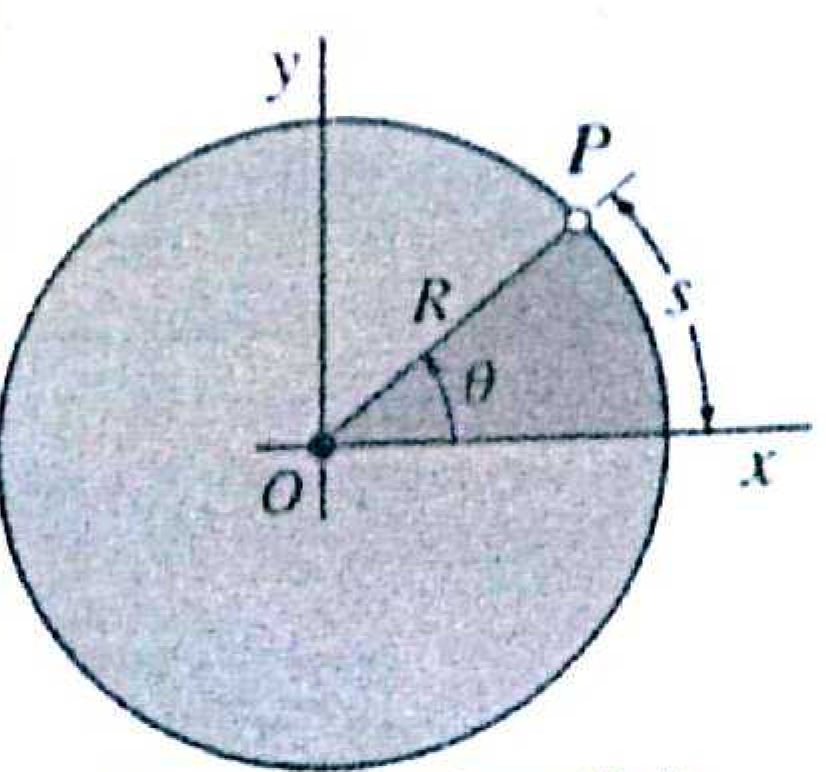
Traslación + rotación

DESPLAZAMIENTO ANGULAR

La localización de un punto que describe una trayectoria circular se especifica mas adecuadamente por medio de coordenadas polares. Supongamos que el eje z coincide con el eje de rotación. El desplazamiento angular de una partícula P a distancia R del eje de rotación está dado por el ángulo θ entre la línea radial OP y el eje x.

El ángulo θ puede ser medido en grados, o 1/360 parte de la rotación de un círculo completo. Pero resulta mas conveniente expresar los ángulos en radianes. Recordemos que un ángulo en radianes se define como el cociente entre la longitud s del arco subtendido y el radio R del círculo correspondiente:

$$\theta = \text{Longitud de arco / Radio} = s/R \quad \text{radianes}$$



Coordenadas polares (R, θ)

2π radianes = 360°
1 rad = 57.3°

VELOCIDAD ANGULAR MEDIA

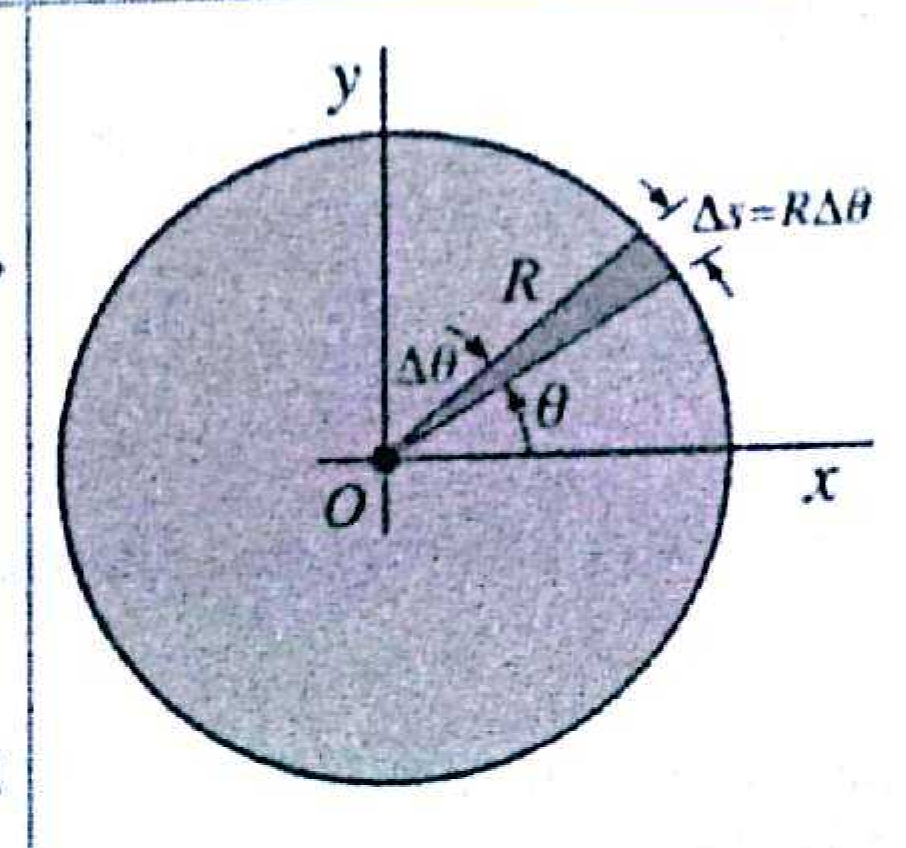
Si durante un tiempo Δt, la posición angular varía en $\Delta\theta$, se define la velocidad angular media como la razón:

$$\langle \omega \rangle = \Delta\theta/\Delta t$$

VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA

Es el valor que toma la velocidad angular media cuando el intervalo de tiempo de observación es muy pequeño.

$$\omega = \text{Lim}_{\Delta t \to 0} (\Delta\theta/\Delta t) = d\theta/dt \quad \text{rad/s}$$



Velocidad angular

$\omega = d\theta/dt$

ACELERACIÓN ANGULAR MEDIA

Es la razón entre la variación de la velocidad angular $\Delta\omega$ y el intervalo de tiempo Δt.

$$<\alpha> = \Delta\omega/\Delta t \quad \text{rad/s}^2$$

ACELERACIÓN ANGULAR INSTANTÁNEA

Es el valor que toma la aceleración angular media cuando el intervalo de observación es muy pequeño:

$$\alpha = \text{Lim}_{\Delta t \to 0}(\Delta\omega/\Delta t) = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2 \quad \text{rad/s}^2$$

Aceleración angular instantánea

$$\alpha = d\omega/dt$$

ROTACIÓN CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Cuando un cuerpo rígido tiene un movimiento de rotación uniformemente acelerado (α = constante), se cumplen relaciones entre las variables que son análogas a las del movimiento de traslación con aceleración lineal constante. En efecto, si en el instante inicial $t = 0$ tenemos $\omega = \omega_o$, entonces:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{constante}$$

$$\int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Empleando la relación anterior de $\omega(t)$ e integrando una vez más, encontramos la posición angular en función del tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Donde θ_o es el valor de θ en el instante inicial $t = 0$.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Se puede eliminar el tiempo de las relaciones anteriores para obtener una ecuación que relaciona: ω, θ y α:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

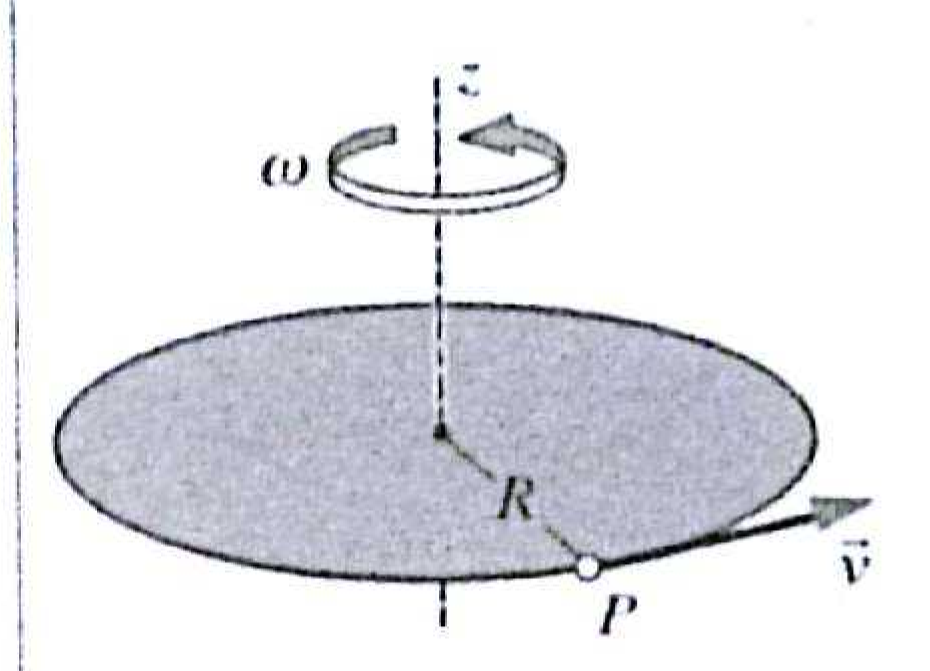
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

CANTIDADES ANGULARES Y LINEALES

Sea una partícula en un punto P a una distancia fija, R, del eje de rotación. Si θ es el ángulo subtendido (*en radianes*) la longitud de arco es: $s = R\theta$. La velocidad lineal de la partícula es tangente a la trayectoria circular:

$$v = \frac{ds}{dt} = R(\frac{d\theta}{dt}) = R\omega$$

Siendo $\omega = d\theta/dt$ la velocidad angular (en rad/s). Observe que en cualquier instante, ω es la misma para cada punto del cuerpo que gira, pero la velocidad lineal v será mayor mientras el punto esté mas alejado del eje.



Velocidades angular y lineal

$v = \omega$□ R

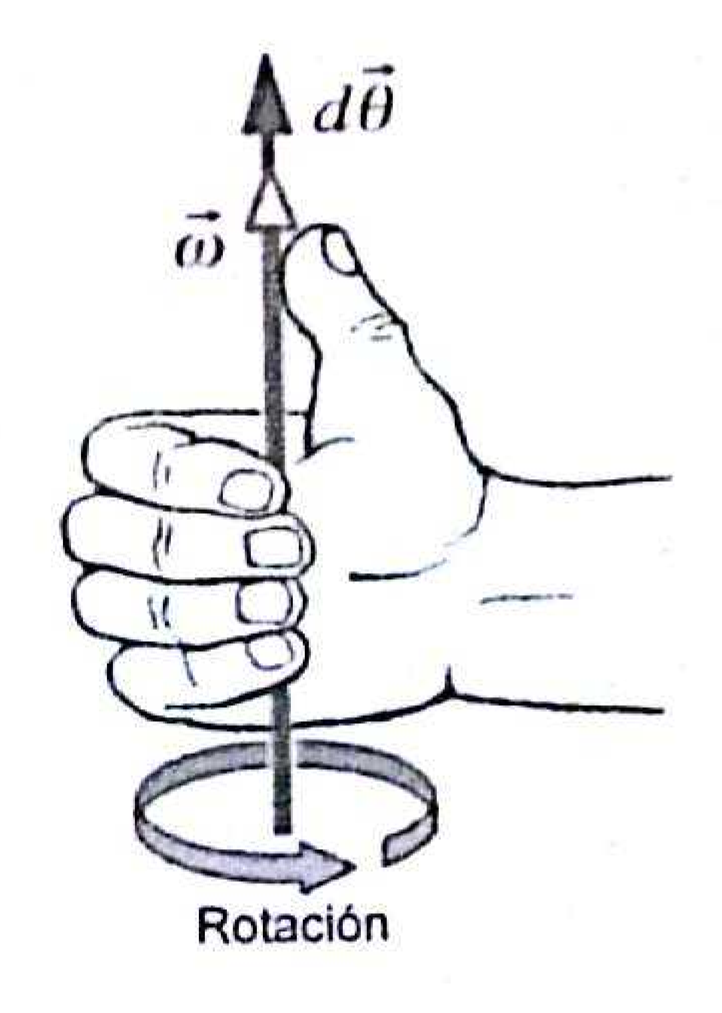
NATURALEZA VECTORIAL DE LA ROTACIÓN

Los desplazamientos angulares finitos *no* pueden ser considerados como vectores, ya que no cumplen con la ley commutativa de la suma. Es decir, si en un cuerpo rígido efectuamos consecutivamente dos rotaciones finitas ϕ_1 y ϕ_2 en torno a diferentes ejes, tendremos que, en general, el ángulo de orientación espacial final dependerá del orden en que se han efectuado dichas rotaciones:

$$(\phi_1 + \phi_2) \neq (\phi_2 + \phi_1)$$

No obstante, podemos comprobar que si los desplazamientos angulares son infinitesimales, el orden de la suma no altera el resultado, y por lo tanto éstos *si* pueden ser tratados como vectores. Para representar una rotación infinitesimal alrededor de un eje dado, se define el vector desplazamiento angular $d\vec{\theta}$, con los siguientes atributos:

Módulo: Es el módulo del ángulo de rotación.
Dirección: La dirección de la recta del eje de rotación.
Sentido: Dado por la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derecha

Se curvan los dedos en el sentido de la rotación y el pulgar señalará hacia donde apunta $d\vec{\theta}$ y $\vec{\omega}$.

VECTOR VELOCIDAD ANGULAR

Por ser el desplazamiento infinitesimal, $d\vec{\theta}$, una cantidad vectorial y dt una escalar, el vector $\vec{\omega}$ tendrá la misma dirección y sentido que $d\vec{\theta}$:

$$\vec{\omega} = Lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\Delta\vec{\theta}}{dt}) = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

Vector velocidad angular

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

VECTOR ACELERACIÓN ANGULAR

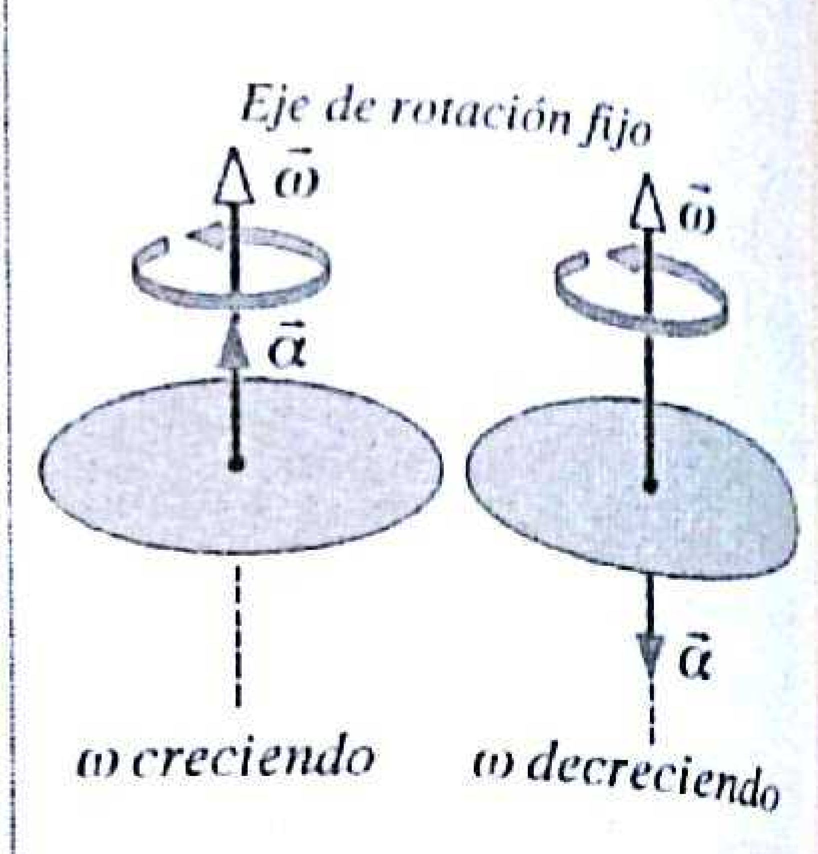
La aceleración angular, $\vec{\alpha}$, será también un vector y tiene la dirección de la variación de la velocidad angular $\vec{\omega}$.

$$\vec{\alpha} = Lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\omega}}{dt}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Si el *eje de rotación está fijo*, el vector $\vec{\omega}$ sólo puede cambiar en magnitud, de modo que $\vec{\alpha}$ tendrá la dirección del eje de rotación. Se observa que:

Si $\vec{\omega}$ está creciendo, $\vec{\alpha}$ apunta en el mismo sentido de $\vec{\omega}$.

Si $\vec{\omega}$ está decreciendo, $\vec{\alpha}$ apunta en sentido contrario a $\vec{\omega}$.



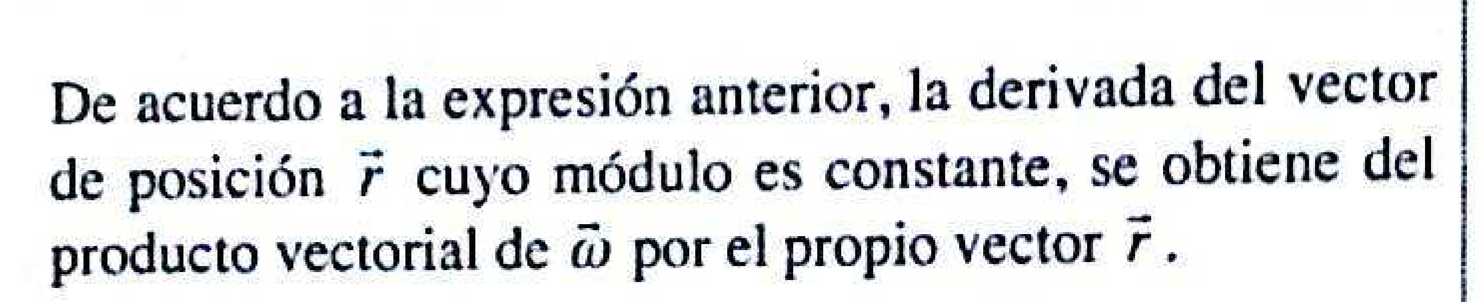
RELACIONES VECTORIALES EN LA ROTACIÓN

Vamos a generalizar ahora la relación escalar $v = \omega R$, a la forma vectorial. Consideremos una partícula P ubicada por el vector posición $\vec{r}$, trazado desde un origen arbitrario O en el eje de rotación. Podemos expresar su velocidad lineal $\vec{v}$ mediante el producto vectorial de $\vec{\omega}$ con $\vec{r}$:

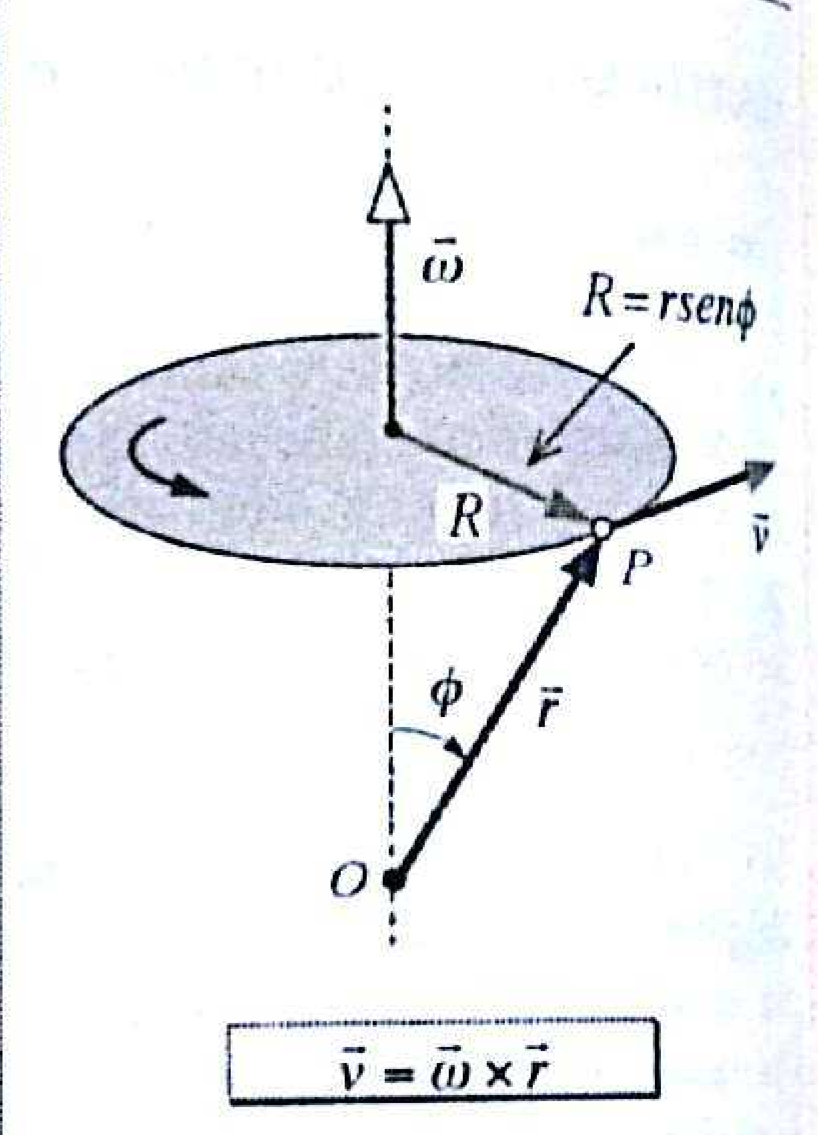
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

En efecto, el módulo de este producto vectorial es:

$$v = |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r sen\phi = \omega R$$



Siendo R el radio del círculo en el cual gira el punto P. Por otra parte, el vector $\vec{v}$ es perpendicular tanto al vector $\vec{\omega}$ como al vector $\vec{r}$ y por lo tanto será perpendicular al plano que contiene a ambos vectores.



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

De acuerdo a la expresión anterior, la derivada del vector de posición $\vec{r}$ cuyo módulo es constante, se obtiene del producto vectorial de $\vec{\omega}$ por el propio vector $\vec{r}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Esta expresión se puede generalizar a cualquier otro vector $\vec{A}$, tal que su modulo $|\vec{A}|$ sea constante y que gire alrededor de un eje fijo con velocidad angular $\vec{\omega}$.

"*La derivada temporal de un vector $\vec{A}$ con módulo constante que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$, es igual al producto vectorial de $\vec{\omega}$ por el propio vector*".

Derivada de un vector de módulo constante

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

VELOCIDADES RELATIVAS

Sean dos puntos A y B de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$. El vector desplazamiento $\vec{r}_{A/B}$, que une estos dos puntos tiene módulo fijo. En un marco de referencia dado, la velocidad $\vec{v}_B$ de la partícula B es igual a la velocidad $\vec{v}_A$ de la partícula A mas la velocidad $\vec{v}_{A/B}$ de la partícula B relativa a la partícula A:

$$\vec{v}_{A/B} = \frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B},$$

Relación entre las velocidades de dos puntos

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL Y RADIAL

La aceleración de un punto P que gira alrededor del eje es la derivada respecto al tiempo de la velocidad, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

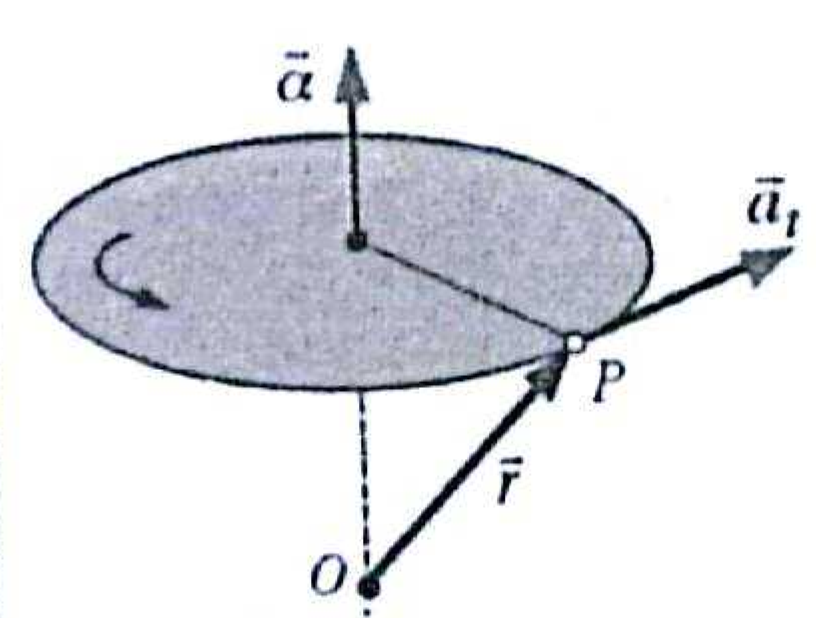
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

La componente *tangencial* de la aceleración surge de la variación del *módulo* de la velocidad cuando la velocidad angular está cambiando:

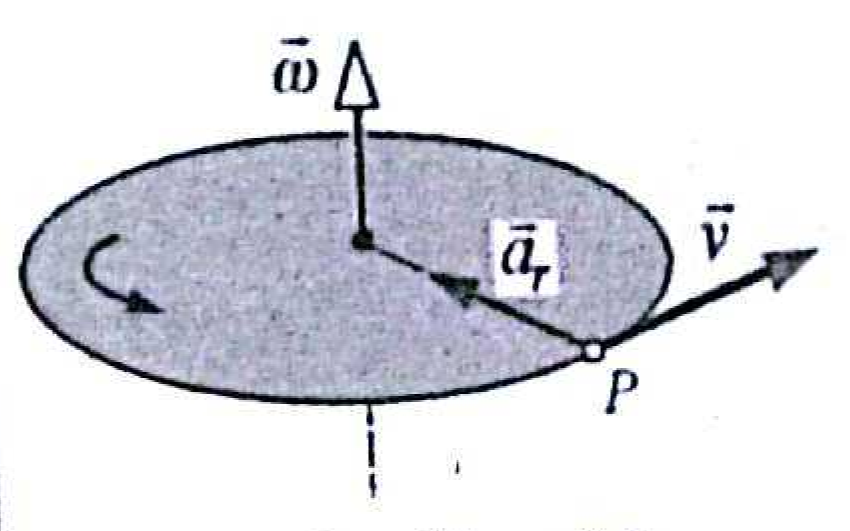
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

La componente *radial* de la aceleración está relacionada con la variación de la *dirección* de la velocidad y apunta hacia el centro del círculo de rotación:

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



Aceleración tangencial
$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$



Aceleración radial
$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$

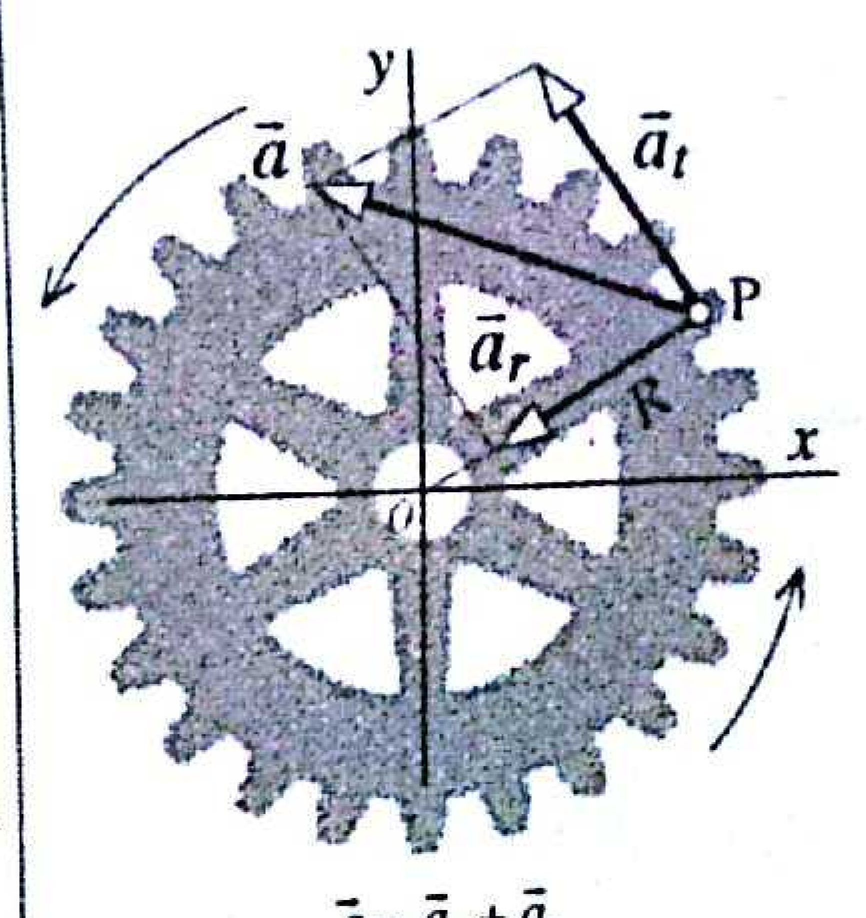
Si ponemos el origen en el plano de rotación del punto P, entonces $r = R$ y los vectores $\vec{\alpha}$ y $\vec{r}$ son perpendiculares entre sí. Luego la aceleración tangencial es:

$$a_t = \alpha R$$

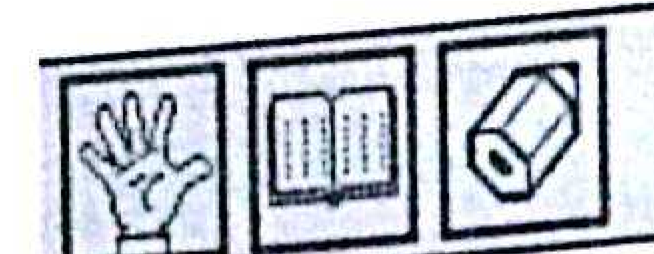
Además, como $\vec{\omega} \perp \vec{v}$, entonces $v = \omega R$, y la aceleración radial es:

$$a_r = \omega^2 R = v^2 / R$$

Esta es justamente la expresión conocida para la *aceleración centrípeta* en el movimiento circular.



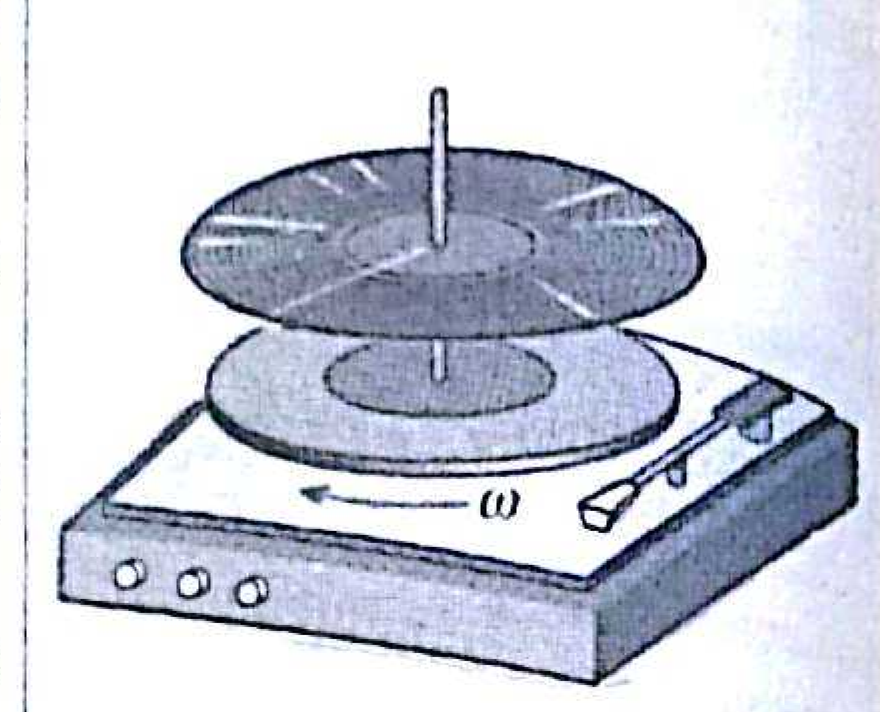
$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-2.01. *Apaga la música*

Un disco LP de música arranca desde reposo y acelera uniformemente hasta alcanzar su rapidez angular de $33^1/3$ rpm en dos segundos.
a) ¿Cuál es la aceleración angular y el ángulo que ha girado el disco en ese intervalo?
b) Si el disco tiene un diámetro de 30 cm, calcule las componentes de la aceleración lineal en un punto del borde, al cabo de un segundo de empezar a girar.
c) Después de haber apagado el aparato, el disco completa dos vueltas y se detiene. Calcule la aceleración angular que es constante, y el tiempo que tarda en detenerse.



Solución: a) La rapidez angular del disco es (en rad/s):

$$\omega = \frac{(100/3\text{rev/min})(2\pi\text{rad/rev})}{(60\text{s/min})} = \frac{10}{9}\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3{,}49\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular es constante, y podemos usar la relación:

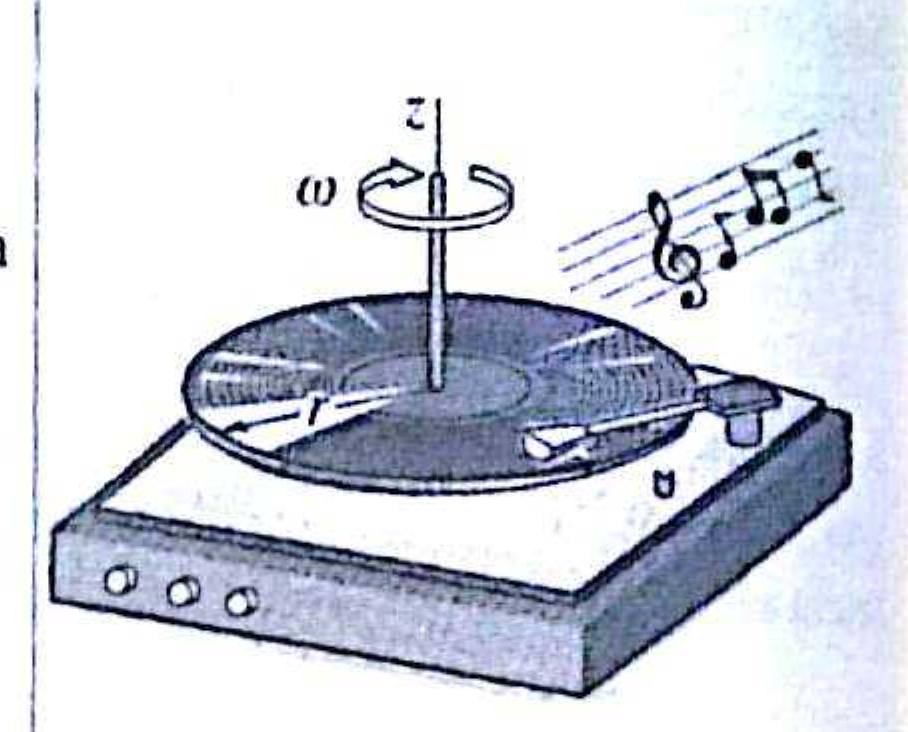
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{3{,}49\text{rad/s} - 0}{2\text{s}} = 1{,}75\text{rad/s}^2$$

El ángulo girado por el disco en dos segundos es:

$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(1{,}75\text{rad/s}^2)(2\text{s})^2 = 3{,}5\text{rad}$$

$$\theta = 3{,}5\text{rad}\left(\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}}\right) = 200^\circ$$



b) La rapidez angular al cabo de 1s.de empezar a girar es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (1{,}75\text{ rad/s}^2)(1\text{s}) = 1{,}75\text{ rad/s}$$

$$a_t = \alpha r = (1{,}75\text{ rad/s}^2)(0{,}15\text{m}) = 0{,}262\text{ m/s}^2$$

$$a_r = \omega^2 r = (1{,}75\text{ rad/s})^2(0{,}15\text{m}) = 0{,}459\text{ m/s}^2$$

c) Al apagar el equipo, la rapidez angular disminuye a cero y la aceleración (que es negativa) puede obtenerse de la relación:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{0 - (3{,}49\text{rad/s})^2}{2(4\pi)} = -0{,}485\text{rad/s}^2$$

El tiempo que tarda en detenerse es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

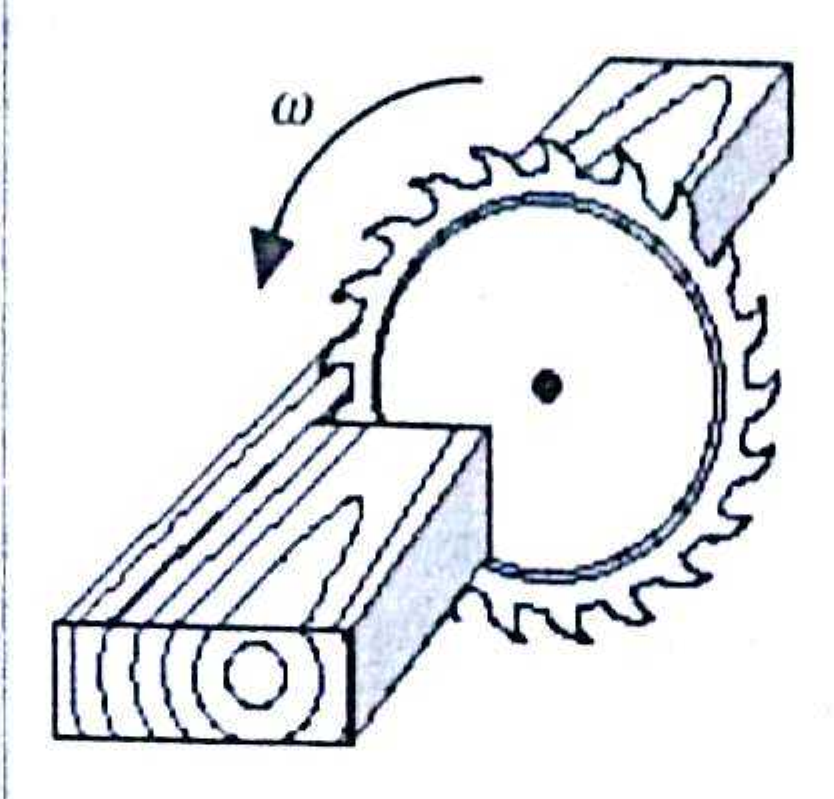
$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 3{,}49\text{rad/s}}{-0{,}485\text{rad/s}^2} = 7{,}20\text{s}$$

Respuesta:

a) $\theta = 3{,}5$ rad $= 200^\circ$
b) $a_t = 0{,}262$ m/s²
$a_r = 0{,}459$ m/s²
c) $\alpha = -0{,}485$ rad/s²
$t = 7{,}20$ s

PR-2.02. *Rotación acelerada de una sierra circular*

El disco de una sierra circular de radio R = 20 cm, inicialmente está en reposo y al activarlo comienza a girar con una aceleración angular constante α = 0,5 rad/s². Considere un punto P sobre el borde con una posición angular inicial en $t = 0$: $\theta = 0^\circ$. Determine para ese punto, al cabo del tiempo $t = 2$ s:
a) Los desplazamientos angular y lineal.
b) La aceleración lineal total.



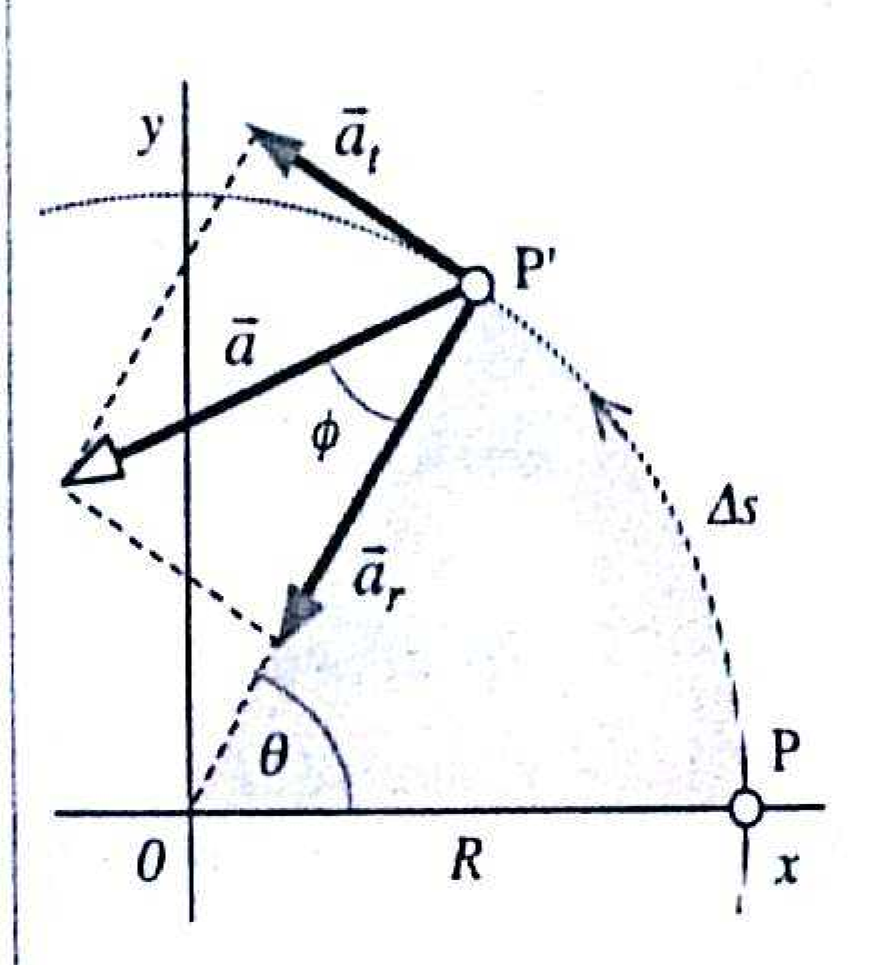
Solución: a) En este caso podemos aplicar las relaciones cinemáticas para aceleración angular constante. La velocidad angular al cabo del tiempo t = 2s es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (0{,}5\text{rad/s}^2)(2\text{s}) = 1{,}0\text{rad/s}$$

El desplazamiento angular es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2}(0{,}5\text{rad/s}^2)(2\text{s})^2 = 1\text{rad} = 57{,}3^\circ$$



El correspondiente desplazamiento tangencial a lo largo de la circunferencia es:

$$\Delta s = R\theta = (0{,}2\text{m})(1\text{rad}) = 0{,}2\text{m}$$

b) La aceleración tangencial es:

$$a_t = R\alpha = (0,2\ \text{m})(0,5\ \text{rad/s}^2) = 0,1\ \text{m/s}^2$$

La aceleración radial o centrípeta es:

$$a_r = R\omega^2 = (0,2\ \text{m})(1\ \text{rad/s})^2 = 0,2\ \text{m/s}^2$$

Ahora podemos calcular el módulo de la aceleración total:

$$|a| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(0,1\text{m/s}^2) + (0,2\text{m/s}^2)} = 0,22\text{m/s}^2$$

El ángulo con la dirección radial está dado por:

$$tg\phi = \frac{a_t}{a_r} = \frac{0,1\text{m/s}^2}{0,2\text{m/s}^2} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \phi = 26,6°$$

Respuesta:

a) $\theta = 1$ rad , $\Delta s = 0,2$ m.
b) $|\vec{a}| = 0,22$ m/s², $\phi = 26,6°$

PR-2.03. *Aceleración angular variable*

Un disco circular comienza a girar con una aceleración angular que varía con el tiempo de acuerdo a la expresión:

$$\alpha(t) = (3 - 4t)\ \text{rad/s}^2$$

a) ¿En qué momento comienza a girar en sentido opuesto?
b) Determine el ángulo que ha girado el disco antes de que comience a girar en sentido opuesto.

Solución: a) Podemos aplicar las relaciones cinemáticas para determinar el momento en que el disco se detiene instantáneamente:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)dt$$

$$\omega(t) = 0 + \int_0^t (3 - 4t)dt = 3t - 2t^2$$

$$3t - 2t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{2} = 1,5\text{s}$$

b) El ángulo que ha girado en ese tiempo está dado por:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)dt$$

$$\theta(1,5) = \int_0^{1,5} (3t - 2t^2)dt = 3(\frac{t^2}{2}) - 2(\frac{t^3}{3}) = 1,125\text{ rad}$$

Respuesta:

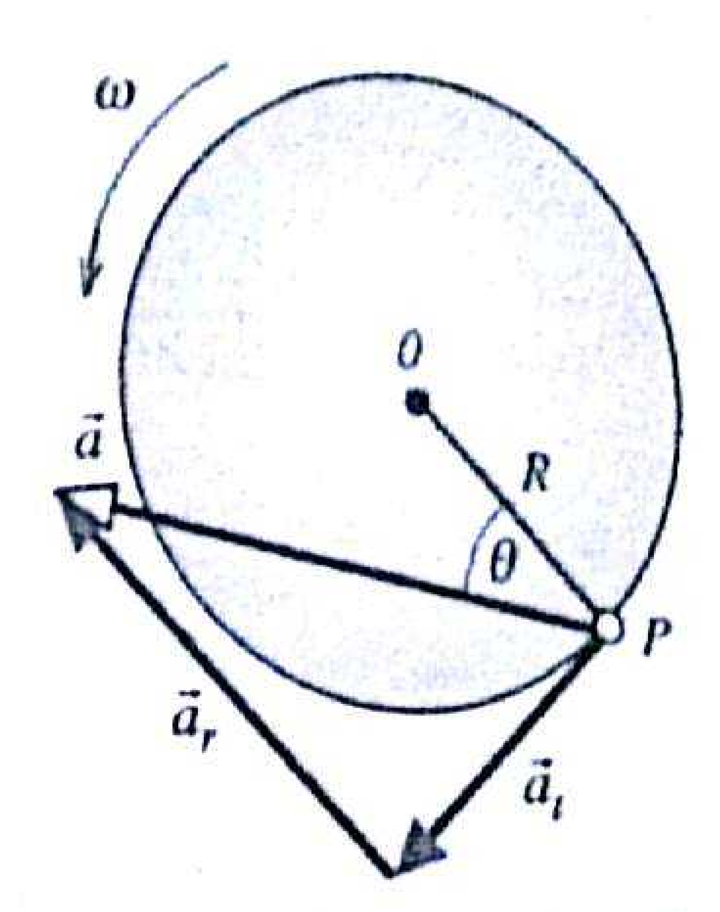
a) t = 1,5 s
b) $\theta = 1,125$ rad

PR-2.04. *Es conocido el vector aceleración lineal*

Un disco de radio $R = 1$m se encuentra girando alrededor de su eje. En cierto instante, la rapidez de un punto P de su periferia está decreciendo y el vector aceleración tiene una magnitud $a = 10$ m/s² y forma un ángulo $\theta = 30°$ con la línea radial.
a) ¿Cuál es la aceleración angular en ese instante?
b) Halle la velocidad lineal del punto P en ese instante.

Solución: a) La componente tangencial de la aceleración lineal en ese punto del disco es:

$$a_t = a\ sen\theta = (10\ \text{m/s}^2)(0,5) = 5\ \text{m/s}^2$$



Por lo tanto la aceleración angular viene dada por:

$$a_t = \alpha R \quad \Rightarrow \quad \alpha = a_t / R = (5\text{m/s}^2)/1\text{m}) = 5\ \text{rad/s}^2$$

b) La componente radial de la aceleración es:

$$a_r = a\ cos\theta = (10\ \text{m/s}^2)(0,866) = 8,66\ \text{m/s}^2$$

La velocidad lineal del punto P viene dada por:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{a_r R} = \sqrt{(8,66\text{m/s}^2)(1\text{m})} = 2,94\text{m/s}$$

Respuesta:

a) $\alpha = 5$ rad/s²
b) $v = 2,94$ m/s

PR-2.05. *¿Cuándo empezó a girar la rueda?*

Una rueda tiene una aceleración angular constante, $\alpha = 1$ rad/s². Se observa que en un intervalo $\Delta t = 4$ s, la rueda gira un ángulo $\Delta\theta = 12$ radianes. Suponiendo que la rueda había partido del reposo:
a) ¿Cuánto tiempo había estado en movimiento antes de comenzar el intervalo de 4 s?
b) ¿Qué ángulo había girado antes de comenzar dicho intervalo?

Solución: a) La rueda parte del reposo ($\omega_o = 0$). Como α es constante, al cabo de un tiempo t' (desconocido) la rueda habrá girado un ángulo $\theta(t')$:

$$\theta(t') = \omega_o t' + \alpha t'^2/2 = \alpha t'^2/2$$

Transcurridos 4 s más después del instante t', la rueda habrá girado 12 radianes adicionales. El ángulo total girado será:

$$\theta(t' + \Delta t) = \theta(t') + 12 \text{ rads} = (\alpha t'^2/2 + 12) \text{ rads}$$

Por otra parte:

$$\theta(t' + \Delta t) = \alpha(t' + 4)^2/2$$

Igualando estas dos ecuaciones:

$$\alpha t'^2/2 + 12 = \alpha t'^2/2 + 4\alpha t' + 8\alpha$$

$$t' = \frac{12 - 8\alpha}{4\alpha} = \frac{12 - 8(1)}{4(1)} = 1\text{s}$$

b) El ángulo girado previamente era:

$$\theta(1) = (1 \text{ rad/s}^2)(1\text{s})^2/2 = 0{,}5 \text{ rad}$$

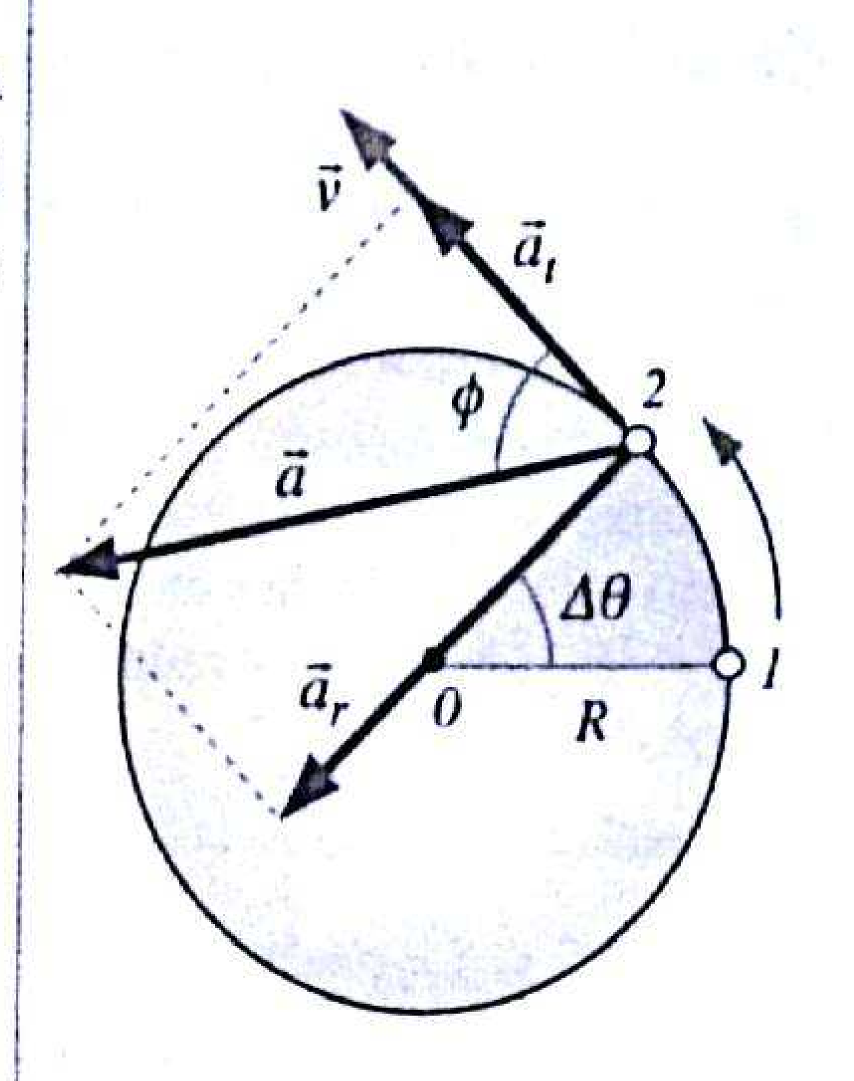
Respuesta:

a) $t' = 1$ s.
b) $\theta(1) = 0{,}5$ rad

PR-2.06. *¿Qué ángulo habrá girado ese disco?*

Un disco inicialmente en reposo, comienza a girar alrededor de un eje fijo con aceleración angular constante. ¿Cuál será el ángulo $\Delta\theta$ que habrá girado el disco cuando en un punto de su periferia el vector aceleración $\vec{a}$ forme un ángulo $\phi = 60°$ con el vector velocidad $\vec{v}$?

Solución: Supongamos que el punto de la periferia ha girado desde la posición 1 hasta la 2. Si se descompone el vector aceleración en sus dos componentes, tangencial y radial, podemos escribir:



$$tg\phi = \frac{a_r}{a_t} = \frac{\omega^2 r}{\alpha r} = \frac{\omega^2}{\alpha}$$

Como la aceleración es constante:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta = 2\alpha\Delta\theta$$

Tenemos:

$$tg\phi = \frac{2\alpha\Delta\theta}{\alpha} = 2\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} tg\phi = \frac{1}{2} tg60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad}$$

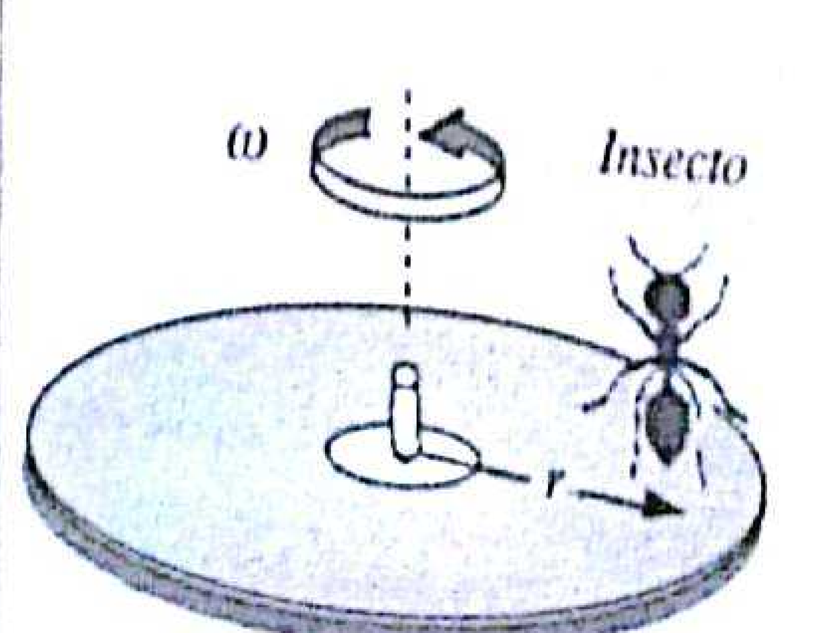
$$\Delta\theta = (\frac{\sqrt{3}}{2} rad)(\frac{360°}{2\pi rad}) = 49{,}6°$$

Respuesta:

$\Delta\theta = 49{,}6°$

PR-2.07. *Insecto que desliza sobre disco en rotación*

Un insecto se posa sobre un disco a una distancia $r = 12$ cm del eje de rotación. El coeficiente de fricción estática entre las patas del insecto y la superficie del disco es $\mu_e = 0{,}25$. Se activa el tocadiscos y el disco comienza a girar desde reposo con una aceleración angular constante $\alpha = 1{,}44$ rad/s^2. ¿Al cabo de cuánto tiempo comenzará el insecto a deslizar?



Solución: a) La fuerza de fricción estática es la que proporciona la aceleración del insecto. El máximo valor de la fuerza de fricción estática es:

$$F_e^{max} = \mu_e N = \mu_e mg$$

La aceleración máxima es:

$$a^{max} = F_e^{max}/m = \mu_e g.$$

La aceleración lineal tiene dos componentes: una tangencial y una radial o centrípeta. Si el insecto está a una distancia r del eje, mientras no deslice la magnitud de su aceleración lineal es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2}$$

Como la aceleración angular es constante: $\omega = \alpha t$. Por lo tanto, la aceleración lineal en función del tiempo es:

$$a(t) = \alpha r\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$$

El instante de tiempo en que el insecto desliza es cuando la aceleración alcanza su valor máximo:

$$a = \alpha r\sqrt{1 + \alpha^2 t^4} = \mu_e g$$

Despejando, obtenemos el tiempo que tarda en resbalar:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[(\frac{\mu_e g}{\alpha r})^2 - 1]^{1/4}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1{,}44 s^{-2}}}[(\frac{(0{,}25)(9{,}8 m\cdot s^{-2})}{(1{,}44 s^{-2})(0{,}12 m)})^2 - 1]^{1/4} = 3{,}13\ s$$

Respuesta:

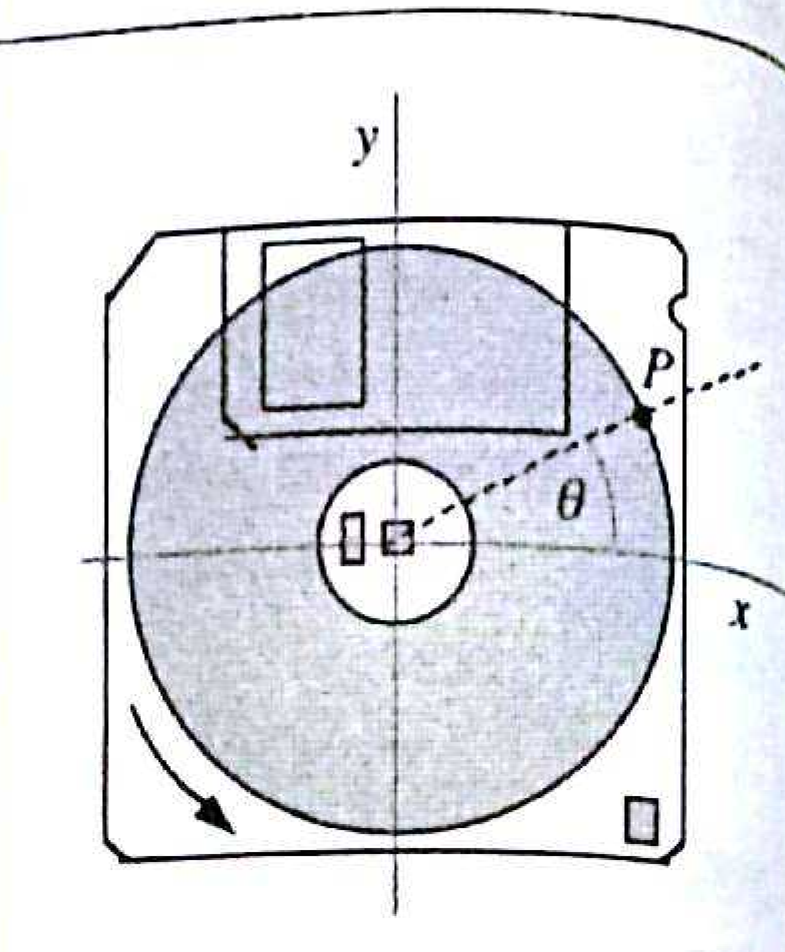
$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[(\frac{\mu_e g}{\alpha r})^2 - 1]^{1/4} = 3{,}13\ s$$

PR-2.08. *Rotación en un disco de computadora*

El ángulo de rotación (en radianes) del disco duro de una computadora durante cierta operación viene dado por la expresión:

$$\theta(t) = [2t + 0{,}5\ sen(\pi t)]\ rad$$

Donde el tiempo t está en segundos. Si el radio del disco es 4,25 cm, para un punto P ubicado en el borde determine al cabo de 0,5 s:
a) el vector velocidad, b) el vector aceleración

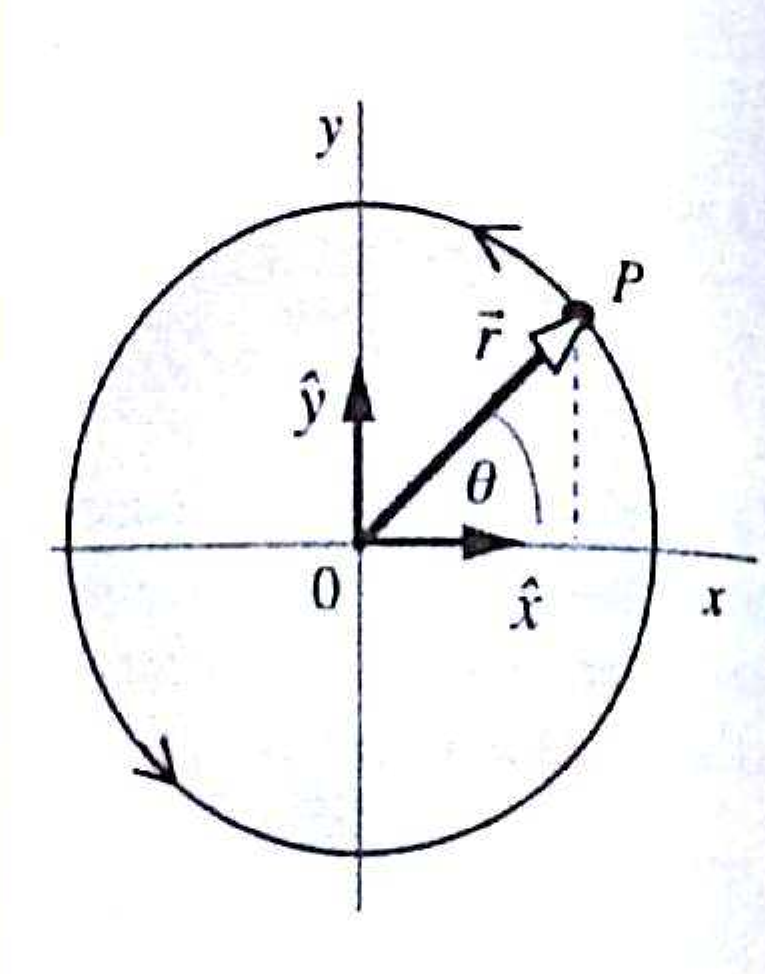


Solución: a) Como la posición angular en función del tiempo es: $\theta(t) = [2t + 0{,}5\ sen(\pi t)]$ radianes, la velocidad angular será:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = [2 + 0{,}5\pi \cos(\pi t)]\ \hat{z}\ rad/s$$

y la aceleración angular:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -0{,}5\pi^2\ sen(\pi t)\ \hat{z}\ rad/s^2$$



$$\vec{r}(t) = r[\ \hat{x}\cos\theta + \hat{y}sen\theta]$$

En el instante $t = 0{,}5$ s se tiene:

$$\theta = 2(0{,}5) + 0{,}5sen(\pi/2) = 1{,}5\ rad = 85{,}9°$$

$$\vec{r} = 4{,}25(\cos 85{,}9°\ \hat{x} + sen\ 85{,}9°\ \hat{y}) = (0{,}30\hat{x} + 4{,}24\hat{y})\ cm$$

$$\vec{\omega} = [2 + 0{,}5\pi\ (0)]\ \hat{z} = 2\ \hat{z}\ rad/s$$

$$\vec{\alpha} = -0{,}5\pi^2\ (1)\ \hat{z} = -4{,}93\ \hat{z}\ rad/s^2$$

Por lo tanto, el vector velocidad es:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = 2\hat{z}\times(0{,}30\hat{x} + 4{,}24\hat{y})\ cm/s$$

$$= [0{,}60(\hat{z}\times\hat{x}) + 8{,}48(\hat{z}\times\hat{y})]\ cm/s$$

$$\vec{v} = [0{,}60\hat{y} - 8{,}48\hat{x}]\ cm/s$$

b) Calculemos ahora la aceleración. La aceleración radial es:

$$\vec{a}_r = \vec{\omega}\times\vec{v} = 2\hat{z}\times[0{,}60\hat{y} - 8{,}48\hat{x}]\ cm/s^2$$

$$= [1{,}2\hat{z}\times\hat{y} - 17{,}0\hat{z}\times\hat{x}] = [-1{,}2\hat{x} - 17{,}0\hat{y}]\ cm/s^2$$

y la aceleración tangencial:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r} = -4{,}93\ \hat{z}\times(0{,}30\hat{x} + 4{,}24\hat{y})\ cm/s^2$$

$$= [-1{,}45\hat{z}\times\hat{x} - 20{,}9\hat{z}\times\hat{y}] = [-1{,}45\hat{y} + 20{,}9\hat{x}]\ cm/s^2$$

Finalmente, la aceleración total es:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = [19{,}7\hat{x} - 18{,}5\hat{y}]\ cm/s^2$$

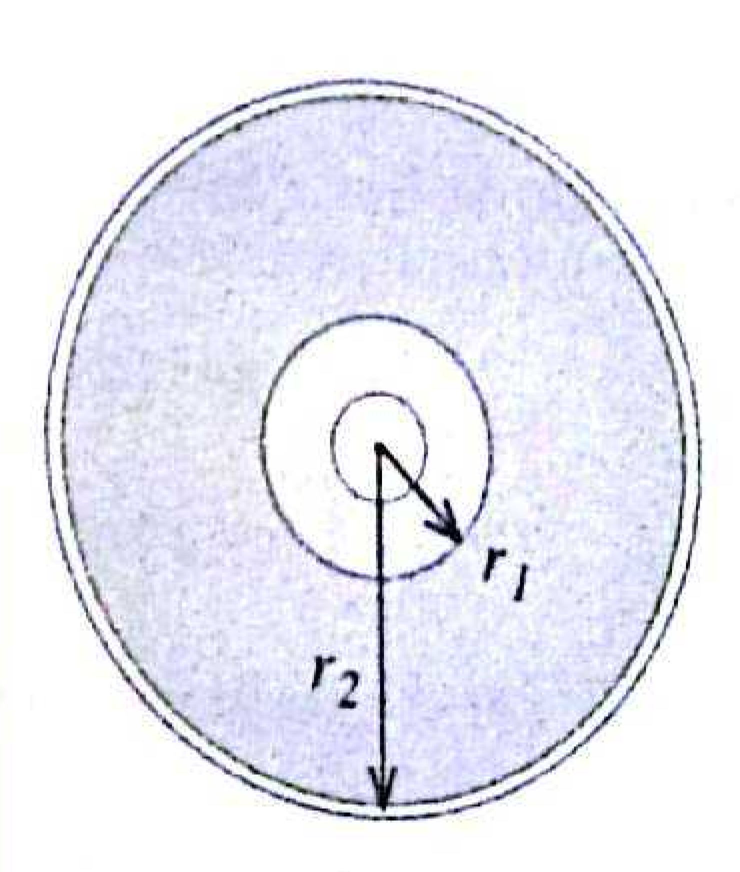
Respuesta:

a) $\vec{v} = [0{,}60\hat{y} - 8{,}48\hat{x}]$ cm/s
b) $\vec{a} = [19{,}7\hat{x} - 18{,}5\hat{y}]$ cm/s²

PR-2.09. *Rotación variable de un disco compacto (CD).*

Un disco compacto tiene su material grabado de música digital desde un radio interior r_1 = 2,5 cm hasta un radio exterior r_2 = 5,80 cm. El disco es barrido por el cabezal a una velocidad lineal constante v = 1,30 m/s, comenzando desde su radio interior y moviéndose hacia afuera en una trayectoria espiral.

a) ¿Cuáles son las velocidades angulares inicial y final?
b) ¿Si el tiempo de duración de la música es 75 min, cuál es la longitud total de barrido?
c) ¿Cuál es la aceleración angular media?



Solución: a) Las velocidades angulares del disco son:

$$\text{Inicial: } \omega_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{1{,}30 m/s}{0{,}025 m} = 52 rad/s$$

$$\text{Final: } \omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{1{,}30 m/s}{0{,}058 m} = 22{,}4 rad/s$$

b) La longitud total del recorrido en espiral es:

$$L = vt = (1.30 m/s)(75 min)(60 s/min) = 5850 m$$

c) La aceleración angular media en ese intervalo de tiempo es:

$$<\alpha> = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{(22{,}4 - 52) rad/s}{(75 min)(60 s/min)} = -6{,}58 x 10^3 rad/s^2$$

Respuesta:

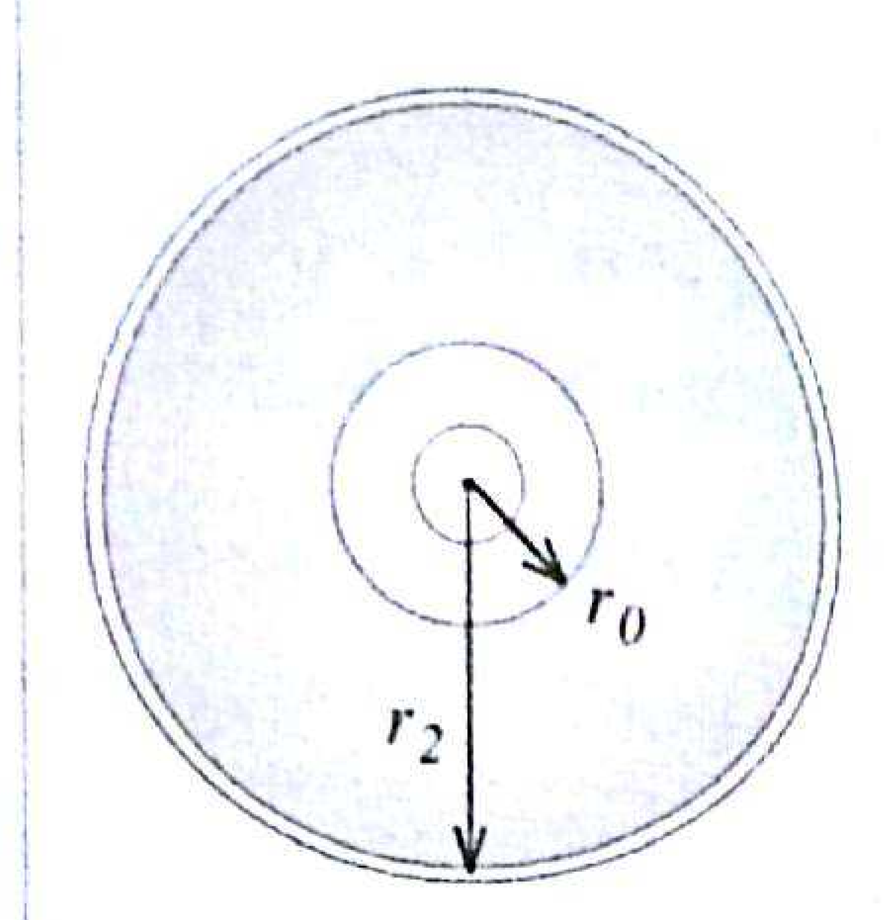
a) ω_1 = 52 rad/s
   ω_2 = 22,4 rad/s
b) L = 5850 m
c) $<\alpha>$ = - 6,58x10⁻³ rad/s²

PR-2.10. *Número de vueltas del disco compacto (CD).*

Un disco compacto de música digital es barrido por el cabezal a una velocidad lineal constante v, desde su radio interior r_0, moviéndose hacia fuera de modo que el radio va incrementándose y su trayectoria resulta una espiral.

$$r(\theta) = r_0 + \beta\theta$$

Donde β es una constante positiva. Determine:
a) La longitud total barrida en función del ángulo θ.
b) La posición angular $\theta(t)$ en función del tiempo.
c) La velocidad angular $\omega(t)$ y la aceleración angular $\alpha(t)$ en función del tiempo.
d) Suponga que las constantes numéricas son las siguientes: v = 1,25 m/s, r_0 = 2,5 cm, β = 0,247 μm/rad, ¿Cuántas vueltas da el disco si la duración total de la música es t = 74 minutos (= 4440 s)?



Solución: a) Para obtener la longitud total barrida en función del ángulo θ, escribimos:

$$ds = rd\theta = (r_0 + \beta\theta)d\theta$$

$$s(\theta) = \int_0^\theta (r_0 + \beta\theta)d\theta = r_0\theta + \frac{\beta}{2}\theta^2$$

b) Como $s(\theta) = vt$, obtenemos una ecuación cuadrática en θ:

$$s(\theta) = vt = r_0\theta + \frac{\beta}{2}\theta^2$$

$$\beta\theta^2 + 2r_0\theta - 2vt = 0$$

Tomando la raíz positiva:

$$\theta(t) = \frac{1}{\beta}[-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}]$$

c) La velocidad angular $\omega(t)$ y la aceleración angular $\alpha(t)$ en función del tiempo son, respectivamente:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$$

Respuesta:

a) $s(\theta) = r_0\theta + \frac{\beta}{2}\theta^2$

b) $\theta(t) = \frac{1}{\beta}[-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}]$

c) $\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}$

$\alpha(t) = -\frac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$

d) Usando los valores numéricos suministrados, el ángulo girado es:

$$\theta(t) = \frac{-0{,}025 + \sqrt{(0{,}025)^2 + 2(2{,}47\text{x}10^{-7})(1{,}250(4440)}}{2{,}47\text{x}10^{-7}}$$

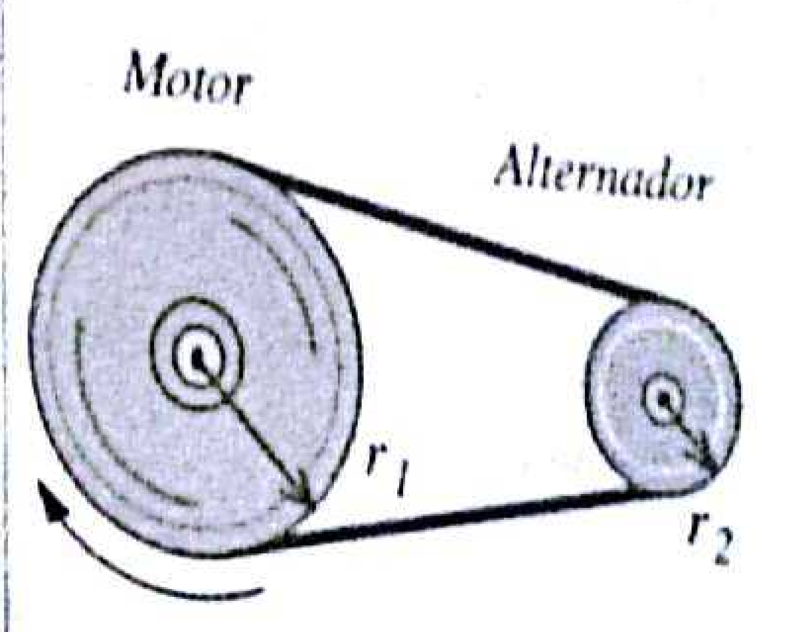
$$\theta = 1{,}34\text{x}10^5 \text{rad} = 2{,}13\text{x}10^4 \text{ vueltas}$$

Respuesta:

d) N = 21300 vueltas

PR-2.11. *Acoplamiento del motor al alternador*

En cierto automóvil la polea del motor de radio r_1 = 10 cm, está acoplada mediante una correa a la polea del alternador de radio r_2 = 6 cm. La polea motora parte del reposo y se acelera a un ritmo α_1 = 1,2 rad/s². Se supone que la correa no resbala sobre las poleas.
a) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea del alternador?
b) ¿Cuánto tarda la polea del alternador en alcanzar una velocidad angular ω_2 = 120 rev/min?



Solución: a) Como la correa no resbala, la velocidad lineal de los puntos en la periferia de las dos poleas deben ser iguales:

$$v_1 = v_2$$

Esto permite relacionar las dos velocidades angulares:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1(\frac{r_1}{r_2})$$

Para hallar la aceleración angular de la polea 2, derivamos esta expresión respecto al tiempo:

$$\alpha_2 = \frac{d}{dt}\omega_2 = (\frac{r_1}{r_2})\frac{d}{dt}\omega_1 = (\frac{r_1}{r_2})\alpha_1$$

$$\alpha_2 = (\frac{0{,}1\text{m}}{0{,}06\text{m}})(1{,}2\text{rad/s}^2) = 2\text{rad/s}^2$$

b) La polea parte de reposo ($\omega_{20} = 0$) y para hallar el tiempo que tarda en alcanzar la velocidad angular final, tenemos:

$$\omega_2 = \omega_{20} + \alpha_2 t$$

$$t = \frac{\omega_2}{\alpha_2} = \frac{(120\text{rev/min})(2\pi\text{rad/rev})/(60\text{s/min})}{2\text{rad/s}^2} = 6{,}28\text{s}$$

Respuesta:

a) $\alpha_2 = (\frac{r_1}{r_2})\alpha_1 = 2\text{rad/s}^2$

b) t = 6,28 s

PR-2.12. ***Velocidad angular decrece exponencialmente***

Un cuerpo rígido está girando con una velocidad angular que decrece con el ángulo rotado según la expresión:

$$\omega = \omega_0 - A\phi$$

Donde ω_0 y A son constantes. Hallar la dependencia en función del tiempo de:

a) El ángulo de giro.

b) La velocidad angular

Solución: a) Partiendo de la definición de la velocidad angular podemos escribir:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - A\phi$$

Al separar variables, se tiene:

$$\frac{d\phi}{\omega_0 - A\phi} = dt$$

Integrando:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\omega_0 - A\phi} = \int_0^t dt$$

$$\ln(\omega_0 - A\phi)\Big|_0^{\phi} = -At$$

$$\frac{\omega_0 - A\phi}{\omega_0} = e^{-At}$$

El ángulo de giro en función del tiempo es:

$$\phi(t) = \frac{\omega_0}{A}(1 - e^{-At})$$

b) La velocidad angular en función del tiempo es:

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 e^{-At}$$

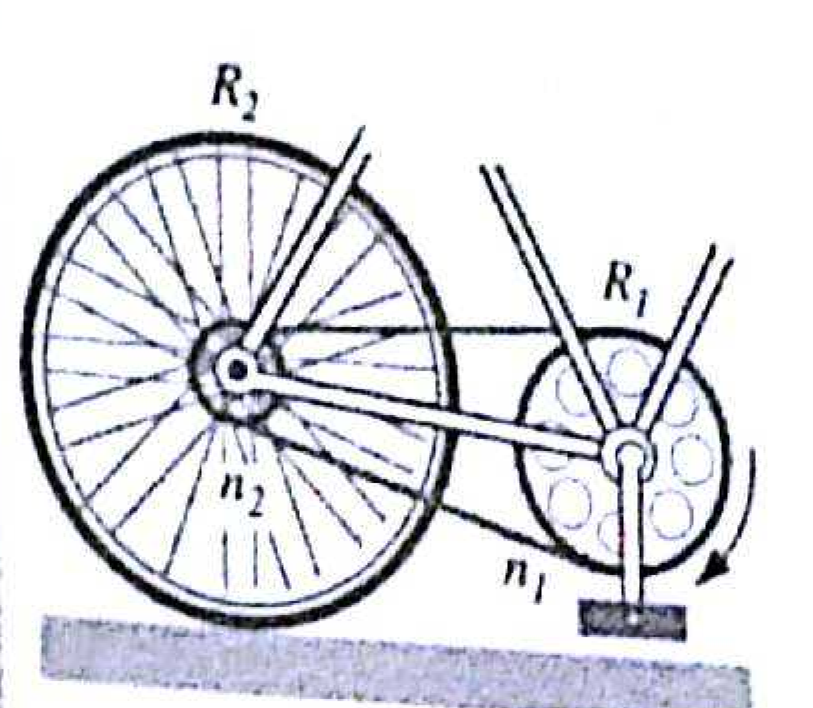
Respuesta

a) $\phi(t) = \frac{\omega_0}{A}(1 - e^{-At})$

b) $\omega(t) = \omega_0 e^{-At}$

PR-2.12. ***Rotación de pedales y la traslación de la bici***

En una bicicleta, el movimiento de la rueda dentada de los pedales se transmite mediante una cadena a otra rueda dentada mas pequeña, que está montada en el mismo eje de la rueda trasera. Suponga que el piñón de los pedales tiene $n_1 = 40$ dientes, el piñón de la rueda trasera tiene $n_2 = 16$ dientes y la rueda trasera tiene un radio $R = 0{,}5$ m. La bicicleta parte del reposo y al cabo de un tiempo $t = 1$ min, el piñón de los pedales alcanza una velocidad angular $\omega_1 = 50$ rev/min. Suponiendo que la bicicleta se desplaza con aceleración constante, ¿qué longitud habrá recorrido durante ese intervalo de tiempo?



Solución: a) El movimiento circular ocurre con aceleración angular constante y $\omega_0 = 0$, por lo tanto el ángulo que ha girado la rueda trasera en ese tiempo es:

$$\Delta\theta = \overline{\omega}t = \left(\frac{\omega_2 + \omega_0}{2}\right)t = \frac{\omega_2 t}{2}$$

Como las ruedas no deslizan, el espacio recorrido por la bicicleta en ese intervalo de tiempo es:

$$\Delta s = R\Delta\theta = R\frac{\omega_2 t}{2}$$

Los dientes de ambos piñones encajan con igual ancho en la cadena de transmisión, por lo tanto:

$$\frac{2\pi r_1}{n_1} = \frac{2\pi r_2}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Las velocidades tangenciales de los puntos de la periferia de ambos piñones respecto a sus ejes serán iguales a la velocidad de los puntos de la cadena, v_c:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \omega_1\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Reemplazando la expresión de ω_2, obtenemos la longitud recorrida por la bicicleta:

$$\Delta s = \frac{R\omega_1 t}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$\Delta s = \frac{(0{,}5\text{m})(50\text{rev/min})(2\pi\text{rad/rev})(1\text{min})}{2}\left(\frac{40}{16}\right) = 196\text{m}$$

Respuesta

$\Delta s = \frac{R\omega_1 t}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = 196$ m

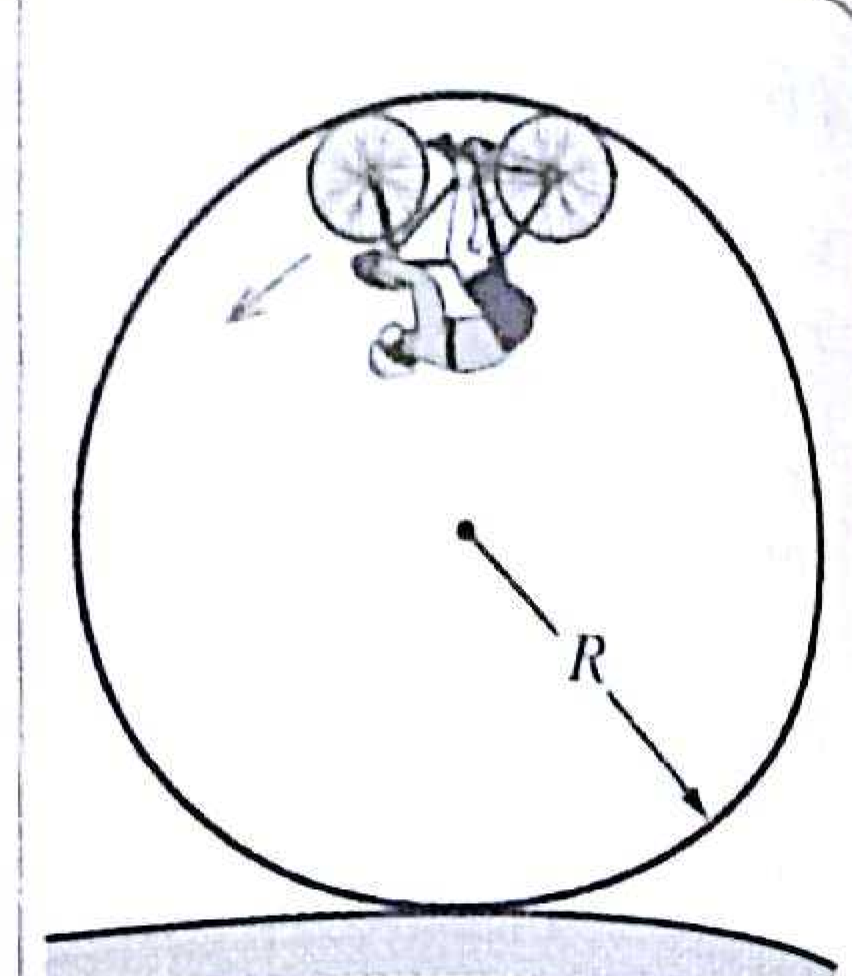
PR-2.13. *Rizando el rizo en bicicleta*

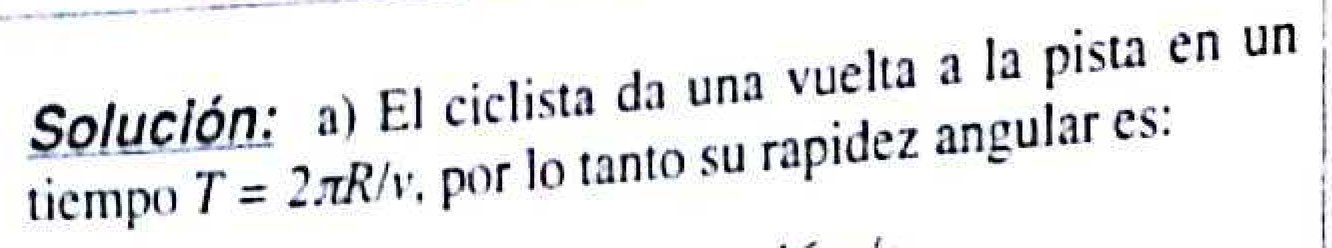
En un espectáculo de circo llamado *el rizo de la muerte*, un ciclista recorre una pista circular vertical de radio R = 8 m. a una rapidez constante v = 16 m/s. El radio de cada rueda de la bicicleta es r = 0,25 m. Suponga que las ruedas de la bicicleta no deslizan. Determine:

a) La velocidad angular del ciclista respecto a un observador fijo en la pista.

b) La velocidad angular de cada rueda respecto al ciclista.

c) La velocidad angular de cada rueda respecto a un observador fijo en la pista.



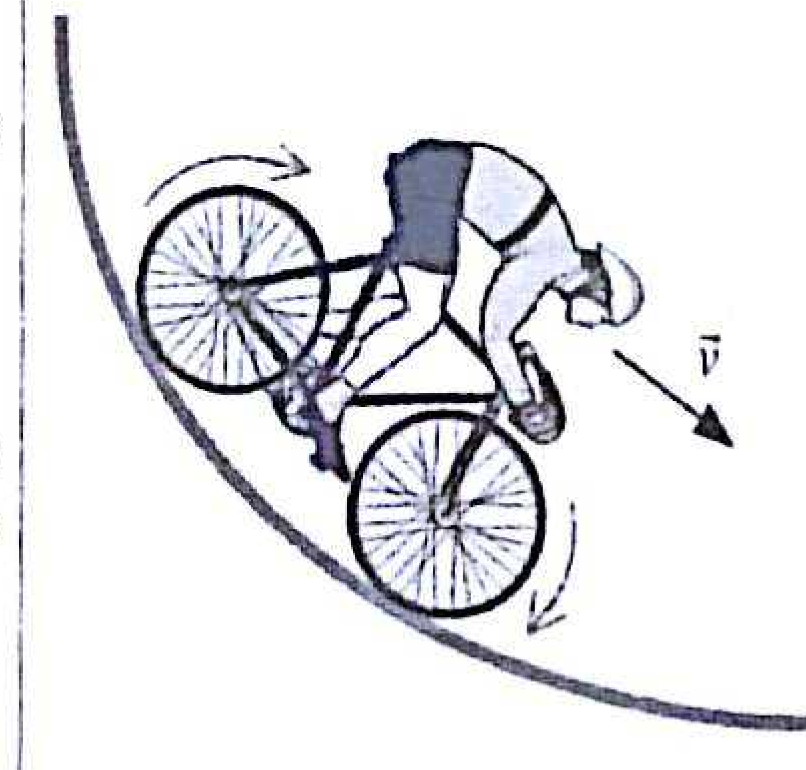


Solución: a) El ciclista da una vuelta a la pista en un tiempo $T = 2\pi R/v$, por lo tanto su rapidez angular es:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi R/v} = \frac{v}{R} = \frac{16\text{m/s}}{8\text{m}} = 2\text{rad/s}$$

El vector velocidad angular es perpendicular al plano vertical de la pista y apunta hacia nosotros:

$\vec{\omega}_c = 2\hat{z}$ rad/s. ($\hat{z}$ vector unitario $\perp$ al papel)

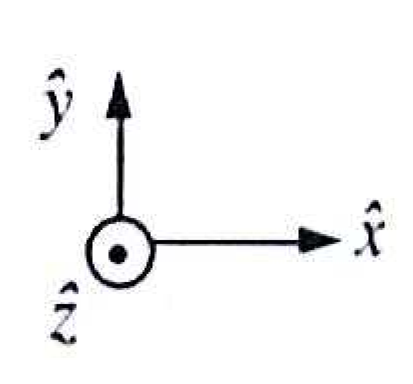


b) Durante cada vuelta a la pista, el ciclista recorre una longitud total $2\pi R_c$, de modo que el número de vueltas de cada rueda en este tiempo será:

$$N = 2\pi R/2\pi r = R/r$$

y el período de tiempo de cada vuelta de la rueda será:

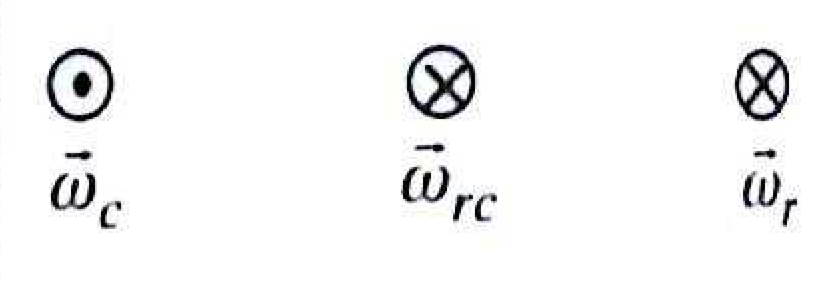
$$T_r = T_c/N = T_c\,(r/R)$$



La rapidez angular de cada rueda respecto al ciclista es:

$$\omega_{rc} = 2\pi/T_r = 2\pi R/rT_c = \omega_c R/r$$

$$= (2\text{ rad/s})(8\text{ m})/(0{,}25\text{m}) = 64\text{ rad/s}.$$



El vector $\vec{\omega}_{rc}$ apunta en dirección perpendicular al plano del papel y "entrando" al mismo:

$$\vec{\omega}_{rc} = -64\hat{z}\text{ rad/s.}$$

c) Finalmente, con respecto a un observador fijo en la pista, la velocidad angular de cada rueda es:

$$\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_{rc} + \vec{\omega}_c = (-64\hat{z} + 2\hat{z})\text{ rad/s.} = -62\hat{z}\text{ rad/s}$$

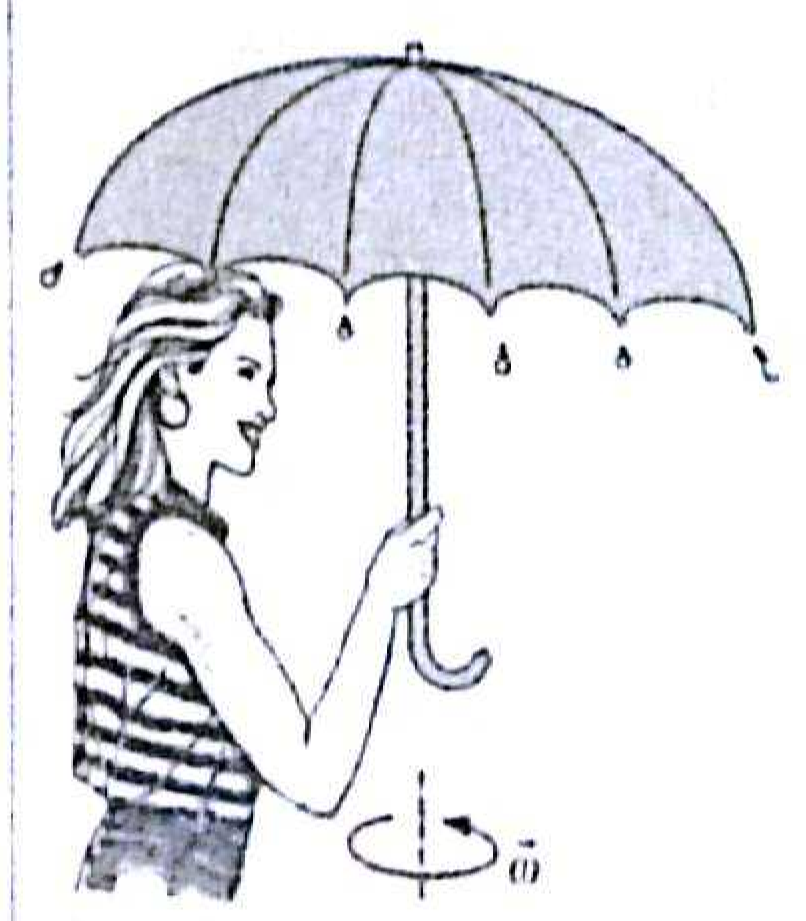
Respuesta:

a) $\vec{\omega}_c = +2\hat{z}$ rad/s
b) $\vec{\omega}_{rc} = -64\hat{z}$ rad/s
c) $\vec{\omega}_r = -62\hat{z}$ rad/s)

PR-2.14. *Girando un paraguas mojado*

Una alumna sostiene un paraguas mojado y lo gira alrededor de su eje vertical, a una rapidez angular de una revolución por segundo. El paraguas tiene un borde exterior de radio R = 0,5 m que está ubicado en un plano horizontal a una altura de H = 2 m por encima del suelo.

Respecto del origen O situado en el eje del paraguas, determine la posición en el piso de las gotas de agua que se desprenden del borde.

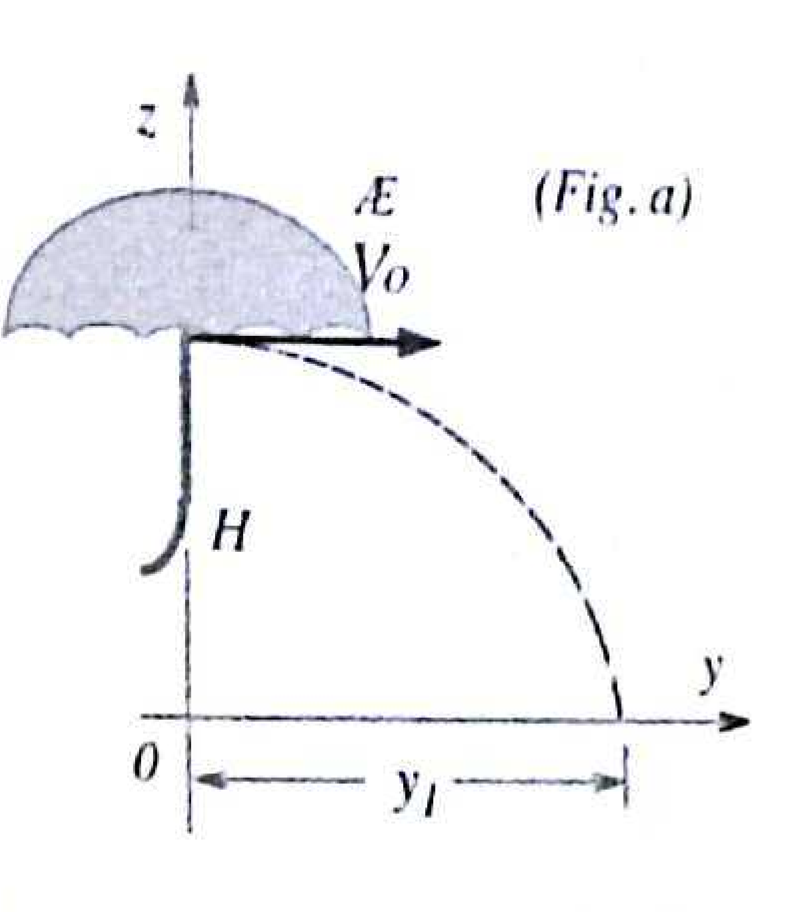


Solución: La rapidez angular de una gota es:

$$\omega = 1\text{ rev/s} = (1\text{rev/s})\,(2\pi\text{ rad/rev}) = 2\pi\text{ rad/s}.$$

y la velocidad horizontal antes de desprenderse del paraguas:

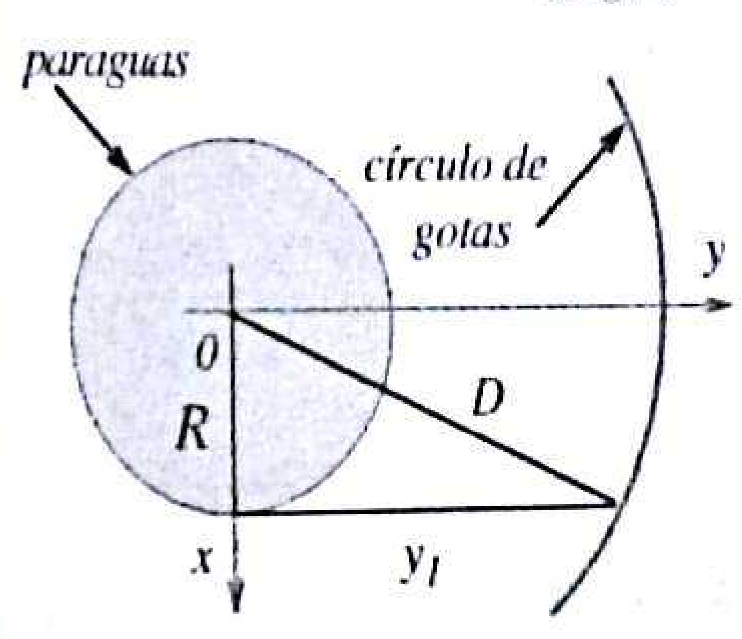
$$v_o = \omega R = (\,2\pi\text{ rad/s.})\,(0{,}5\text{ m}) = \pi\text{ m/s}.$$



La gota viajará en el aire siguiendo una trayectoria parabólica (ver figura a). La componente vertical de velocidad inicial es cero (v_{oy} = 0) y el tiempo que tarda la gota en caer una altura H está dado por:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(2\text{m})}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 0{,}64\text{s}$$

(Fig.b)



A la velocidad constante v_o la distancia horizontal recorrida en este tiempo es:

$$y_1 = v_o t = (\pi\text{ m/s})(0{,}64\text{ s}) = 2{,}01\text{ m}.$$

Como se ilustra en la Figura b, el punto en el suelo donde cae la gota queda a una distancia D del eje de giro:

$$D = \sqrt{y_1^2 + R^2} = \sqrt{(2{,}01\text{m})^2 + (0{,}5\text{m})^2} = 2.07\text{ m}$$

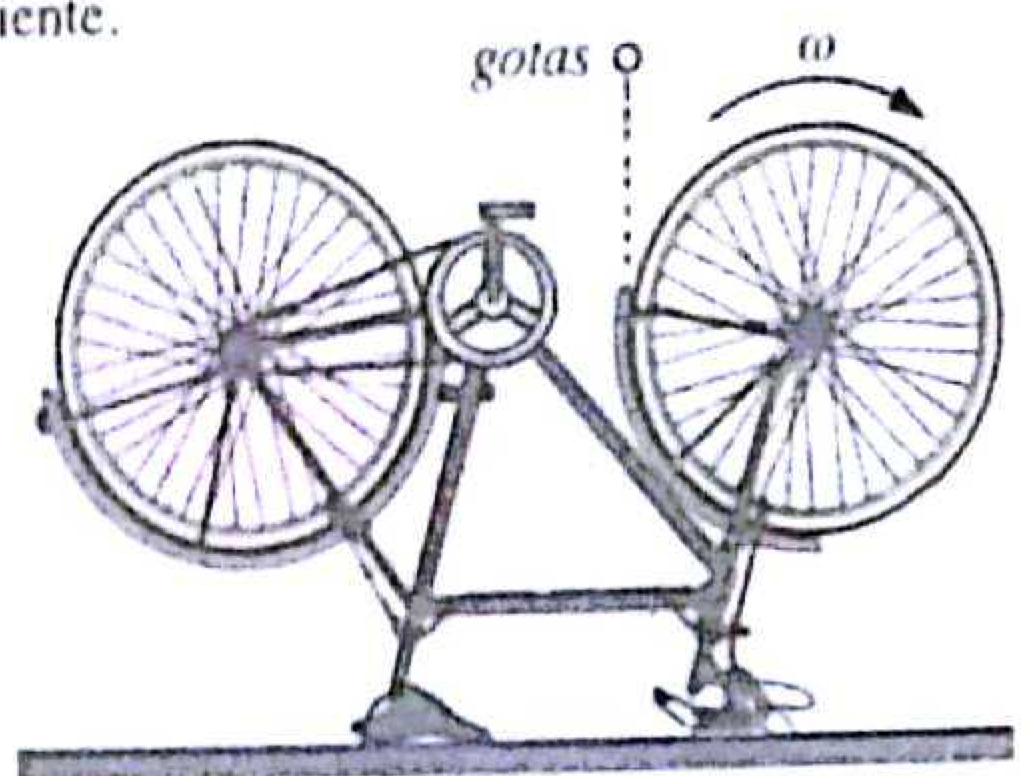
El resultado es igual para una gota que se desprende de cualquier otra posición del borde del paraguas. Por consiguiente, las gotas caerán en el suelo formando un círculo de radio 2,07 m alrededor del punto O.

Respuesta:

Círculo de radio 2,07 m

PR-2.15. *Gotas de agua saltan desde una rueda*

Una bicicleta se voltea y se pone a girar su rueda trasera de radio $R = 0,4$ m con una velocidad angular linealmente decreciente.



Se observa que cuando una gota de agua sale verticalmente desprendida de la rueda, asciende hasta una altura $h_1 = 0,68$ m Mientras que una gota que sale en la siguiente vuelta asciende hasta una altura menor $h_2 = 0,63$ m ¿Cuál será la aceleración angular de la rueda?

Solución: La primera gota abandona la rueda con una velocidad que podemos hallar aplicando la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

De manera similar obtenemos la velocidad con que sale la siguiente gota: $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Las velocidades angulares correspondientes son:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{R} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{R}$$

La aceleración angular de la rueda es:

$$\alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\theta} = \frac{2gh_2/R^2 - 2gh_1/R^2}{2(2\pi)} = -\frac{g(h_2 - h_1)}{2\pi R^2}$$

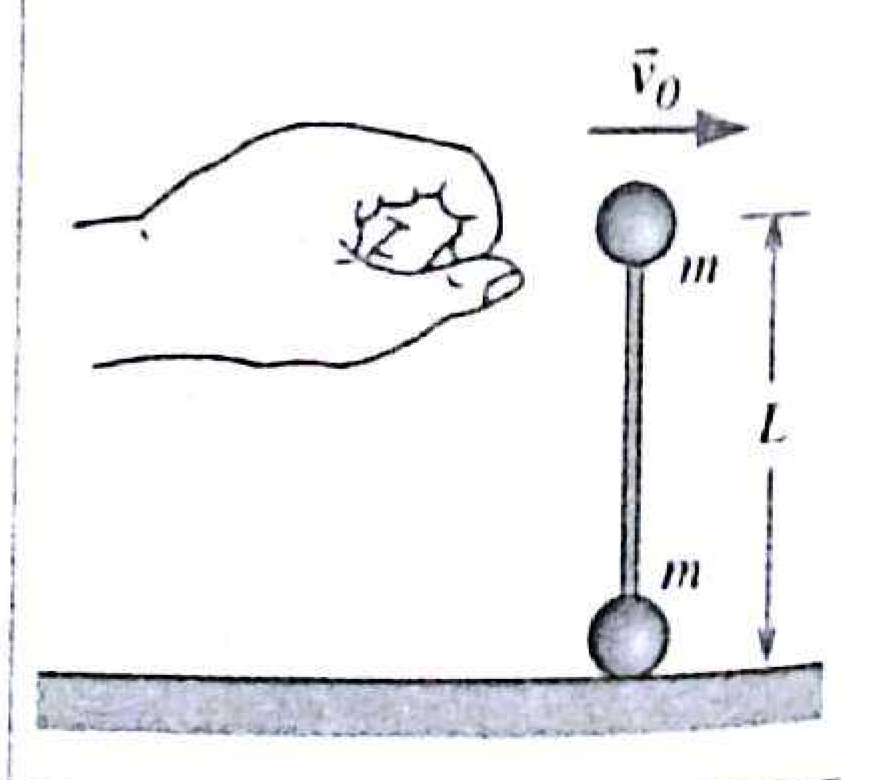
$$\alpha = -\frac{(9,8\text{m/s}^2)(0,68\text{m} - 0,63\text{m})}{2\pi(0,4\text{m})^2} = -0,487\text{rad/s}^2$$

Respuesta

$$\alpha = -\frac{g(h_2 - h_1)}{2\pi R^2} = -0,487\text{rad/s}^2$$

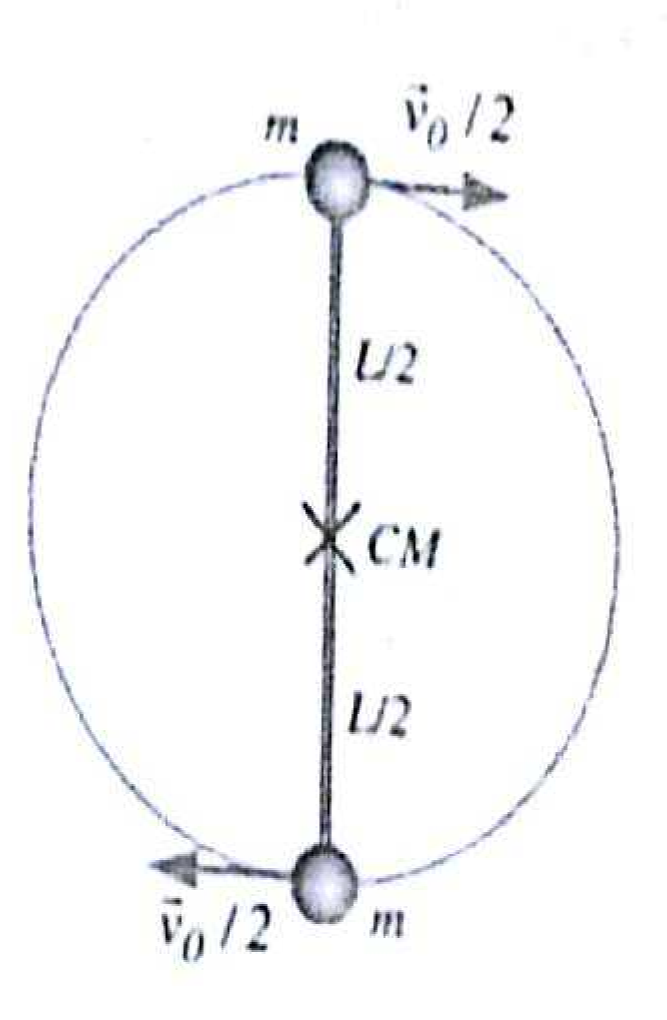
PR-2.16. *Un golpe seco sobre esferitas*

Dos esferitas de masa m están conectadas mediante una barra de longitud L y de masa despreciable. Se coloca el sistema en forma vertical sobre una mesa horizontal lisa y luego, mediante un golpe a la esferita superior, se le comunica una velocidad horizontal v_o. ¿Cuál debe ser el valor mínimo de v_o para que la esferita inferior se separe inmediatamente de la mesa?



Solución: Al darle a la bolita superior una velocidad horizontal v_0, el CM del sistema se traslada con la velocidad:

$$v_{cm} = \frac{mv_0 + m\cdot 0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$$



En el marco de coordenadas del centro de masa ambas bolitas giran alrededor del centro de la barra con velocidad $v_0/2$. Para que la bolita inferior se separe de la mesa, su aceleración centrípeta debe ser superior a la aceleración de la gravedad, g

$$a_c = m\frac{(v_0/2)^2}{L/2} = \frac{v_0^2}{2L} \geq g$$

Por lo tanto, el menor valor de v_0 es:

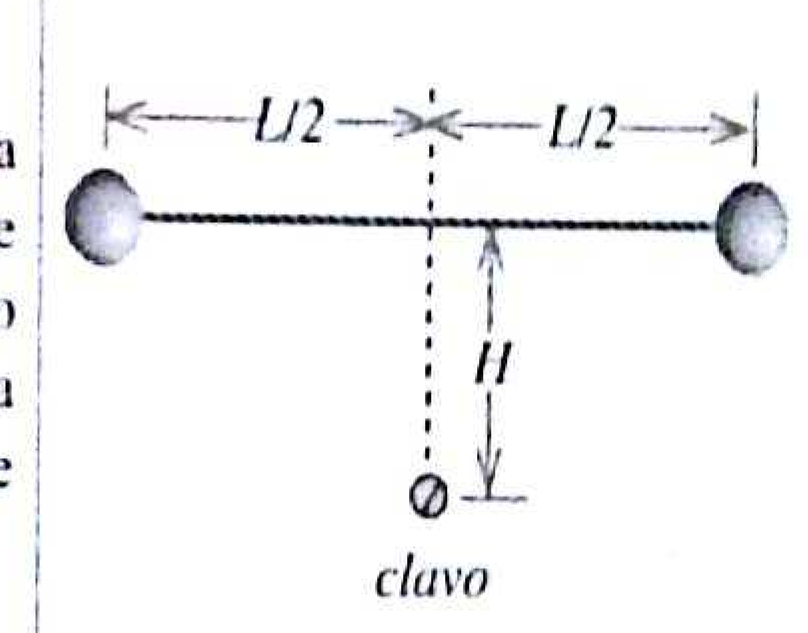
$$v_0 = \sqrt{2Lg}$$

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{2Lg}$$

PR-2.17. *¿Tensión de la cuerda al pegar con el clavo?*

Dos esferitas idénticas de masa m están unidas por una cuerda ligera e inextensible de longitud L. Las esferitas se colocan estando la cuerda horizontal con su punto medio por encima de un clavo. ¿Si se dejan caer desde una altura H, cuál será la tensión de la cuerda inmediatamente después de haber hecho contacto con el clavo?



Solución: Aplicando la conservación de la energía, hallamos la velocidad con que el centro de masa del sistema pega con el clavo:

$$\frac{1}{2}(2m)v^2 = (2m)gH$$

$$v = \sqrt{2gH}$$

La tensión T que ejerce el clavo sobre la cuerda obliga a las dos esferitas a moverse en un círculo de radio $L/2$. Aplicando la segunda ley de Newton

$$T = m\frac{v^2}{r} = m\frac{2gH}{(L/2)} = \frac{4mgH}{L}$$

Respuesta:

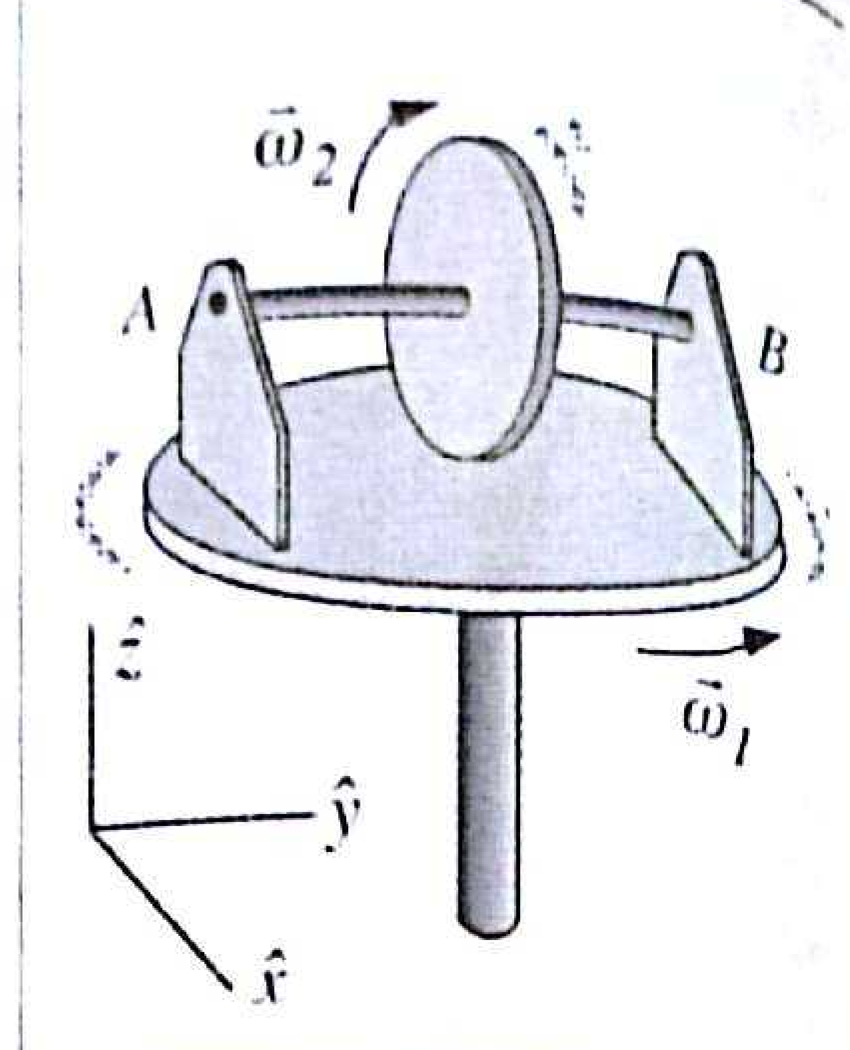
$$T = \frac{4mgH}{L}$$

PR-2.18. *Adición vectorial de velocidades angulares*

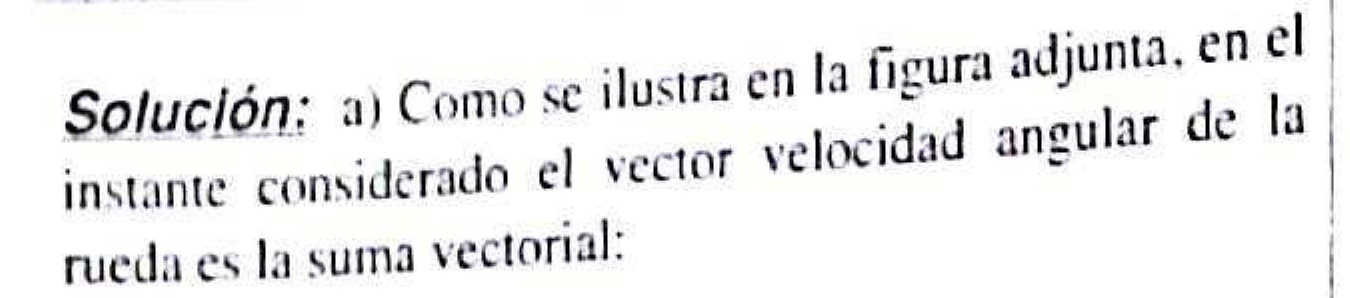
Una rueda está montada sobre soportes fijos a una plataforma giratoria como se indica en la figura. La rueda gira con rapidez angular $\omega_2 = 40$ rad/s alrededor de su eje horizontal mientras que la plataforma gira con rapidez angular $\omega_1 = 30$ rad/s alrededor de su eje vertical.

a) Según un observador externo, ¿cuál será en el instante mostrado en el dibujo, el módulo y la dirección del vector velocidad angular de la rueda?

b) ¿Cuál será el módulo y la dirección del vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ de la rueda en ese instante?



Solución: a) Como se ilustra en la figura adjunta, en el instante considerado el vector velocidad angular de la rueda es la suma vectorial:



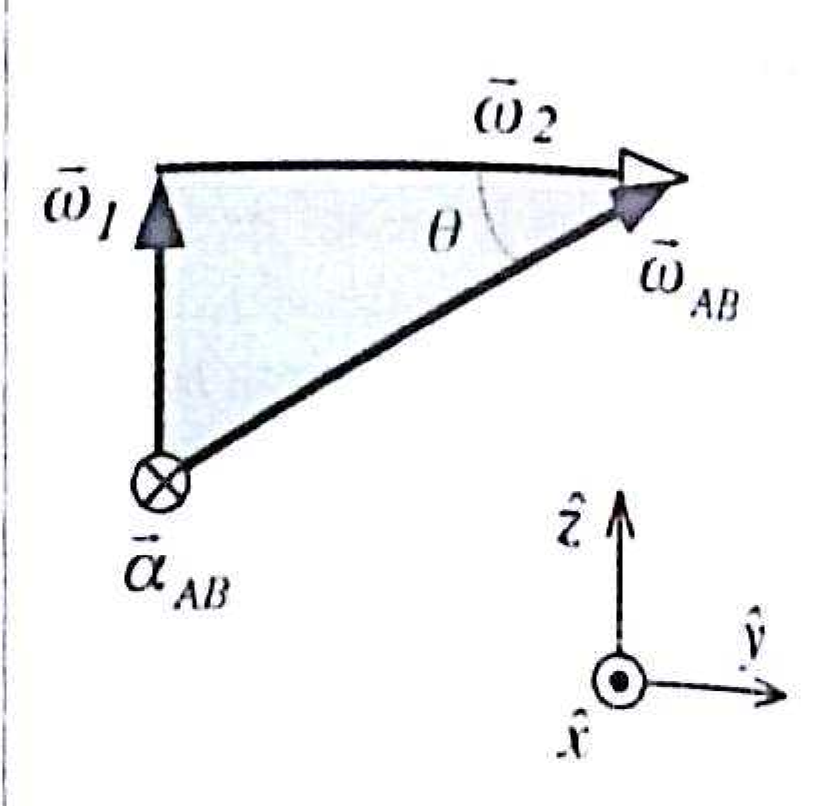
$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = (30\hat{z} + 40\hat{y}) \text{ rad/s.}$$

cuyo módulo es:

$$|\vec{\omega}_{AB}| = [\omega_1^2 + \omega_2^2]^{1/2} = [30^2 + 40^2]^{1/2} = 50 \text{ rad/s}$$

El vector $\vec{\omega}_{AB}$ forma un ángulo θ con la horizontal:

$$tg\theta = (\omega_1/\omega_2) = 30/40 = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36.9°$$



b) Para calcular la aceleración angular derivamos el vector $\vec{\omega}_{AB}$:

$$\vec{\alpha}_{AB} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{AB} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_1 + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_2 = \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}$$

Donde hemos tomado en cuenta que el vector $\vec{\omega}_1$ no varía ni en módulo ni en dirección ($d\vec{\omega}_1/dt = 0$). Por otra parte el vector $\vec{\omega}_2$ es de módulo constante y gira alrededor del eje z con velocidad angular $\vec{\omega}_1$, por lo tanto:

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = (30\hat{z}) \times (40\hat{y}) = -1200\hat{x} \text{ rad/s}^2$$

El vector $\vec{\alpha}_{AB}$ queda en dirección perpendicular y entrando al plano del papel.

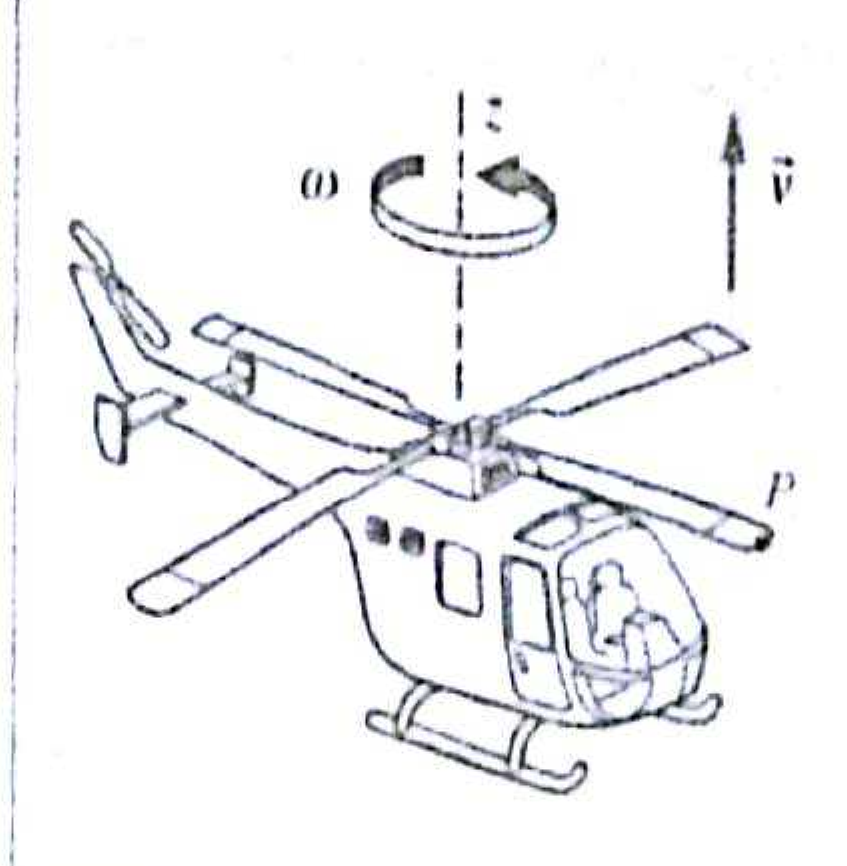
Respuesta:

a) $\vec{\omega}_{AB} = (30\hat{z} + 40\hat{y})$ rad/s
b) $\vec{\alpha}_{AB} = -1200\hat{x}$ rad/s^2

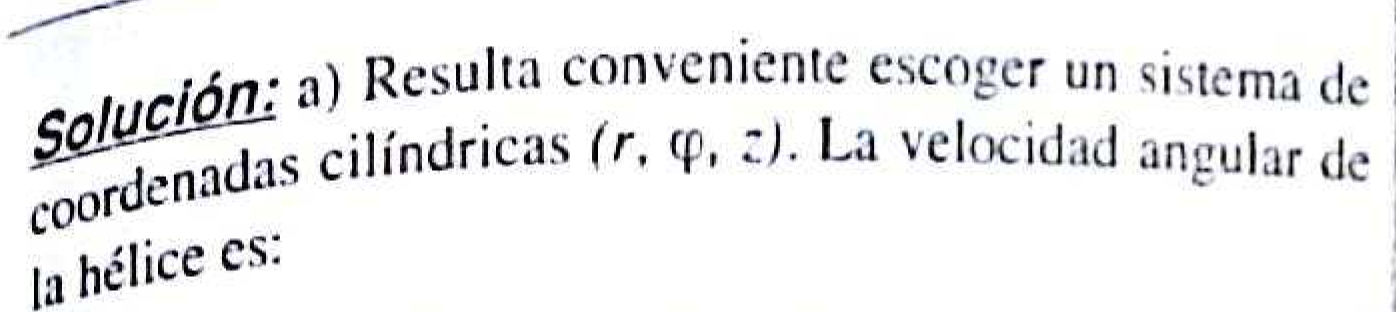
PR-2.19. *Movimiento de la hélice de un helicóptero*

En cierto instante, un helicóptero está ascendiendo con una velocidad vertical de 10 m/s y una aceleración de 0,5 m/s^2. La hélice principal tiene un radio R = 5 m, está orientada en un plano horizontal y gira a una velocidad angular ω = 300 rpm. Para un punto P ubicado en el extremo de la hélice, y respecto de un observador que está fijo en tierra, determine en ese instante:

a) El vector velocidad $\vec{v}_P$, b) La aceleración $\vec{a}_P$.



Solución: a) Resulta conveniente escoger un sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ, z). La velocidad angular de la hélice es:

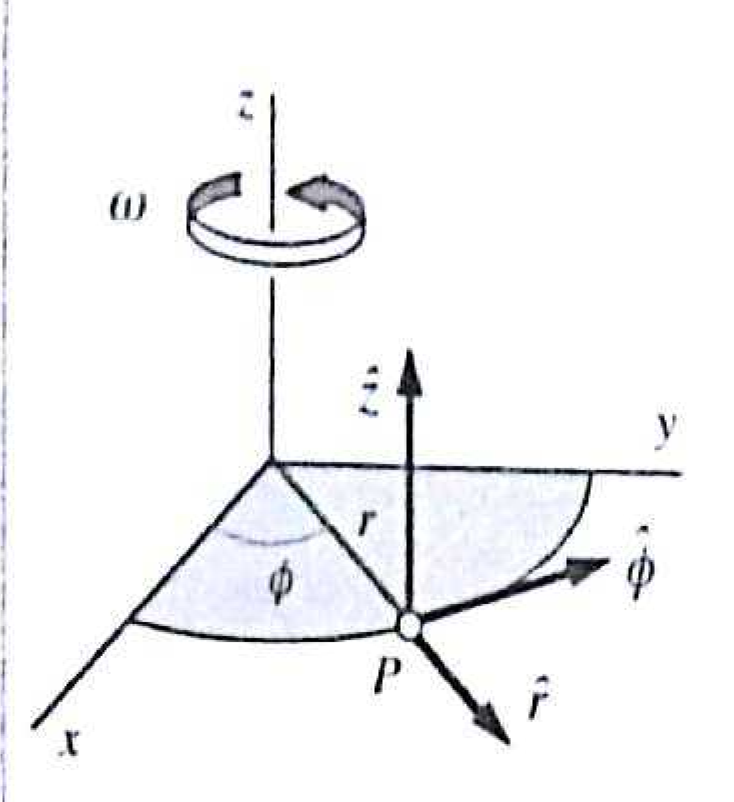


$$\vec{\omega} = \frac{(300\text{rev/min}(2\pi\text{rad/rev})}{(60\text{s/min})}\hat{z} = 10\pi\hat{z} \text{ rad/s}$$

La velocidad tangencial del punto P en el borde de la hélice que tiene un vector posición $\vec{r} = 5\hat{r}$ m, es:

$$\vec{v}_\phi = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}_\phi = (10\pi\hat{z}\text{rad/s}) \times (5\hat{r}\text{m}) = 50\pi(\hat{z} \times \hat{r})\text{m/s} = 50\pi\hat{\phi} \text{ m/s}$$



La velocidad total $\vec{v}$ del punto P es la suma vectorial de su velocidad respecto del centro de la hélice y la velocidad de traslación de la hélice:

$$\vec{v} = \vec{v}_\phi + \vec{v}_z = (50\pi\hat{\phi} + 10\hat{z}) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(50\pi^2)^2 + (10)^2} \text{ m/s} = 157 \text{ m/s}$$

b) La aceleración tangencial del punto P es cero,

$$\vec{a}_\phi = \vec{\alpha} \times \vec{r} = 0$$

y la aceleración radial: $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}_\phi = (10\pi\hat{z}) \times (50\pi\hat{\phi}) =$

$$\vec{a}_r = 500\pi^2(\hat{z} \times \hat{\phi}) \text{ m/s}^2 = -500\pi^2\hat{r} \text{ m/s}^2.$$

La aceleración total es:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\phi + \vec{a}_z = (-500\pi^2\hat{r} + 0{,}5\hat{z}) \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(500\pi^2)^2 + (0{,}5)^2} \text{ m/s}^2 = 4{,}93\text{x}10^3 \text{ m/s}^2$$

Respuesta:

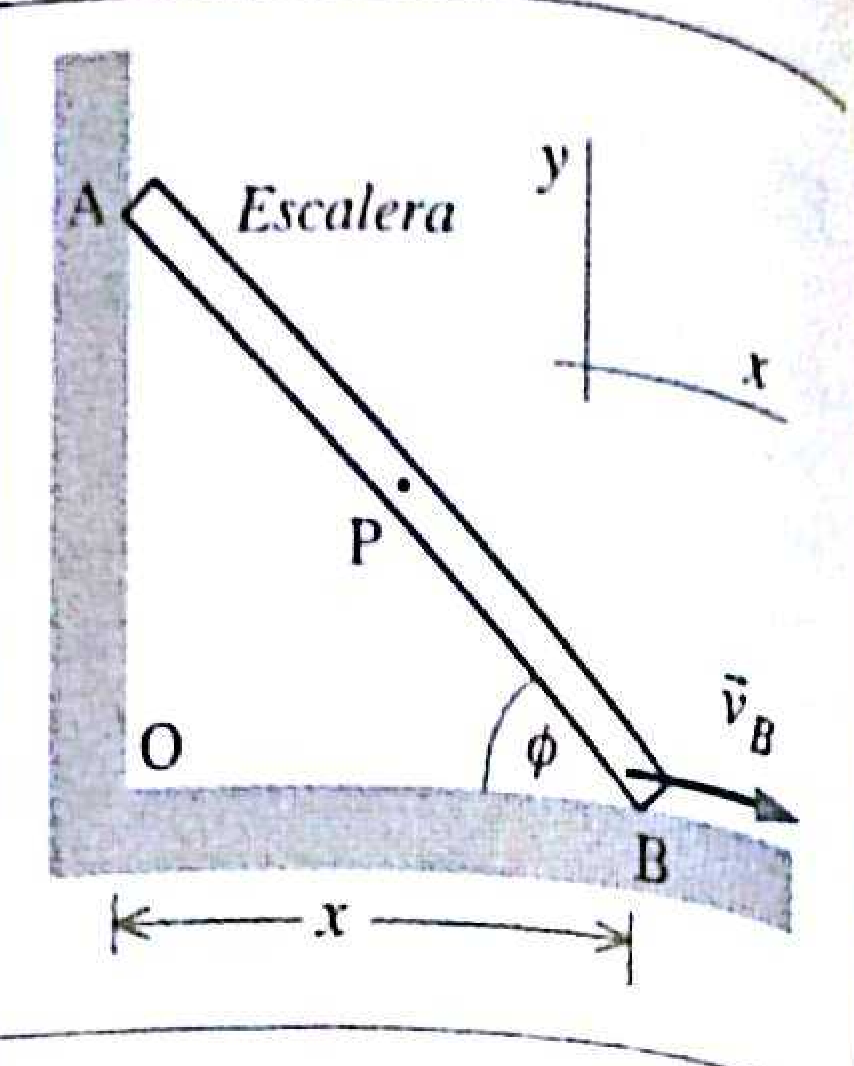
a) $\vec{v} = (50\pi\hat{\phi} + 10\hat{z})$ m/s
b) $\vec{a} = (-500\pi^2\hat{r} + 0{,}5\hat{z})$ m/s^2

PR-2.20. *El centro de una escalera que desliza*

Una escalera de longitud L está apoyada sobre una pared vertical. Se ata una cuerda al pie de la escalera y se le jala horizontalmente con una rapidez constante v_B.

a) Demuestre que el punto medio P de la escalera se mueve según un arco de circunferencia de radio $L/2$ con centro en O.

b) Determine la velocidad angular de la escalera en función de la distancia x del apoyo B a la pared.



Solución: a) De acuerdo al diagrama vectorial mostrado, podemos escribir:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = L\cos\phi\hat{x} - L sen\phi\hat{y}$$

El vector posición del punto medio P es:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = L sen\phi\hat{y} + \frac{L}{2}(\cos\phi\hat{x} - sen\phi\hat{y})$$

$$\vec{r} = \frac{L}{2}(\cos\phi\hat{x} + sen\phi\hat{y})$$

y su módulo es constante:

$$|\vec{r}| = \frac{L}{2}\sqrt{\cos^2\phi + sen^2\phi} = \frac{L}{2}$$

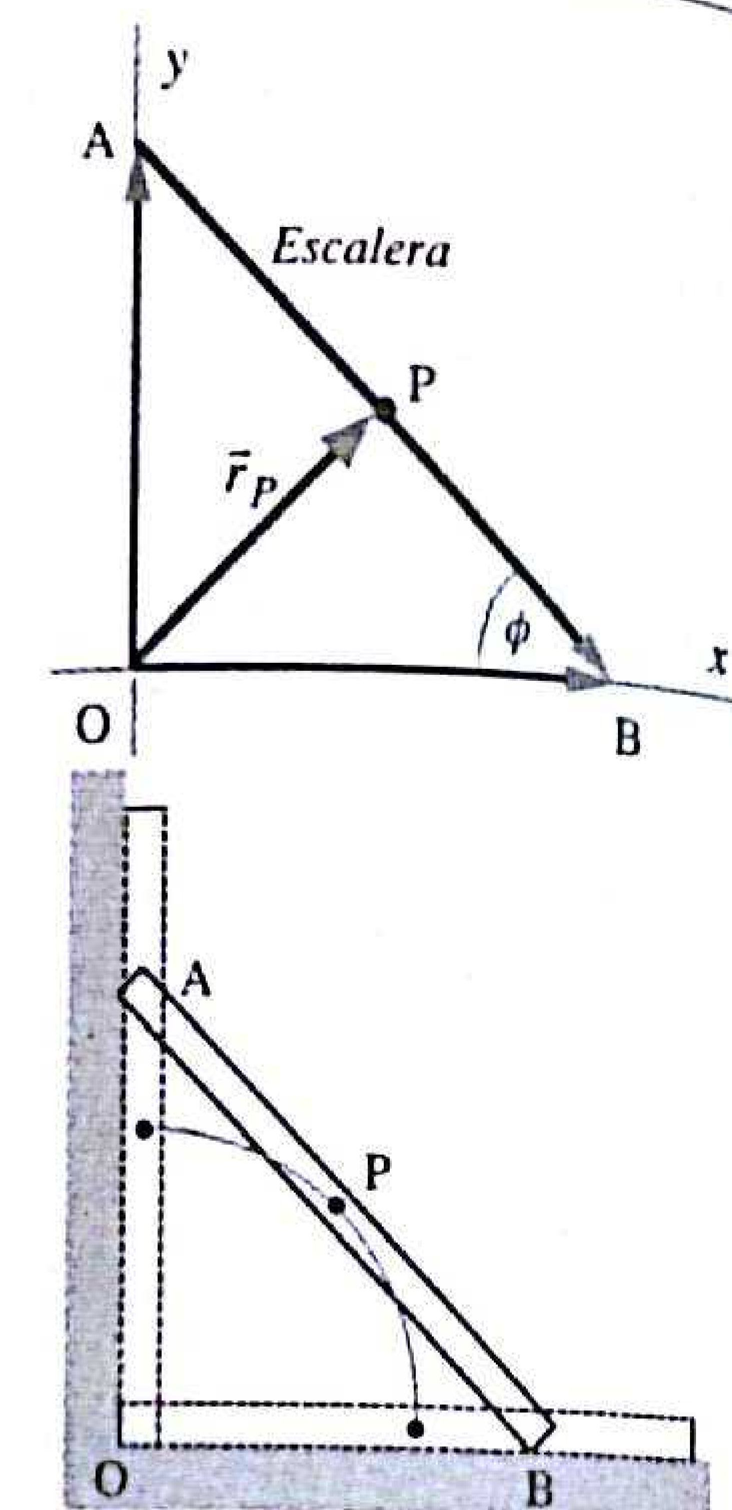
Es decir, el punto P se mueve en un círculo de radio $L/2$.

b) La velocidad del punto B es conocida:

$$v_B = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(L\cos\phi) = -L sen\phi\frac{d\phi}{dt}$$

Luego:

$$\omega_B = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{v_B}{L sen\phi} = -\frac{v_B}{\sqrt{L^2 - x^2}}$$



Respuesta:

a) Radio del círculo: $|\vec{r}| = L/2$

b) $\omega_B = -\dfrac{v_B}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

PR-2.21. *Rodadura sin deslizamiento*

Un disco circular rueda sin deslizar sobre una superficie.

a) Demostrar que el módulo de la velocidad tangencial de un punto de la periferia, relativa al centro, coincide con la rapidez de traslación de la rueda.

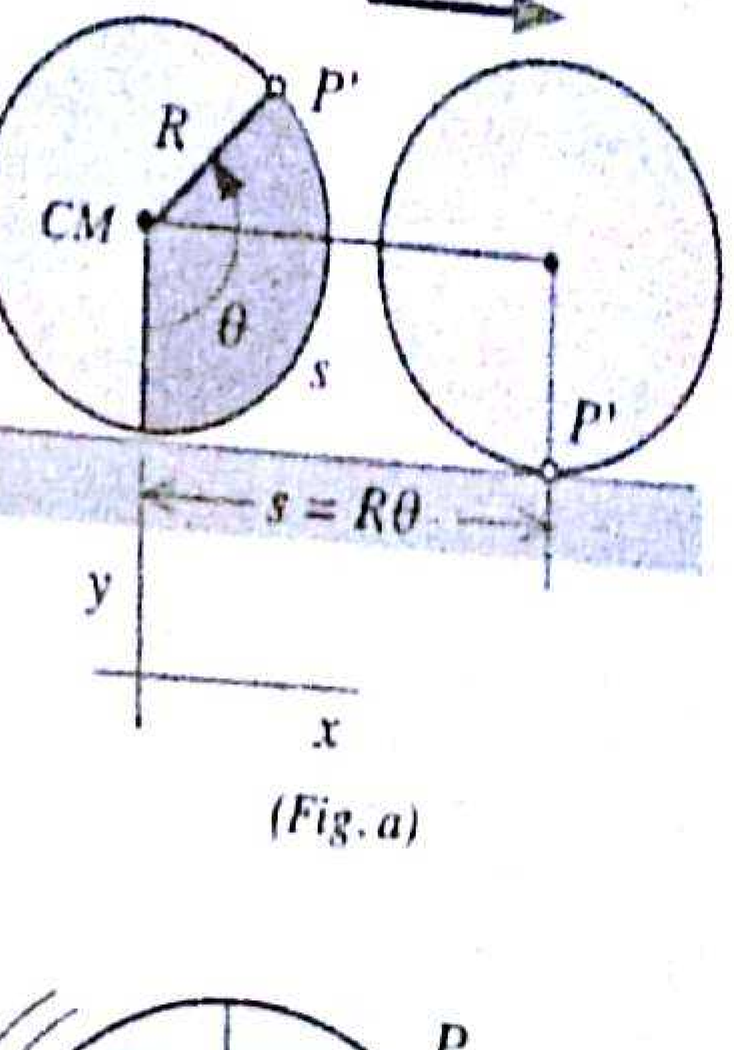
b) Demostrar que el vector velocidad $\vec{v}$ de un punto P es perpendicular a la línea que une ese punto con el punto de contacto con el piso.

Solución: a) Cuando la rueda ha girado un ángulo θ, la longitud de arco $s = R\theta$ es igual a la distancia x que se ha trasladado su centro de masa (figura a). Por lo tanto,

$$v_{cm} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = R\omega$$

Es decir, la rapidez tangencial $v_t = R\omega$, de un punto del borde relativa al centro, es igual a la rapidez del centro de masa.

$$v_{cm} = v_t$$



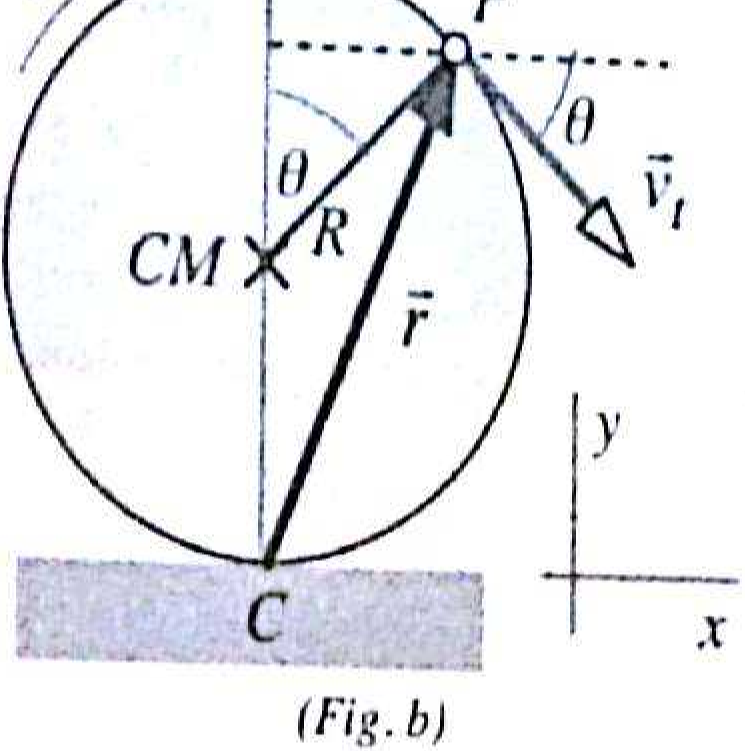
(Fig. a)

b) Según se ilustra en la figura b, el vector posición del punto P respecto del punto C de contacto es:

$$\vec{r} = R sen\theta\hat{x} + (R + R\cos\theta)\hat{y}$$

Las componentes cartesianas de la velocidad tangencial del punto P respecto al CM son:

$$\vec{v}_t = v_t\cos\theta\hat{x} - v_t sen\theta\hat{y}$$



(Fig. b)

Por otra parte, la velocidad $\vec{v}$ del punto P respecto al suelo, es igual a su velocidad tangencial $\vec{v}_t$ respecto al CM más la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ (Fig. c).

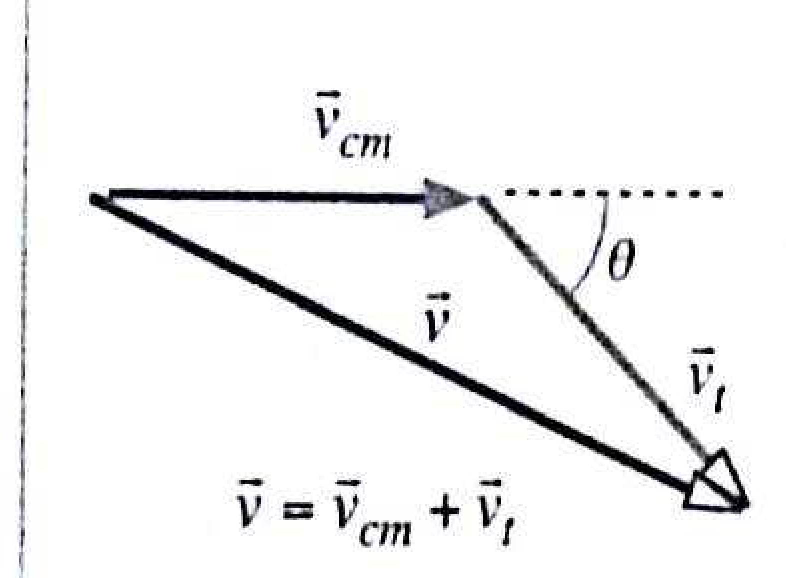
$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_{cm} = v_t\cos\theta\hat{x} - v_t sen\theta\hat{y} + v_t\hat{x}$$

Si efectuamos el producto escalar $\vec{r} \bullet \vec{v}$, tenemos:

$$= [R sen\theta\hat{x} + (R + R\cos\theta)\hat{y}] \bullet [(v_t(1 + \cos\theta)\hat{x} - v_t sen\theta\hat{y}]$$

$$\vec{r} \bullet \vec{v} = v_t[R sen\theta + R sen\theta\cos\theta - R sen\theta - R\cos\theta sen\theta] = 0$$

El producto $\vec{r} \bullet \vec{v}$ se anula y como $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos, se deduce que son perpendiculares entre sí. Queda demostrado que el vector velocidad $\vec{v}$ de un punto P de la rueda es perpendicular a la línea que une ese punto con el punto de contacto.

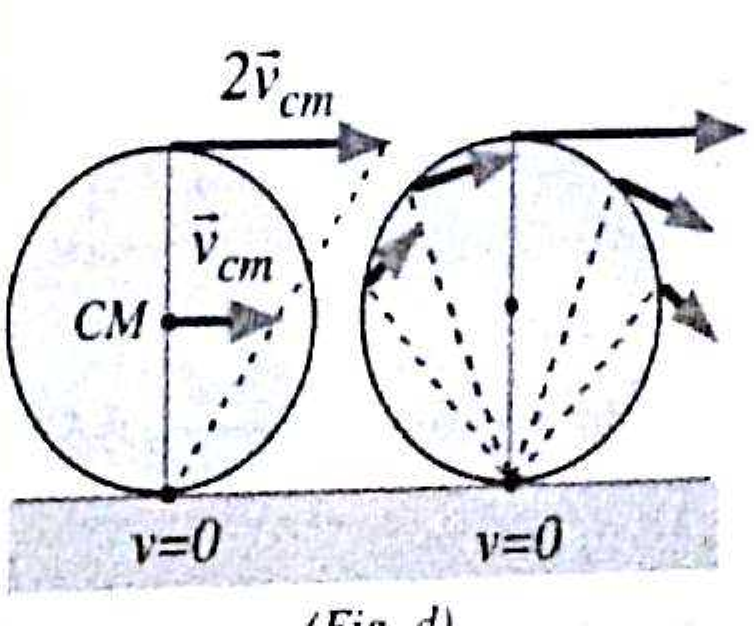


(Fig. c)

Nota explicativa: El resultado anterior es consecuencia de que la velocidad de cualquier punto del borde es la suma vectorial:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_{cm}.$$

En la parte mas alta de la rueda, los vectores $\vec{v}_t$ y $\vec{v}_{cm}$ apuntan en la misma dirección y son aditivos: $v = 2\omega R$. Mientras que en la parte más baja, apuntan en direcciones opuestas y se cancelan, resultando: $v = 0$.



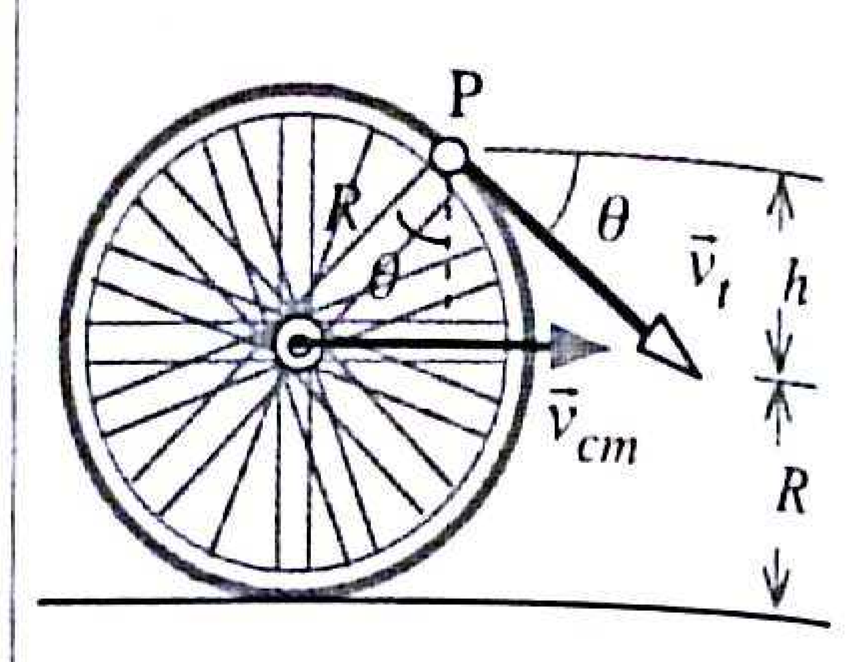
(Fig. d)

Como la rueda no desliza, el punto de contacto con la superficie estará instantáneamente en reposo y la rueda gira momentáneamente alrededor de ese punto. En general, todas las partículas del cuerpo describen arcos circulares a una rapidez angular, ω, con centro en el punto de contacto.

PR-2.22. *Los puntos de una rueda siguen una cicloide*

Una rueda de bicicleta de radio R = 30 cm, rueda sin deslizar con una velocidad de traslación v = 12 m/s. Determine el vector velocidad instantánea relativo al suelo de un punto P de la periferia ubicado a una altura h = 18 cm por encima del centro.

Solución: El vector velocidad instantánea $\vec{v}$ de un punto en la periferia relativa al suelo es la suma vectorial de $\vec{v}_{cm}$ y la velocidad tangencial $\vec{v}_t$ relativa al centro de masa. Del triángulo formado por los tres vectores tenemos:

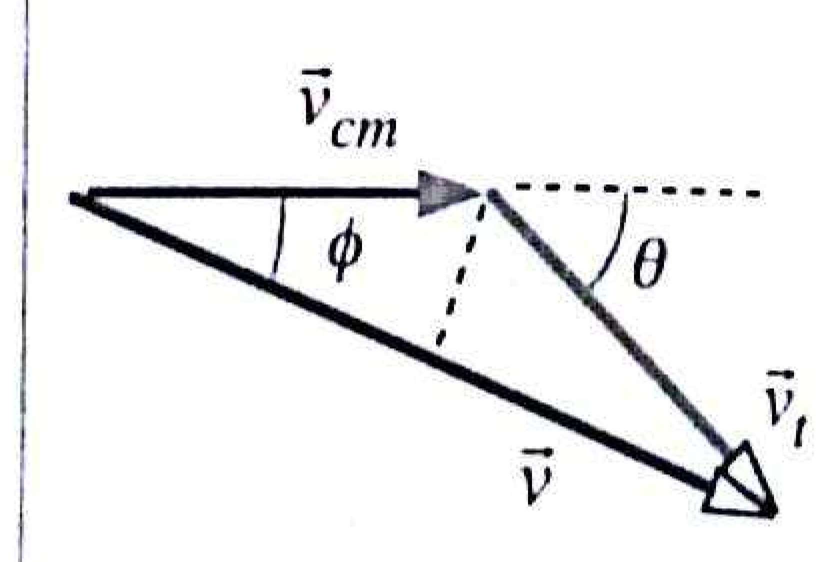


$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_{cm}$$

Efectuando el producto escalar:

$$v^2 = (\vec{v}_t + \vec{v}_{cm})\bullet(\vec{v}_t + \vec{v}_{cm}) = v_t^2 + 2\vec{v}_t \bullet \vec{v}_{cm} + v_{cm}^2$$

$$v^2 = v_t^2 + 2v_t v_{cm}\cos\theta + v_{cm}^2$$



Siendo θ el ángulo entre los vectores $\vec{v}_t$ y $\vec{v}_{cm}$. Tomando en cuenta que $|\vec{v}_t| = |\vec{v}_{cm}|$, y que $\cos\theta = h/R$, tenemos:

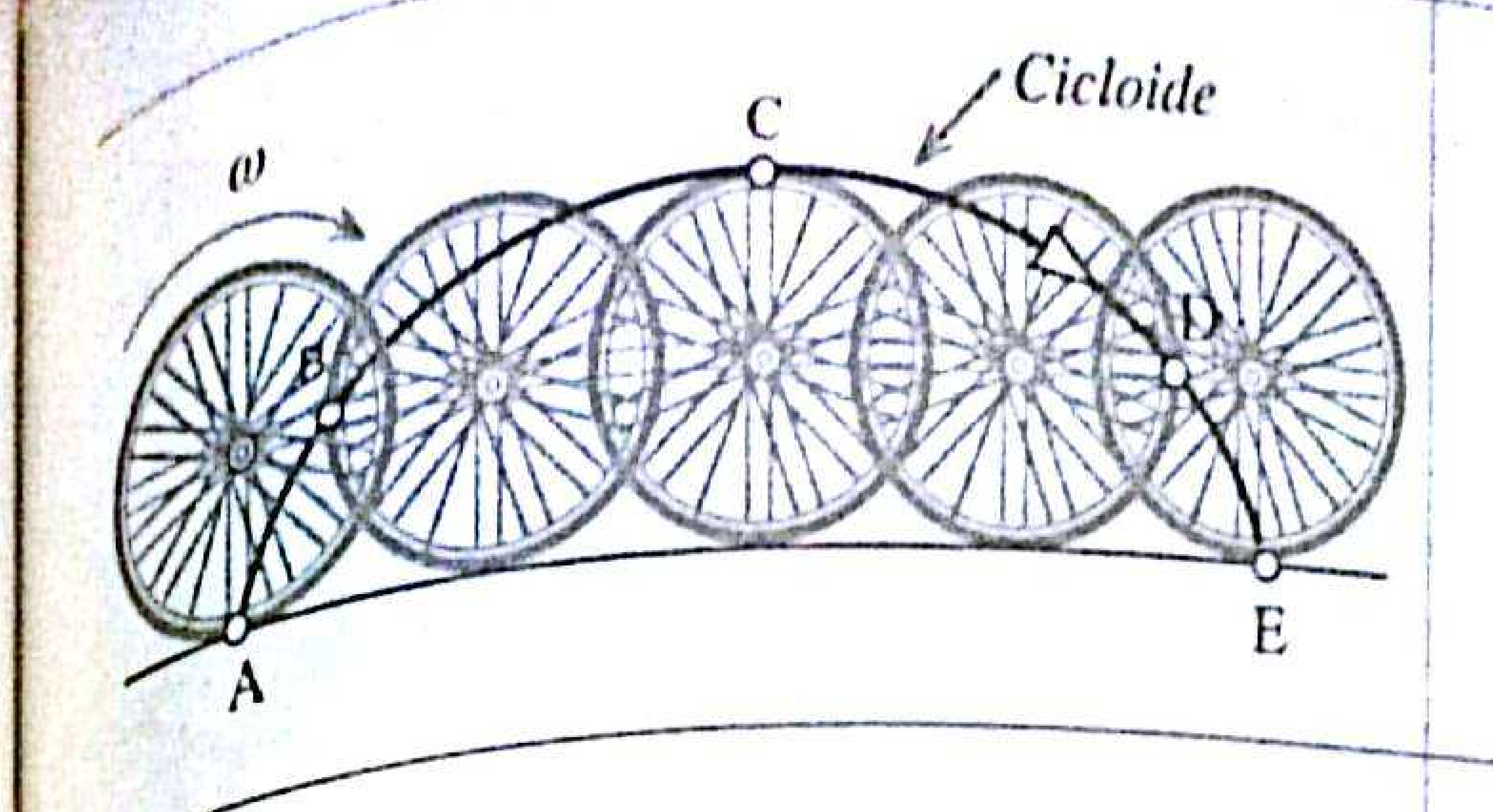
$$v^2 = 2v_{cm}^2(1+\cos\theta) = 2v_{cm}^2(1+\frac{h}{R})$$

$$v^2 = 2(12\text{m/s})^2(1+\frac{18}{30}) = 461\text{m}^2/\text{s}^2 \quad \Rightarrow \quad v = 21{,}5 \text{ m/s}$$

El ángulo ϕ que forma el vector $\vec{v}$ con la dirección horizontal se obtiene, si tomamos en cuenta que el triángulo de la figura es isósceles, ya que $|\vec{v}_t| = |\vec{v}_{cm}|$:

$$\cos\phi = \frac{v/2}{v_{cm}} = \frac{21{,}5\text{m/s}}{2\text{x}12\text{m/s}} = 0{,}896 \quad \Rightarrow \quad \phi = 26{,}4°$$

A medida que *rueda* sin deslizar, la trayectoria de un punto de la periferia es una curva llamada *cicloide*.



Respuesta:

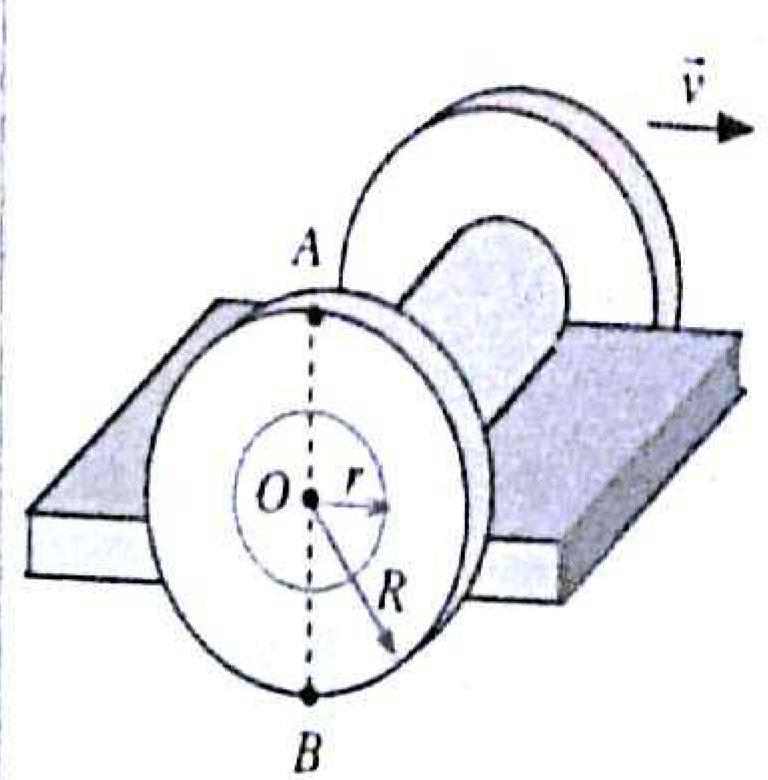
$v = 21{,}5$ m/s
$\phi = 26{,}4°$

PR-2.23. *Carrete rodando por un plano horizontal*

Un carrete que consiste de un cilindro de radio r y de dos discos en sus extremos de radio $R > r$, rueda a velocidad constante $\vec{v}$, apoyando su parte cilíndrica sobre una superficie áspera colocada horizontalmente.

a) ¿Qué velocidad tienen los puntos extremos A y B que se encuentran en la periferia de uno de sus discos en la línea vertical que pasa por su centro?

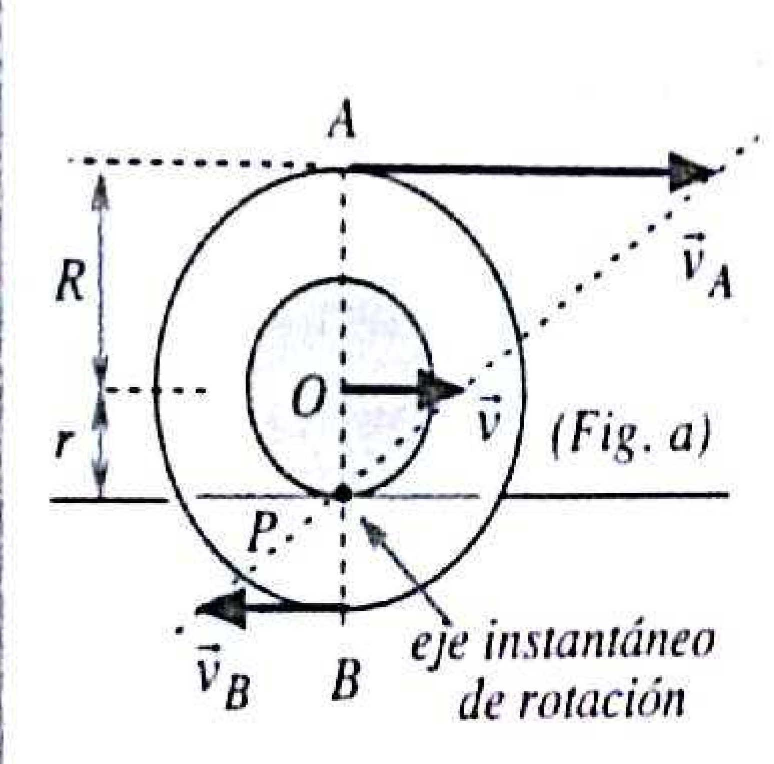
b) ¿Cuáles puntos de los discos poseen una velocidad instantánea de igual módulo que la del eje del carrete?



Solución: a) El punto P de contacto del carrete con el plano está instantáneamente fijo y todos sus puntos giran a su alrededor con la misma velocidad angular. Según se ilustra en la figura a, para los puntos A y O tenemos:

$$\omega = \frac{v_A}{R+r} = \frac{v}{r}$$

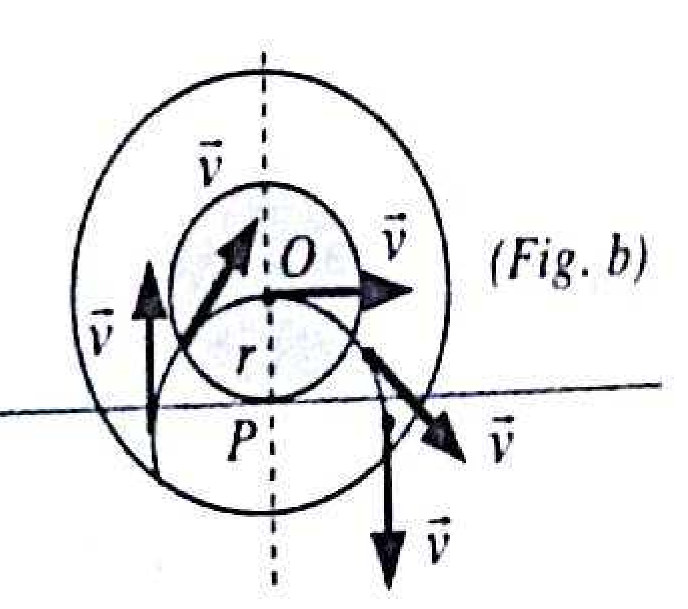
$$\vec{v}_A = (\frac{R+r}{r})\vec{v}$$



mientras que, para los puntos B y O tenemos:

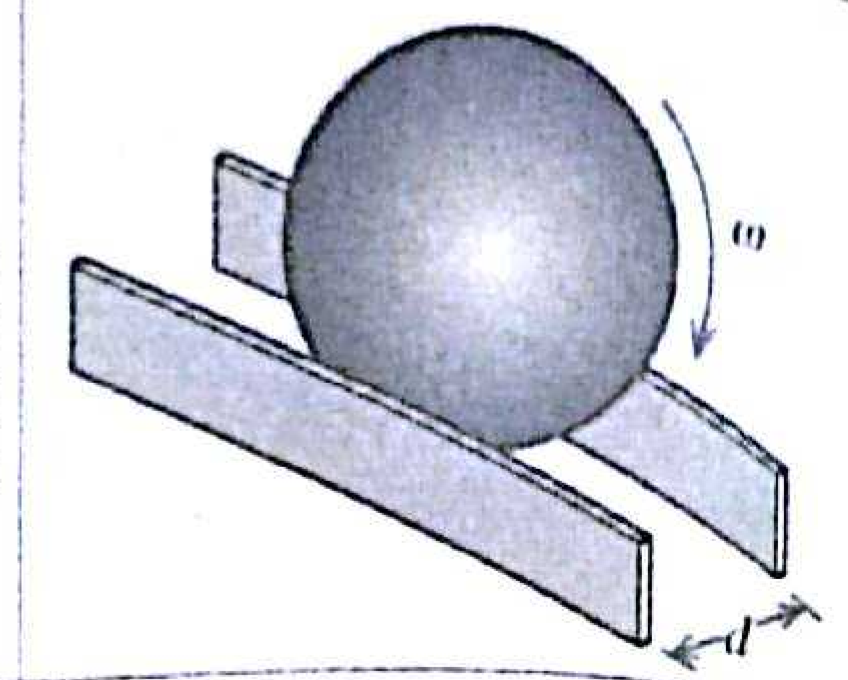
$$\omega = \frac{v_B}{R-r} = \frac{v}{r}$$

$$\vec{v}_B = -(\frac{R-r}{r})\vec{v}$$



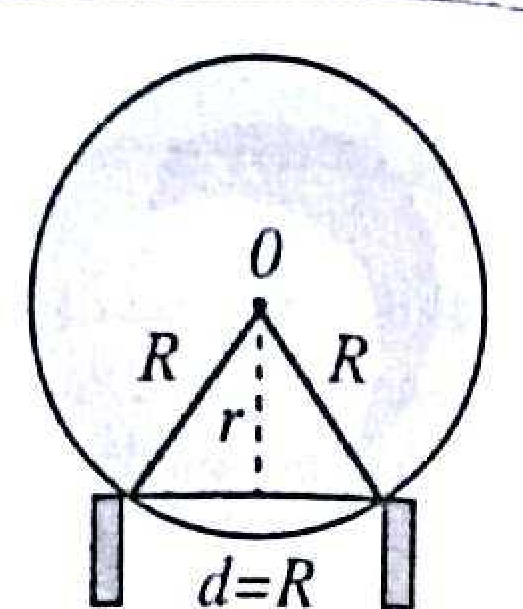
b) Como se ilustra en la figura b, todos los puntos situados en una circunferencia de radio r y cuyo centro es el punto de contacto P, tendrán la misma rapidez ($v = \omega r$) que la que tiene el eje del carrete en el punto O.

PR-2.24. *Una esfera que rueda por canal horizontal*



Una esfera de radio R = 10 cm rueda sin deslizar sobre los bordes de dos placas paralelas horizontales que están separadas por una distancia d = 10 cm. La velocidad del centro de la esfera es v = 3 m/s. ¿cuál es la velocidad angular de rotación de la esfera?

Solución: Cuando la esfera rueda sobre las dos guías paralelas, el radio de giro r se obtiene de la construcción geométrica mostrada:



$$r = \sqrt{R^2 - (d/2)^2} = \sqrt{R^2 - (R/2)^2} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

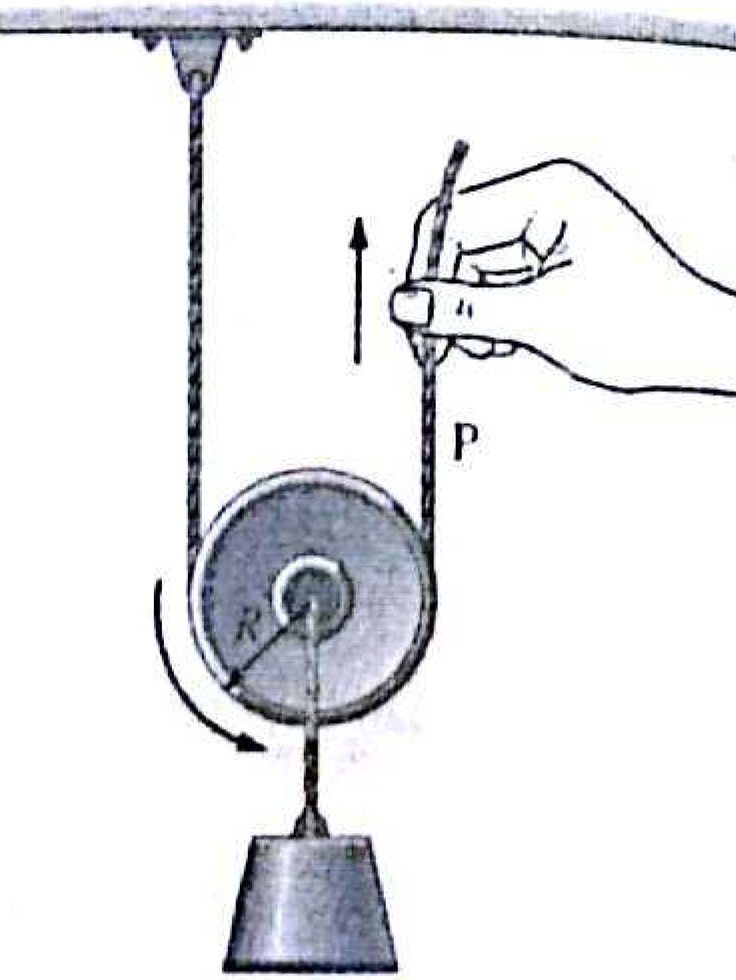
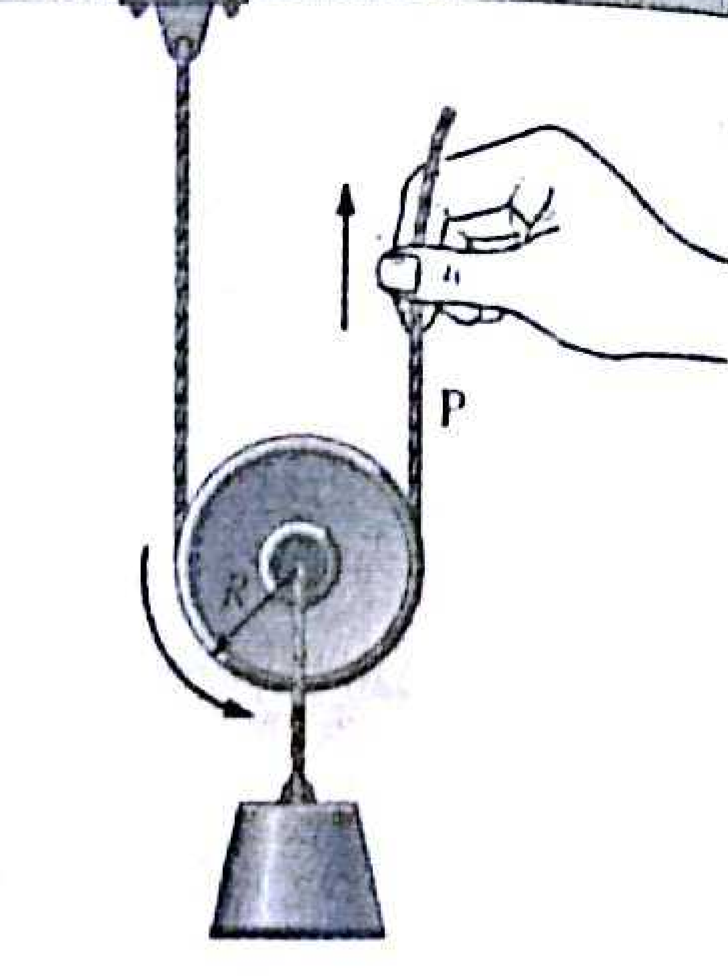
y la velocidad angular de rotación es:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{R}\frac{2}{\sqrt{3}} = (\frac{3\text{m/s}}{0{,}1\text{m}})\frac{2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\ \text{rad/s}$$

Respuesta

$\omega = 20\sqrt{3}$ rad/s

PR-2.25. *¿Qué ángulo gira la polea?*

Una pesa es levantada mediante una polea de radio R = 30 cm, como se muestra en la figura. Si el extremo P de la cuerda es elevado en una altura h = 2,4 m y suponiendo que la cuerda no desliza sobre la polea:

a) ¿Cuál será el ángulo de rotación de la polea?

b) ¿Cuánto se eleva la pesa?

Solución: a) Cuando el punto P de la cuerda se eleva una distancia h, un punto cualquiera en el borde de la polea viajará la mitad de esta distancia:

$$y = h/2 = R\Delta\theta$$

Por lo tanto, el ángulo de rotación de la polea es:

$$\Delta\theta = \frac{h}{2R} = \frac{2{,}4\text{m}}{2(0{,}3\text{m})} = 4\ \text{rad} = 229^{\circ}$$

b) La pesa se eleva en la misma distancia que lo hace el eje de la polea, es decir:

$$y = h/2 = 1{,}2\ \text{m}$$

Respuesta

b) $\Delta\theta = 229^{\circ}$
a) $y = 1{,}2$ m

PR-2.26. *Cuando la pesa desciende la polea asciende*

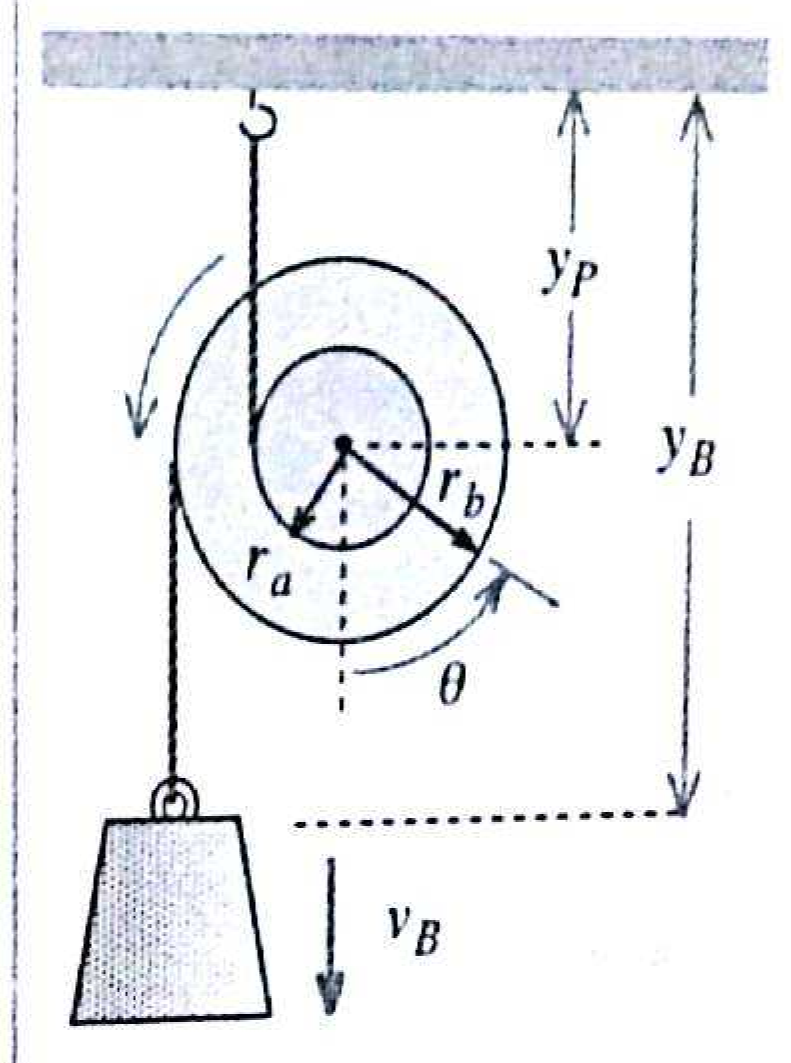
Una pesa está suspendida mediante una cuerda que está enrollada en una polea doble, de radios respectivos r_a y r_b. A medida que la pesa desciende, la cuerda superior se va enrollando y la polea va subiendo. Suponga que en un instante dado, la pesa está bajando con una velocidad v_B y una aceleración lineal a_B. Determine para ese instante:

a) La aceleración lineal de subida del eje de la polea.

b) La velocidad angular y la aceleración angular de rotación de la polea.

Solución: a) Suponga que cuando la pesa baja, la polea gira un ángulo θ desde su posición angular inicial. Esto significa que su cuerda exterior se desenrolla en una longitud $r_b\theta$. Al mismo tiempo el eje de la polea sube y su cuerda de suspensión se enrolla una longitud $r_a\theta$. En esta situación las posiciones verticales del eje de la polea y del bloque respecto al techo son:

$$y_P = y_P^0 - r_a\theta, \qquad y_B = y_B^0 + r_b\theta - r_a\theta$$



Siendo y_P^0 y y_B^0 las posiciones iniciales del eje de la polea y de la pesa respectivamente. Derivando la distancia y_B respecto al tiempo:

$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = (r_b - r_a)\frac{d\theta}{dt} = (r_b - r_a)\omega$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \frac{v_B}{r_b - r_a}$$

Derivando de nuevo respecto al tiempo, obtenemos la aceleración angular:

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = (r_b - r_a)\frac{d\omega}{dt} = (r_b - r_a)\alpha$$

$$\alpha = \frac{a_B}{r_b - r_a}$$

b) De la misma manera, derivando y_P respecto al tiempo tenemos, la velocidad y aceleración lineal de subida de la polea:

$$v_P = \frac{dy_P}{dt} = -r_a\frac{d\theta}{dt} = -r_a\omega = -(\frac{r_a}{r_b - r_a})v_B$$

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = -r_a\frac{d\omega}{dt} = -r_a\alpha = -(\frac{r_a}{r_b - r_a})a_B$$

Respuesta:

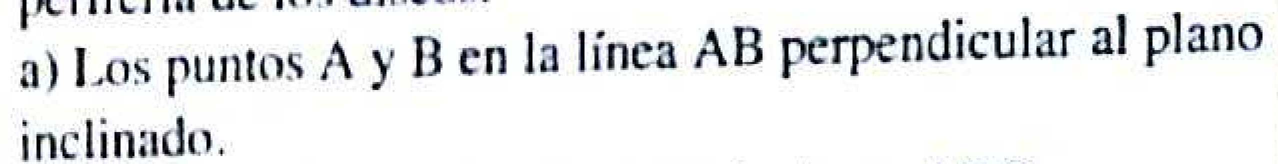
a) $\omega = \frac{v_B}{r_b - r_a}$, $\alpha = \frac{a_B}{r_b - r_a}$

b) $v_P = -(\frac{r_a}{r_b - r_a})v_B$,

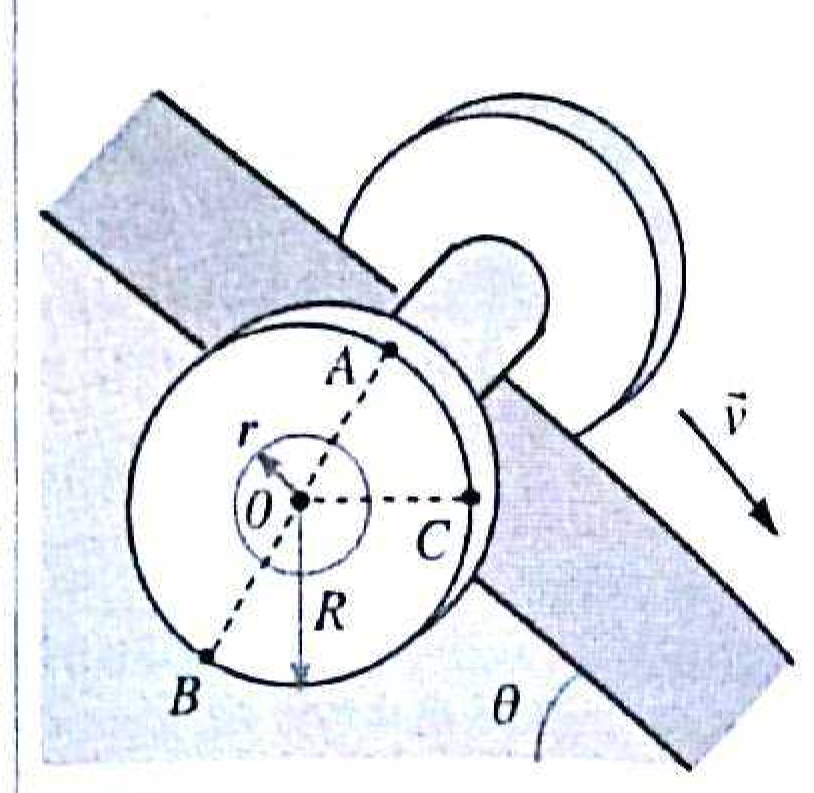
$a_P = -(\frac{r_a}{r_b - r_a})a_B$

PR-2.27. *Un carrete que rueda por un plano inclinado*

Un carrete constituido por un cilindro de radio r y dos discos de radio $R > r$, se coloca sobre una rampa de inclinación θ, apoyado sobre su parte cilíndrica. El carrete rueda sin deslizar y en un momento determinado los puntos de su eje llevan una velocidad v_O. Determine los vectores velocidad de los siguientes puntos ubicados en la periferia de los discos:


a) Los puntos A y B en la línea AB perpendicular al plano inclinado.

b) El punto C ubicado en la línea horizontal OC.



Solución: Como el carrete rueda sobre su parte cilíndrica sin deslizar, los movimientos de rotación y de traslación están relacionados por:

$$v_{cm} = v_O = \omega r \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{v_O}{r}(-\hat{z})$$

Siendo ω la velocidad angular de rotación alrededor de su eje. La velocidad de cualquier punto P del carrete está dada por la suma vectorial de la velocidad del eje, $\vec{v}_O$ más la velocidad $\vec{v}_{P/O}$, del punto P debida a su rotación alrededor del eje.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{P/O} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OP}$$

a) Para aplicar esta relación, escogemos coordenadas cartesianas con ejes paralelo y perpendicular al plano inclinado. Para el punto A:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OA} = v_O\hat{x} + (-\frac{v_O}{r}\hat{z})\times(R\hat{y})$$

$$\vec{v}_A = v_O\hat{x} + (\frac{v_O}{r}R)\hat{x} = v_O(1 + \frac{R}{r})\hat{x}$$

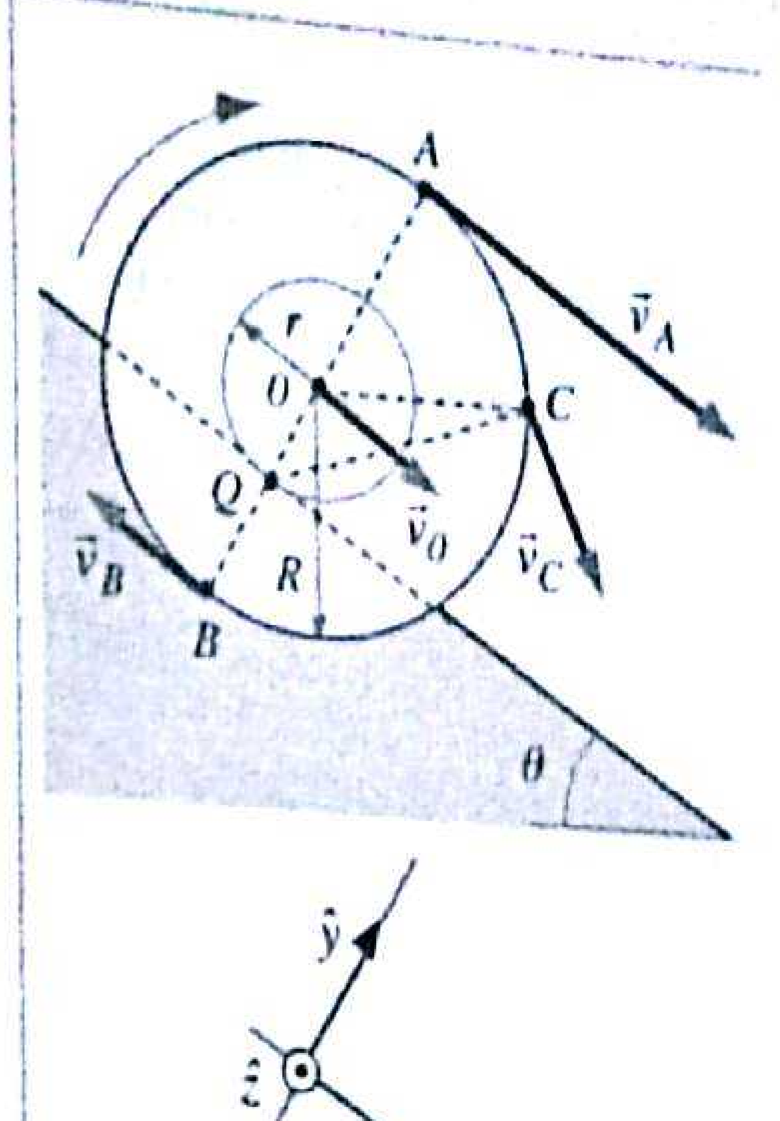
$$\vec{v}_A = (5\text{m/s})(1 + \frac{0{,}5\text{m}}{0{,}1\text{m}})\hat{x} = 30\hat{x} \text{ m/s}$$

Para el punto B, la velocidad es:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OB} = v_O\hat{x} + (-\frac{v_O}{r}\hat{z})\times(-R\hat{y})$$

$$\vec{v}_B = v_O\hat{x} - (\frac{v_O}{r}R)\hat{x} = v_O(1 - \frac{R}{r})\hat{x}$$

$$\vec{v}_B = (5\text{m/s})(1 - \frac{0{,}5\text{m}}{0{,}1\text{m}})\hat{x} = -20\hat{x} \text{ m/s}$$



b) Para el punto C, la velocidad es:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OC} = v_O\hat{x} + (-\frac{v_O}{r}\hat{z})\times(R\cos\theta\hat{x} + R\,sen\theta\hat{y})$$

$$\vec{v}_C = v_O[(1 + \frac{R}{r}sen\theta)\hat{x} - \frac{R}{r}\cos\theta\hat{y}]$$

$$\vec{v}_C = (5\text{m/s})[(1 + \frac{0{,}5\text{m}}{0{,}1\text{m}}\text{sen}30^\circ)\hat{x} - \frac{0{,}5\text{m}}{0{,}1\text{m}}\cos 30^\circ\,\hat{y}]$$

$$\vec{v}_C = (17{,}5\hat{x} - 12{,}5\sqrt{3}\hat{y}) \text{ m/s}$$

Respuesta:

a) $\vec{v}_A = v_O(1 + \frac{R}{r})\hat{x} = 30\hat{x}$ m/s.

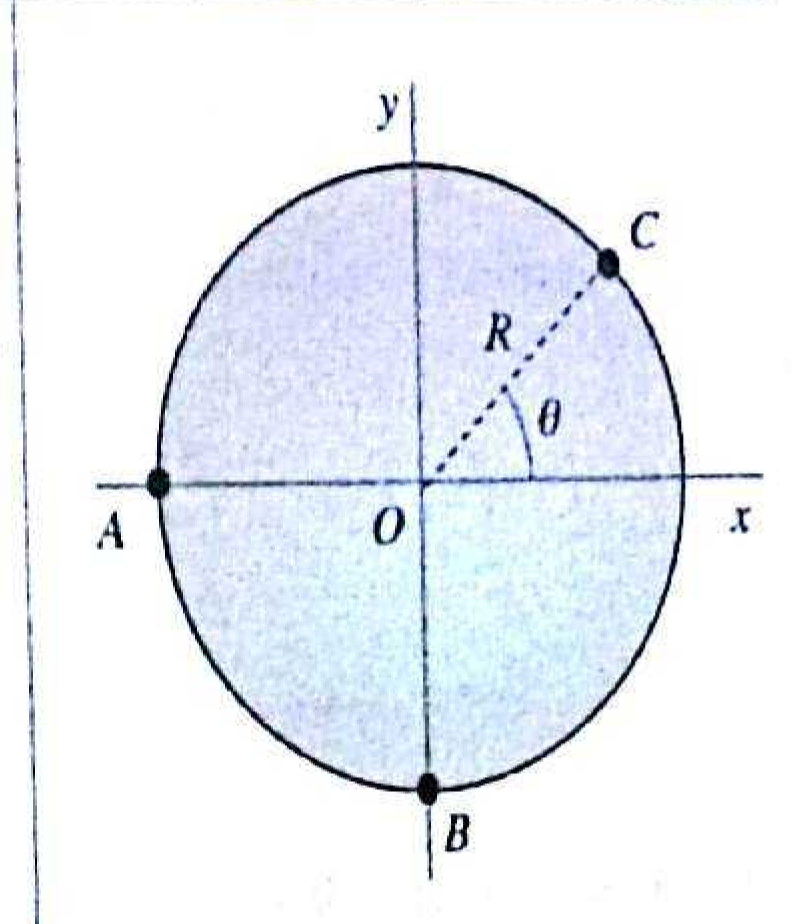
$\vec{v}_B = v_O(1 - \frac{R}{r})\hat{x} = -20\hat{x}$ m/s

b) $\vec{v}_C = (17{,}5\hat{x} - 12{,}5\sqrt{3}\hat{y})$ m/s

PR-2.28. *¿Qué velocidad lleva el centro de ese disco?*

En un disco circular de radio R = 4 m, se observa en un cierto instante que tres puntos de su periferia tienen las siguientes componentes de sus velocidades:

A($-R$, 0): v_{Ax} = +4 m/s,
B(0, $-R$): v_{By} = -3 m/s,
C($R\cos 45^\circ$, $R\,sen 45^\circ$): v_{Cx} = +5 m/s



Calcular en ese instante:
a) La velocidad angular del disco.
b) La velocidad del centro O del disco.

Solución: a) La velocidad angular queda en el eje z ($\vec{\omega} = \omega\hat{z}$) y la relación entre las velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_C$ es:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{C/A}$$

$$v_{Cx}\hat{x} + v_{Cy}\hat{y} = v_{Ax}\hat{x} + v_{Ay}\hat{y} + \omega\hat{z}\times[(R + R\cos\theta)\hat{x} + R\,sen\theta\hat{y})$$

Podemos separar esta ecuación vectorial en las componentes escalares y tomando en cuenta los productos cruz de los vectores unitarios son $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ y $\hat{z}\times\hat{y}=-\hat{x}$, encontramos:

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \omega R sen\,\theta \qquad (1)$$

$$v_{Cy} = v_{Ay} + \omega R(1+\cos\theta) \qquad (2)$$

De la primera relación obtenemos la velocidad angular del disco:

$$\omega = \frac{v_{Ax}-v_{Cx}}{R sen\,\theta} = \frac{4\text{m/s}-5\text{m/s}}{(4\text{m})\text{sen}45^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Escribimos ahora la relación entre las velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$$

$$v_{Bx}\hat{x} + v_{By}\hat{y} = v_{Ax}\hat{x} + v_{Ay}\hat{y} + \omega\hat{z}\times(R\hat{x}+R\hat{y})$$

Separando en las componentes escalares:

$$v_{Bx} = v_{Ax} + \omega R \qquad (3)$$

$$v_{By} = v_{Ay} + \omega R \qquad (4)$$

De la relación (3) hallamos v_{Bx} y de la (4) hallamos v_{Ay}:

$$v_{Bx} = v_{Ax} + \omega R = 4\text{m/s} + (-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{rad/s})(4\text{m}) = 2{,}59\text{m/s}$$

$$v_{Ay} = v_{By} - \omega R = -3\text{m/s} - (-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{rad/s})(4\text{m}) = -1{,}59\text{m/s}$$

Hallaremos la velocidad del centro O del disco a partir de $\vec{v}_A$:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{O/A} = v_{Ax}\hat{x} + v_{Ay}\hat{y} + \omega\hat{z}\times R\hat{x}$$

$$\vec{v}_O = 4\text{m/s}\hat{x} - 1{,}59\text{m/s}\hat{y} + (-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{rad/s})(4\text{m})\hat{y}$$

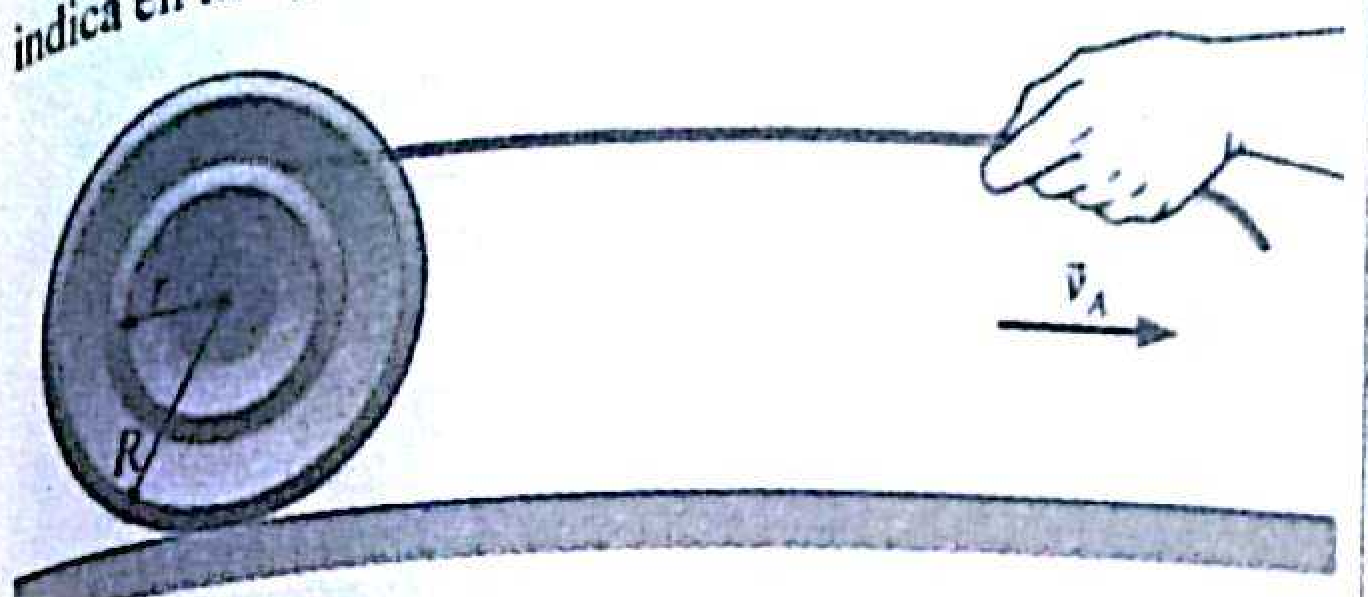
$$\vec{v}_O = (4\hat{x} - 3\hat{y})\text{m/s}$$

Respuesta:

a) $\vec{\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\hat{z}$ rad/s.
b) $\vec{v}_O = (4\hat{x} - 3\hat{y})$ m/s

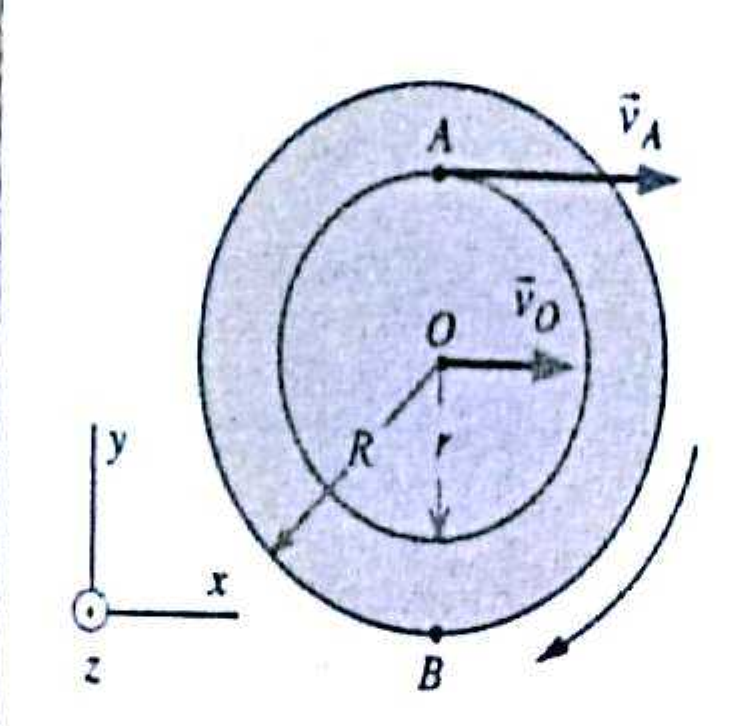
PR-2.29. ¿Qué longitud de hilo se desenrolla?

Un carrete en forma de yo-yo, de radio interior $r = 0{,}5$ m y radio exterior $R = 1{,}5$ m tiene un hilo inextensible enrollado y se coloca sobre el piso horizontal, como se indica en la figura.



El extremo del hilo se jala hacia la derecha con velocidad horizontal constante $v_A = 1$ m/s. Si el carrete rueda sin deslizar, determine:
a) La velocidad angular de rotación del carrete.
b) La velocidad de traslación del centro del carrete.
c) La longitud de hilo que se va desenrollando cada segundo.

Solución: a) El movimiento de rotación ocurre en el plano *x-y*, por lo tanto el carrete gira en torno al eje *z*. Queremos determinar tanto el módulo como el sentido de $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$. Puesto que el yoyo rueda sin deslizar, el punto B de contacto estará siempre en reposo respecto a la superficie ($\vec{v}_B = 0$). La velocidad del punto A es igual a la velocidad del punto B más la velocidad de A relativa a B:



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}$$

$$v_A\hat{x} = 0 + \omega\hat{z}\times(R+r)\hat{y} = \omega(R+r)(-\hat{x})$$

$$\omega = -\frac{v_A}{R+r} = -\frac{1\text{m/s}}{1{,}5\text{m}+1\text{m}} = -0{,}4\text{rad/s}$$

Es decir, el carrete gira en torno al eje *z* en sentido horario con velocidad angular:

$$\vec{\omega} = -0{,}4\hat{z}\ \text{rad/s}$$

b) La velocidad del eje del carrete, $\vec{v}_O$ es igual a la velocidad del punto B más la velocidad de O relativa a B:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{O/B} = 0 + \frac{v_A}{R+r}(-\hat{z})\times R\hat{y}$$

$$\vec{v}_O = \frac{Rv_A}{R+r}\hat{x} = \frac{1{,}5\text{m}\times1\text{m/s}}{1{,}5\text{m}+1\text{m}}\hat{x} = 0{,}6\hat{x}\ \text{m/s}$$

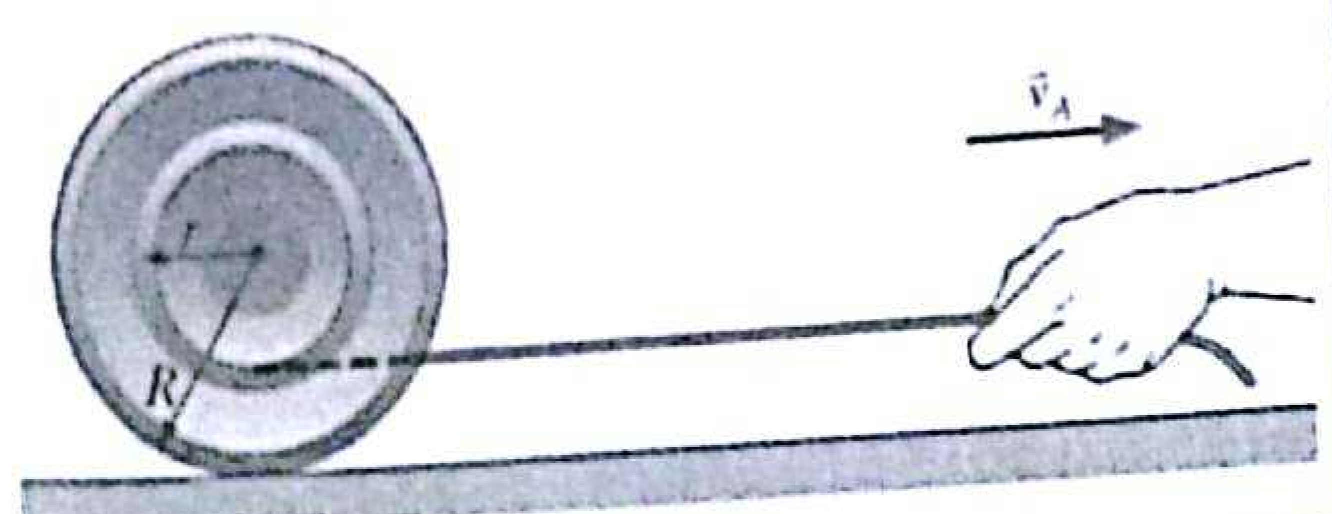
c) Como $v_A > v_O$, el hilo se desenrolla. En un segundo, el punto A se desplaza 1 m mientras que el centro O se desplaza 0,6 m, por lo tanto la longitud de hilo que se desenrolla en ese tiempo será $L = 1\text{ m} - 0{,}6\text{ m} = 0{,}4$ m.

Respuesta:

a) $\vec{\omega} = -\frac{v_A}{R+r}\hat{z} = -0{,}4\hat{z}$ rad/s
b) $\vec{v}_O = \frac{Rv_A}{R+r}\hat{x} = 0{,}6\hat{x}$ m/s
c) El hilo se desenrolla 0,4 m cada segundo.

PR-2.30. *¿Se enrolla o se desenrolla el hilo?*

Un carrete de radio interior $r = 0{,}5$ m y radio exterior $R = 1{,}5$ m tiene un hilo inextensible enrollado y se coloca sobre el piso horizontal, con el hilo saliendo por debajo.



El extremo del hilo se jala hacia la derecha con velocidad horizontal constante $v_A = 1$ m/s. Si el carrete rueda sin deslizar, determine:

a) La velocidad angular de rotación del carrete.

b) La velocidad de traslación del centro del carrete.

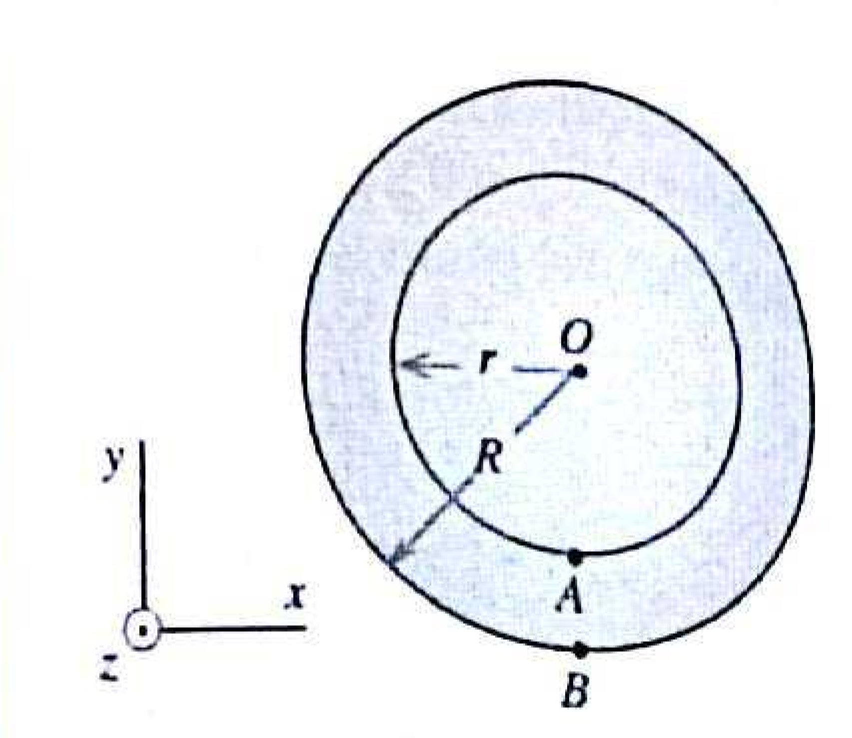
c) ¿Se enrolla o se desenrolla el hilo?, ¿qué longitud de hilo por segundo?

Solución: a) El vector velocidad angular queda en el eje z y queremos determinar tanto el módulo como el sentido de $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Puesto que no hay deslizamiento, el punto B de contacto estará siempre en reposo respecto a la superficie ($\vec{v}_B = 0$). La velocidad del punto A es igual a la velocidad del punto B más la velocidad de A relativa a B:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$v_A\hat{x} = 0 + \omega\hat{z} \times (R - r)\hat{y} = \omega(R - r)(-\hat{x})$$

$$\omega = -\frac{v_A}{R - r} = -\frac{1\text{m/s}}{1{,}5\text{m} - 1\text{m}} = -2\text{rad/s}$$



Es decir, el carrete gira en torno al eje z en sentido horario con velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \frac{v_A}{R - r}(-\hat{z}) = -2\hat{z} \text{ rad/s}$$

b) La velocidad del eje del carrete, $\vec{v}_O$ es igual a la velocidad del punto A más la velocidad de O relativa a A:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/A} = v_A\hat{x} + \frac{v_A}{R - r}(-\hat{z}) \times r\hat{y}$$

$$\vec{v}_O = v_A\hat{x} + \frac{v_A r}{R - r}\hat{x} = v_A(1 + \frac{r}{R - r})\hat{x} = (\frac{R}{R - r})v_A\hat{x}$$

$$\vec{v}_O = \frac{1{,}5\text{m}(1\text{m/s})}{1{,}5\text{m} - 1\text{m}}\hat{x} = 3\hat{x} \text{ m/s}$$

c) Como $v_O > v_A$ el hilo se enrolla. En un segundo, el centro O se desplaza 3 m mientras que el punto A se desplaza 1m, por lo tanto la longitud de hilo que se enrolla en ese tiempo es $L = 3\text{m} - 1\text{ m} = 2\text{m}$.

Respuesta:

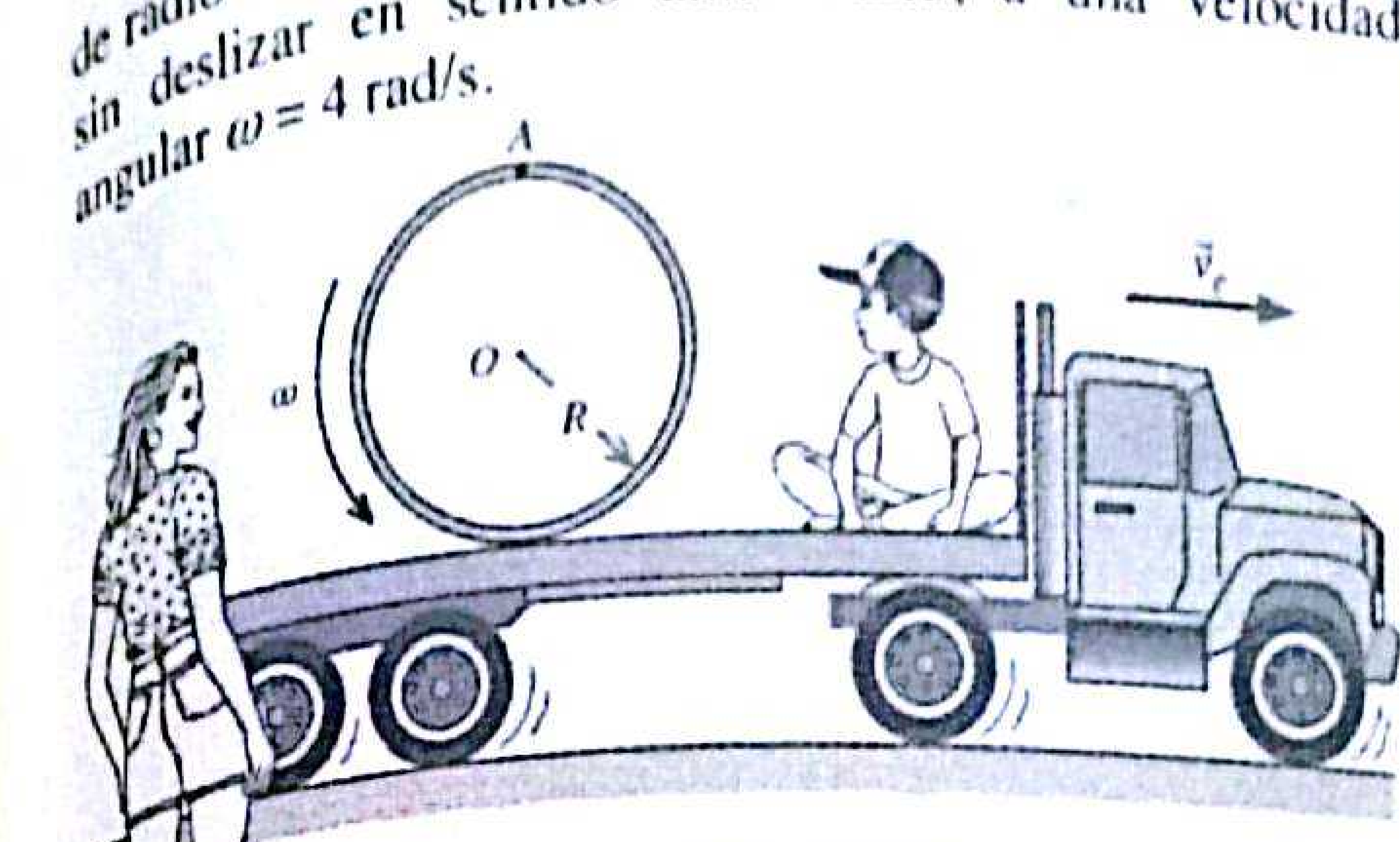
a) $\vec{\omega} = \dfrac{v_A}{R - r}(-\hat{z}) = -2\hat{z}\text{rad/s}$ ↻

b) $\vec{v}_O = \dfrac{v_A R}{R - r}\hat{x} = 3\hat{x}\text{m/s}$ (⟶)

c) El carrete rueda hacia la derecha y el hilo se enrolla 2 m cada segundo.

PR-2.31. *Un tubo que rueda: dos puntos de vista*

Un camión que está viajando hacia la derecha con una velocidad $v_c = 8$ m/s, lleva sobre su plataforma un tubo de radio $R = 0{,}75$ m. En ese instante el tubo está girando sin deslizar en sentido anti-horario, a una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s.



Determine las velocidades del centro O del tubo y del punto superior A en ese instante:

a) Según un observador en el camión.

b) Según un observador fijo en el suelo fuera del camión.

c) ¿Qué velocidad angular debería tener el tubo en ese instante para que al observador en el suelo le parezca estacionario el centro del tubo?

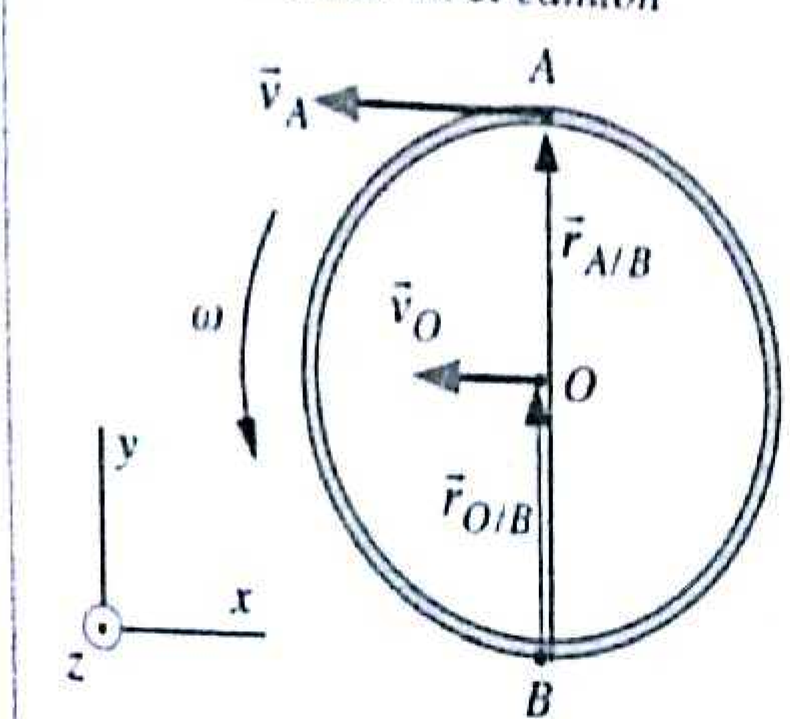
Solución: La velocidad angular $\vec{\omega}$ se dirige hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento. El punto B de contacto con la superficie estará siempre en reposo respecto al camión, puesto que no hay deslizamiento.

a) Según el observador en el camión, $\vec{v}_B = 0$ y las velocidades del centro O y del punto A son:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/B} = 0 + (4\hat{z}\frac{rad}{s}) \times (0{,}75\hat{y}m) = -3\hat{x} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} = 0 + (4\hat{z}\frac{rad}{s}) \times (1{,}50\hat{y}m) = -6\hat{x} \text{ m/s}$$

Observador en el camión



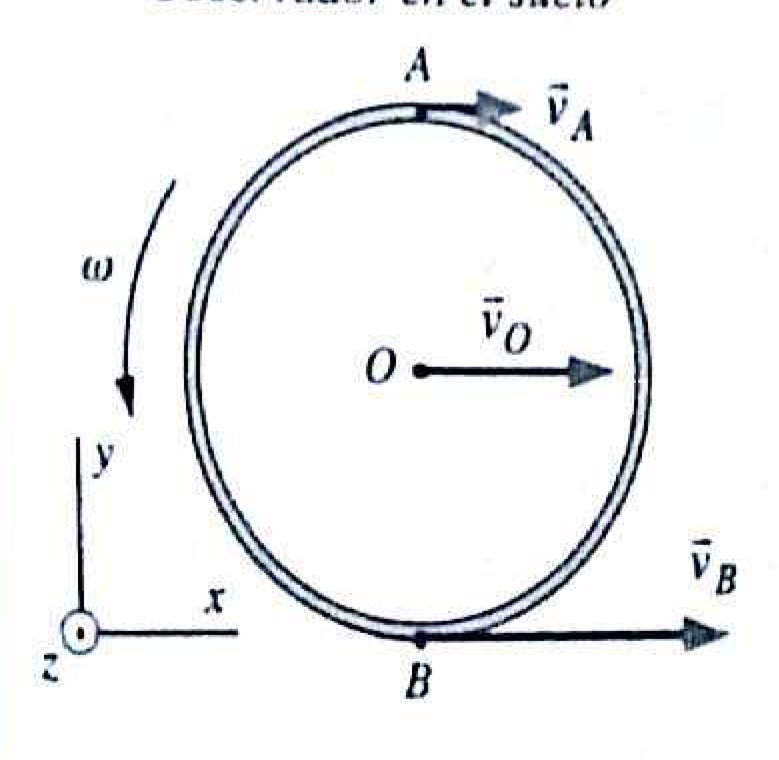
b) Según el observador en el suelo, las velocidades de los diferentes puntos del tambor son el resultado de la superposición de las diferentes velocidades respecto al camión y la propia del camión, $\vec{v}_c = 8\hat{x}$ m/s. Así el punto B de contacto lleva la misma velocidad del camión:

$$\vec{v}_B = 0 + 8\hat{x} \text{ m/s} = +8\hat{x} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_O = -3\hat{x} \text{ m/s} + 8\hat{x} \text{ m/s} = +5\hat{x} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_A = -6\hat{x} \text{ m/s} + 8\hat{x} \text{ m/s} = +2\hat{x} \text{ m/s}$$

Observador en el suelo



c) Para que el observador en el suelo vea estacionario el centro del tubo, la velocidad del centro del tubo según el camión debe ser de igual módulo y sentido opuesto a la propia del camión:

$$\vec{v}_O = 0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/B} = \omega\hat{z} \times R\hat{y} = -\omega R\hat{x} = -v_c\hat{x}$$

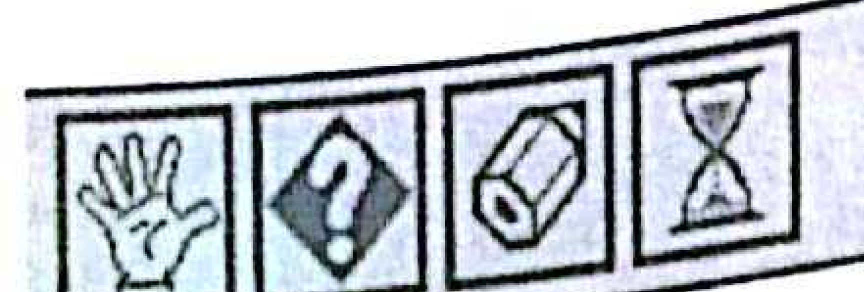
$$\omega = v_c / R = (8\text{m/s})/0{,}75\text{m} = 10{,}7 \text{ rad/s}$$

Respuesta:

a) $\vec{v}_O = -3\hat{x}$ m/s, $\vec{v}_A = -6\hat{x}$ m/s

b) $\vec{v}_O = 5\hat{x}$ m/s, $\vec{v}_A = 2\hat{x}$ m/s

c) $\vec{\omega} = 10{,}7\ \hat{z}$ rad/s.



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

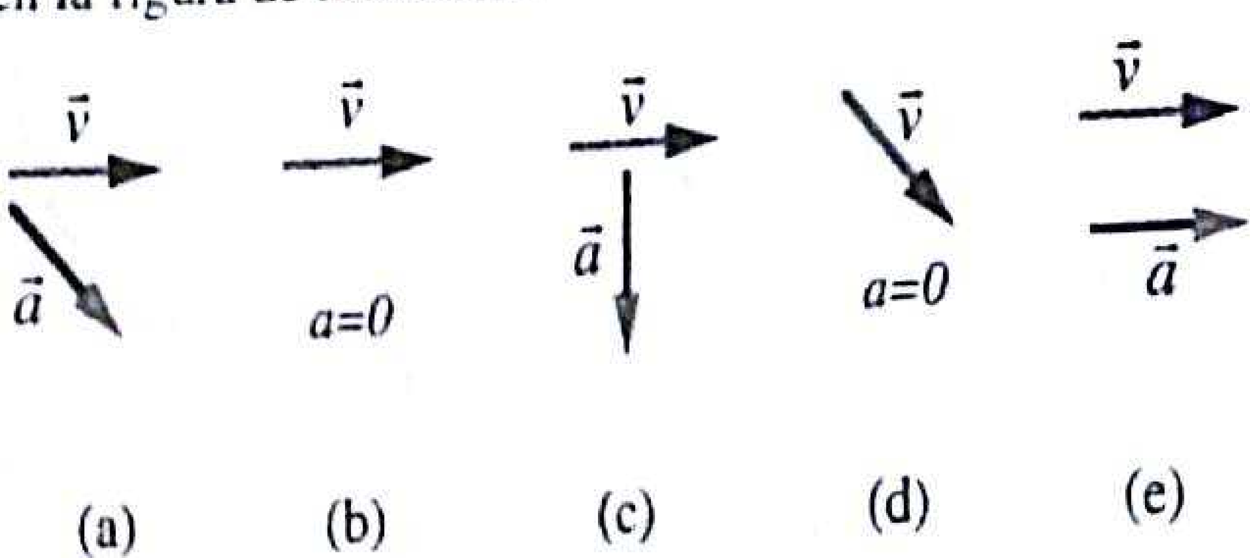
PE-2.01. *¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera?*

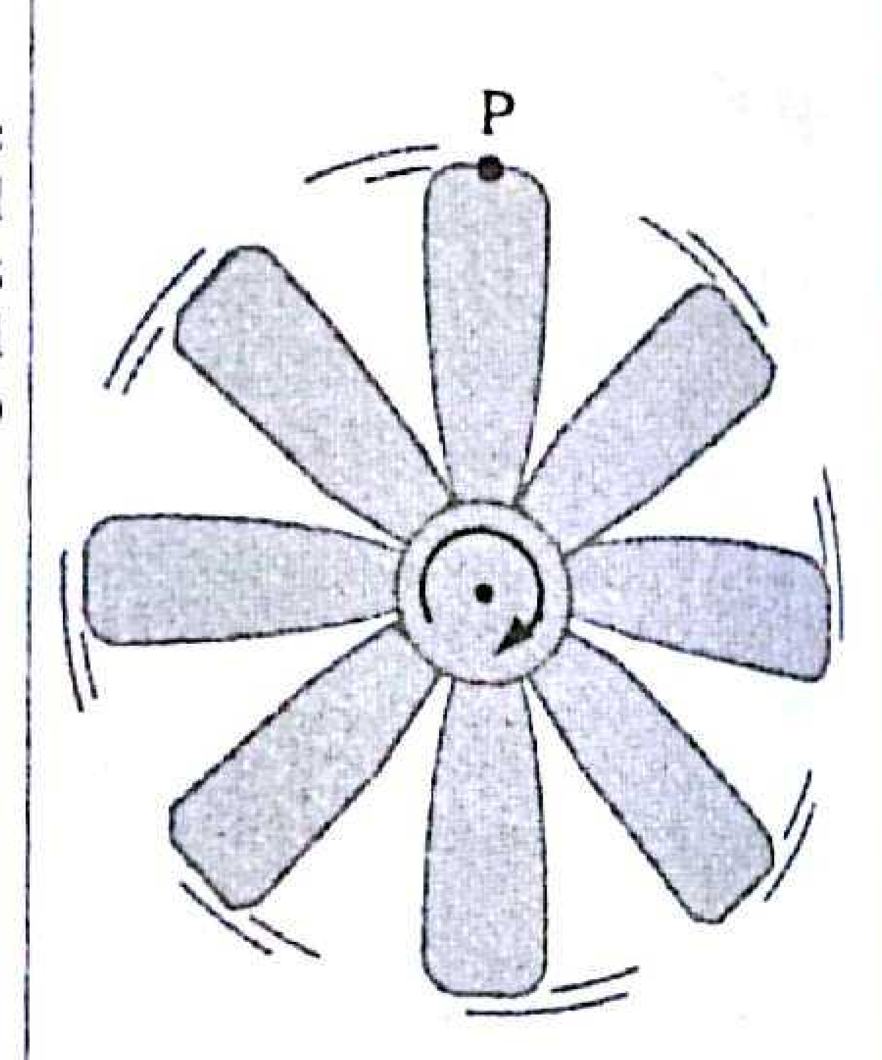
Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, sus diferentes puntos...

a) Pueden tener diferentes velocidades angulares.
b) Pueden tener diferentes aceleraciones angulares.
c) Tienen la misma aceleración radial.
d) Tienen la misma aceleración tangencial.
e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

PE-2.02. *Mosca con el aspa*

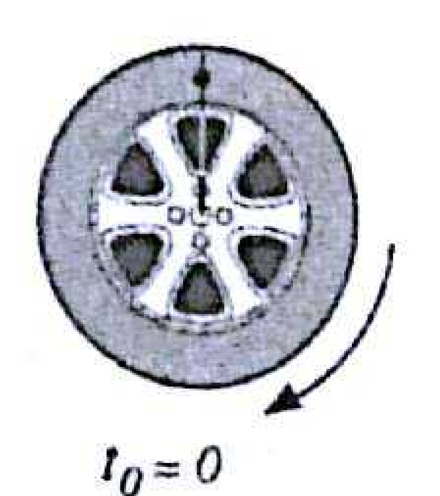
Una mosca se posa en un punto P ubicado en el borde de un aspa de un ventilador. Si las aspas giran a velocidad angular constante, ¿cuál de los siguientes diagramas representa mejor las direcciones de los vectores velocidad y aceleración lineal de la mosca en ese instante mostrado en la figura de la derecha?



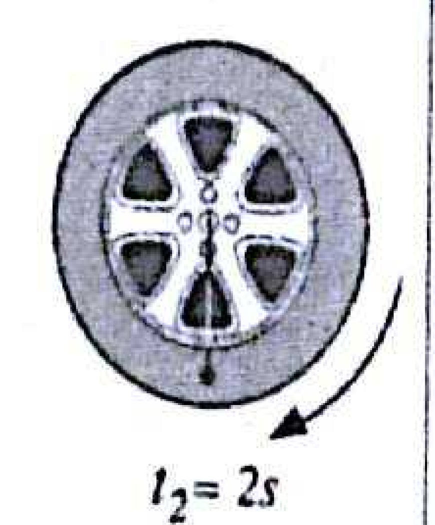


PE-2.03. *¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?*

Una rueda está girando con aceleración angular constante. La rueda tiene un marca pintada que en el instante $t_0 = 0$ señala hacia arriba. En el instante $t_1 = 1$s la rueda ha girado una vuelta completa y la marca señala de nuevo hacia arriba. En el instante $t_2 = 2$s la rueda ha girado un total de 2,5 vueltas y la marca señala hacia abajo.



$t_0 = 0$



$t_1 = 1s$

$t_2 = 2s$

¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?

a) $\alpha = 0.5\,\pi$ rad/s^2
b) $\alpha = \pi$ rad/s^2
c) $\alpha = 2{,}5$ rad/s^2
d) $\alpha = 2\,\pi$ rad/s^2
e) $\alpha = 3\pi/2$ rad/s^2

PE-2.04. *Velocidad angular inicial de la rueda*

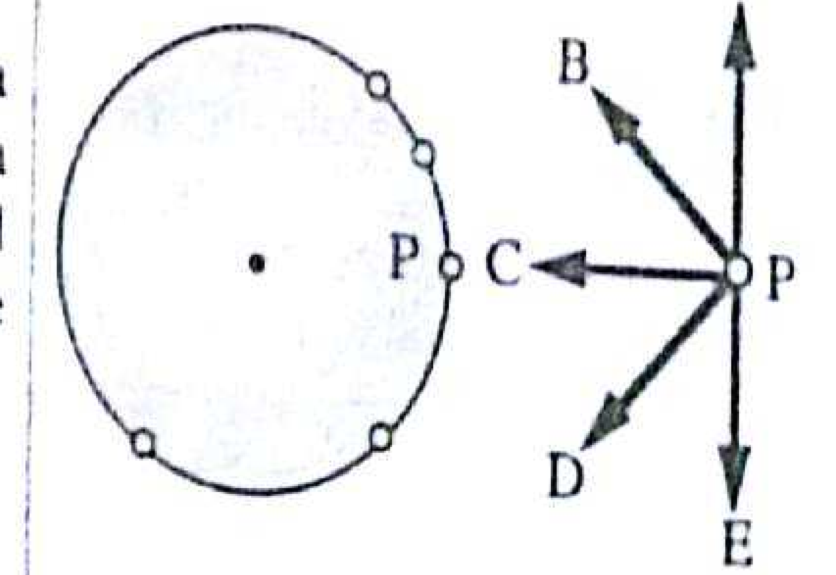
Considere de nuevo la rueda del problema anterior que está girando con aceleración angular constante. ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda en el instante inicial $t_0 = 0$?

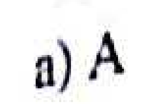
a) $\omega_0 = 2{,}0$ rad/s, b) $\omega_0 = \pi$ rad/s, c) $\omega_0 = 2{,}5$ rad/s

d) $\omega_0 = 3\pi/2$ rad/s, e) $\omega_0 = 4\pi$ rad/s

PE-2.05. *¿Hacia dónde apunta el vector aceleración?*

La siguiente figura sugiere una fotografía estroboscópica (tomada a iguales intervalos de tiempo) de una marca hecha sobre el borde de un disco que está girando. ¿Cuál de los vectores indicados representa mejor la dirección de la aceleración instantánea en el punto P?

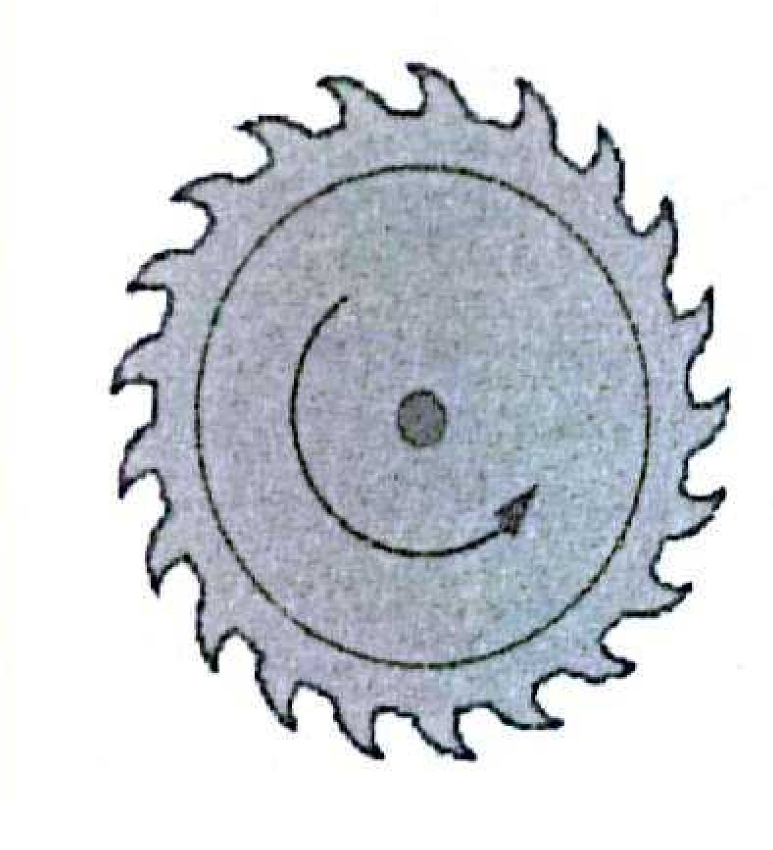


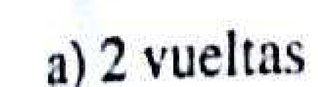


a) A b) B c) C d) D e) E

PE-2.06. *Dispositivo de frenado de una sierra circular*

Una sierra circular tiene un dispositivo de seguridad de manera tal que cuando la velocidad angular es ω_o, al apagarla el disco alcanza el reposo en una vuelta. ¿Cuántas vueltas daría el disco antes de detenerse si se apagara cuando la velocidad angular fuese $2\omega_o$ y es frenado con la misma aceleración angular?



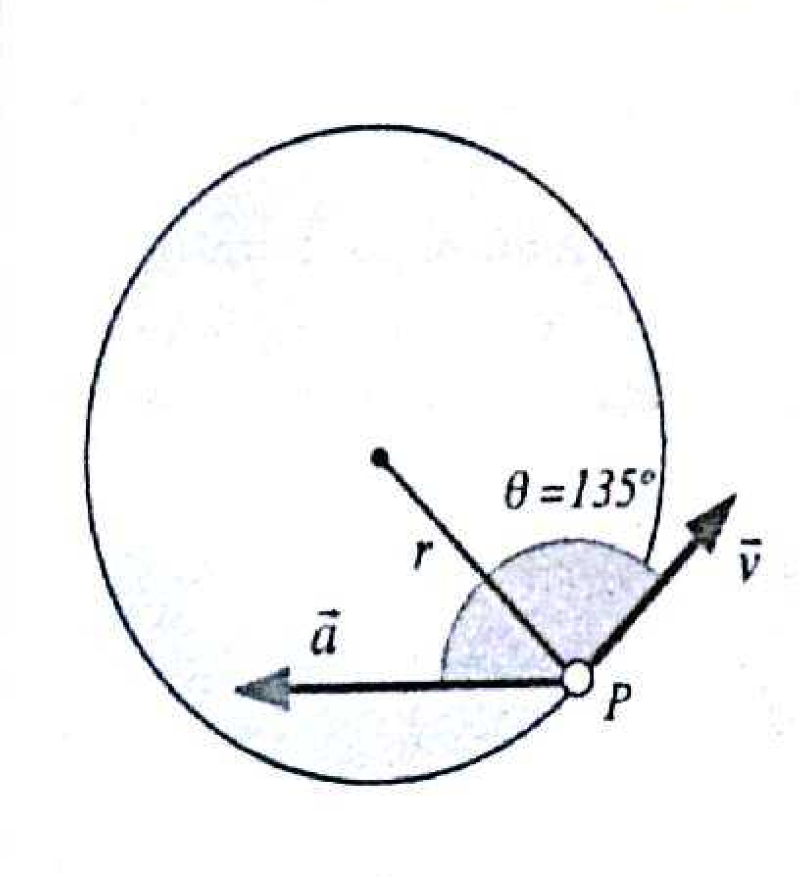


a) 2 vueltas b) 4 vueltas c) 8 vueltas

d) 16 vueltas e) 24 vueltas

PE-2.07. *¿Cuál es la velocidad de ese punto?*

En un punto de la periferia de un disco de radio $r = 0{,}4$ m que está girando se observa que el módulo del vector aceleración lineal es $|\vec{a}| = 14{,}1$ m/s^2 y forma un ángulo $\theta = 135°$ con el vector velocidad. ¿Cuál es la velocidad de ese punto?



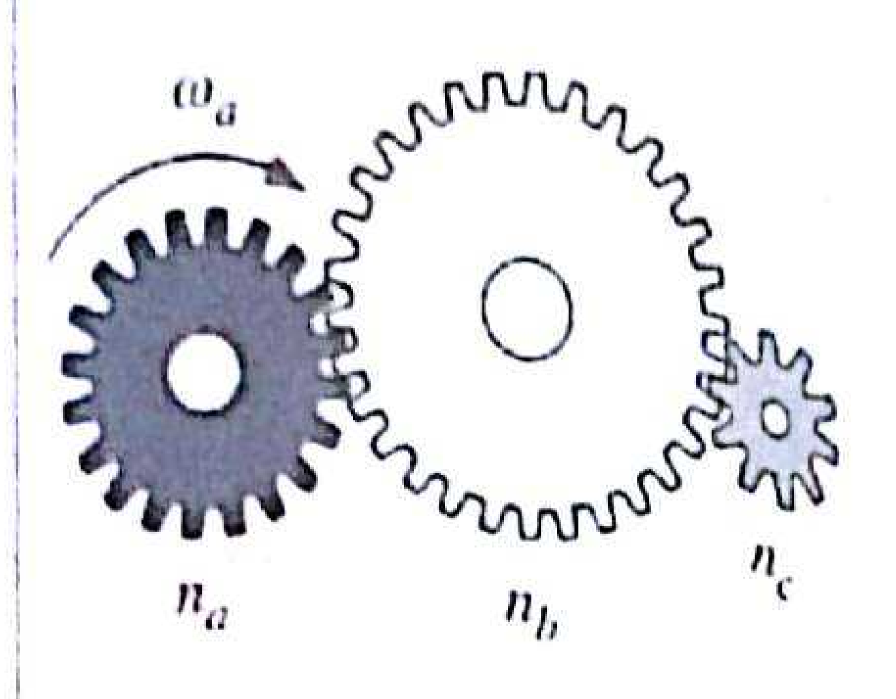


a) $v = 2$ m/s b) $v = 2{,}37$ m/s c) $v = 4$ m/s

d) $v = 5{,}6$ m/s e) $v = 14{,}1$ m/s

PE-2.08. *Tres engranajes del mecanismo de un reloj*

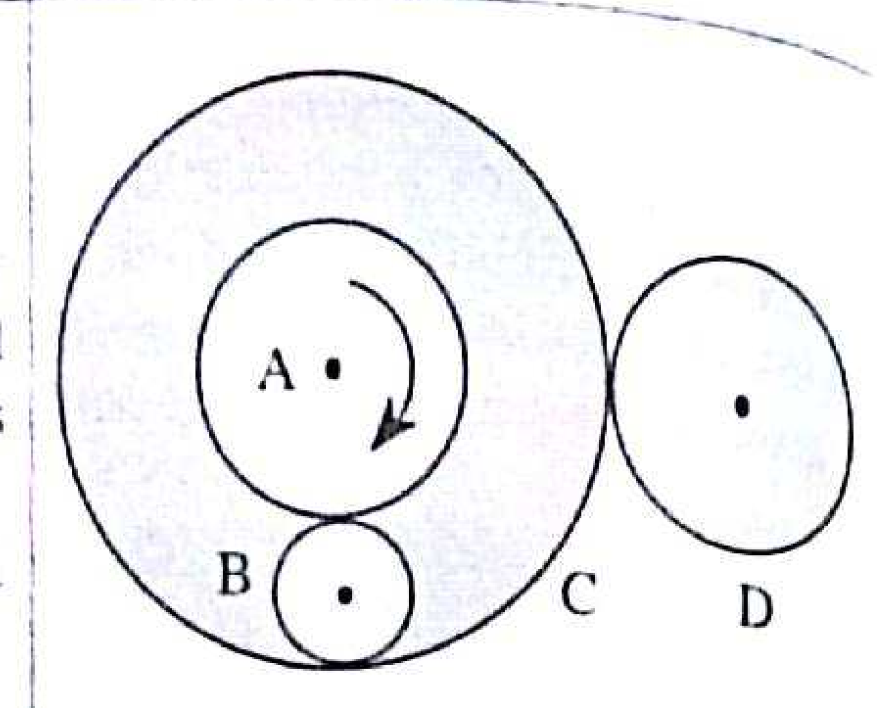
Tres engranajes con distintos números de dientes: $n_a = 20$, $n_b = 30$ y $n_c = 10$, están acoplados como se indica en la figura. Si el engranaje n_a gira con una rapidez angular $\omega_a = 6$ rpm, el engranaje n_c gira con una rapidez angular:



a) $\omega_c = 3$ rpm en sentido anti-horario
b) $\omega_c = 8$ rpm en sentido anti-horario
c) $\omega_c = 9$ rpm en sentido horario
d) $\omega_c = 12$ rpm en sentido horario
e) $\omega_c = 18$ rpm en sentido horario

PE-2.09. *Acoplamiento de cuatro engranajes*

Sean cuatro engranajes A, B, C y D con ejes paralelos y se encuentran acoplados como se indica en la figura. El radio de C es el doble que el radio de A. El radio de A es igual al de D y a su vez el doble que el radio de B.
Si la rapidez angular del engranaje interno A es ω_O, ¿cuál será la rapidez angular del engranaje externo D ?



$r_C = 2r_A$
$r_A = r_D = 2r_B$

a) ω_O b) $2\omega_O$ c) $4\omega_O$ d) $8\omega_O$ e) $16\omega_O$

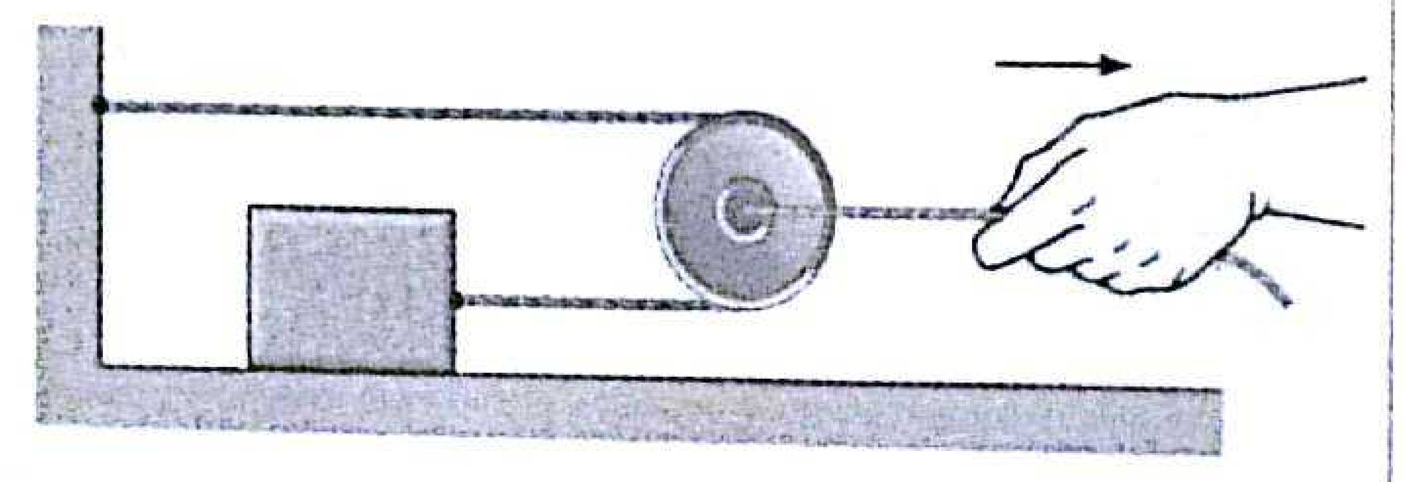
PE-2.10. *Alineación de las agujas del reloj*

El tiempo que transcurre entre dos coincidencias consecutivas de las agujas de un reloj (cuando quedan sobre una misma línea recta) es:

a) 27,28 minutos b) 30 minutos c) 60 minutos
d) 65,44 minutos e) 32,72 minutos

PE-2.11. *¿Cuál será el desplazamiento del bloque?*

Una cuerda inextensible tiene un extremo fijo a la pared y el otro extremo está unido a un bloque después de pasar sobre una polea. El bloque está sobre un plano horizontal.

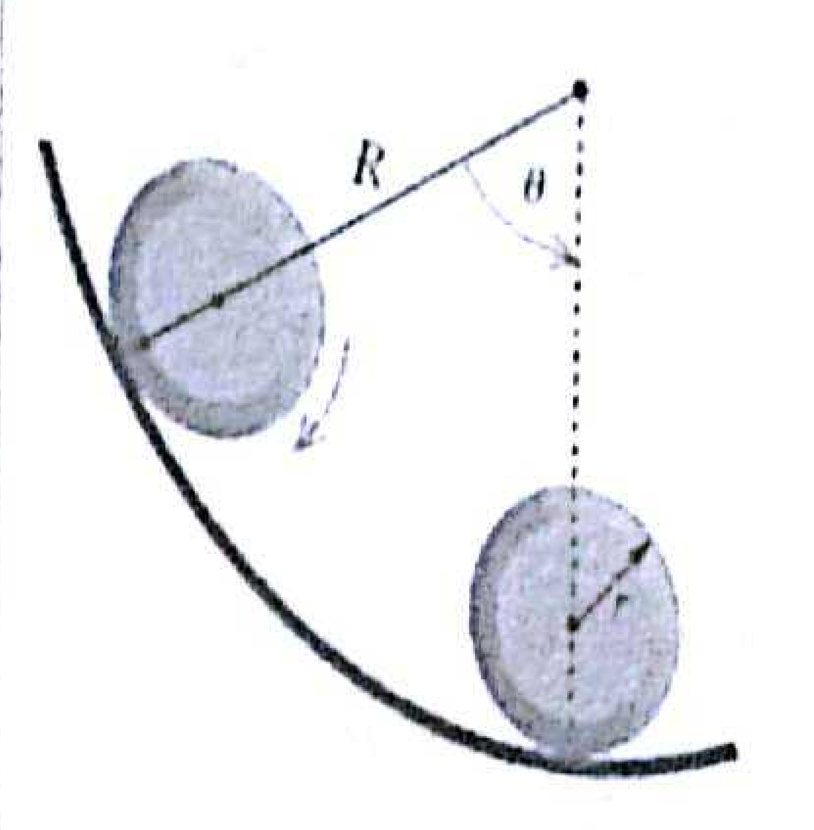


Si se jala la polea por su eje para desplazarla una distancia d hacia la derecha, ¿qué distancia se desplazará el bloque?

a) $d/2$
b) d
c) $3d/2$
d) $2d$
e) $3d/4$

PE-2.12. *¿Qué ángulo gira la rueda?*

Una rueda de radio r rueda sin deslizar sobre una pista circular de radio R. Cuando el eje de la rueda ha girado un ángulo θ sobre la pista, la rueda habrá girado sobre su eje un ángulo:

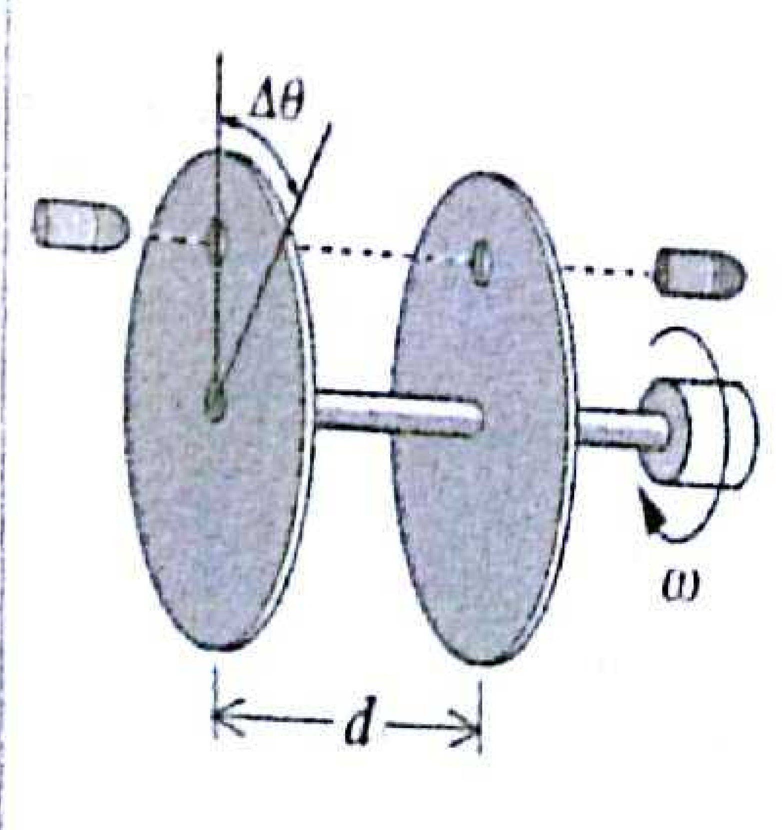


a) $\phi = \frac{r}{R}\theta$, b) $\phi = (\frac{R}{r})\theta$, c) $\phi = (\frac{R-r}{r})\theta$

d) $\phi = (\frac{r}{R-r})\theta$, e) $\phi = \theta$

PE-2.13. *¿Cómo determinar la velocidad de una bala?*

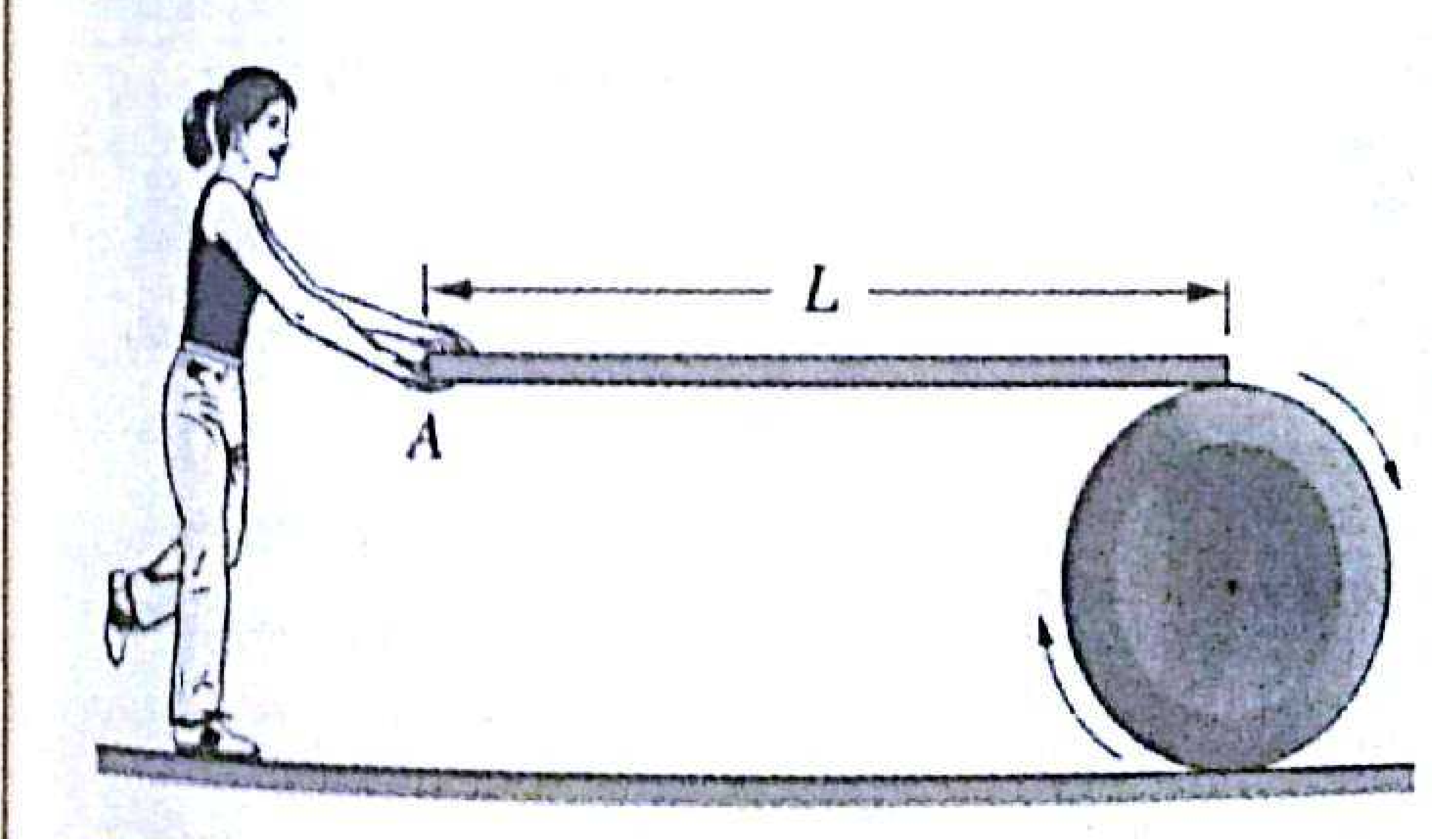
Para determinar la velocidad de una bala, se montan sobre un mismo eje dos discos de papel que giran a velocidad angular $\omega = 50$ rad/s, y a una distancia $d = 1,2$ m. Si al disparar una bala, en los discos quedan agujeros separados por un ángulo $\Delta\theta = 0,4$ rad, la velocidad de esa bala es:



a) $v = 300$ m/s, b) $v = 240$ m/s, c) $v = 150$ m/s
d) $v = 400$ m/s e) $v = 600$ m/s

PE-2.14. *Deslizando una tabla sobre un tambor*

Una alumna sostiene el extremo de una tabla de longitud L, mientras que el otro extremo de la tabla descansa sobre un tambor cilíndrico. La tabla se halla horizontalmente y cuando ella comienza a empujarla hacia adelante, el tambor rueda sin resbalar, ni en el suelo ni en la tabla.



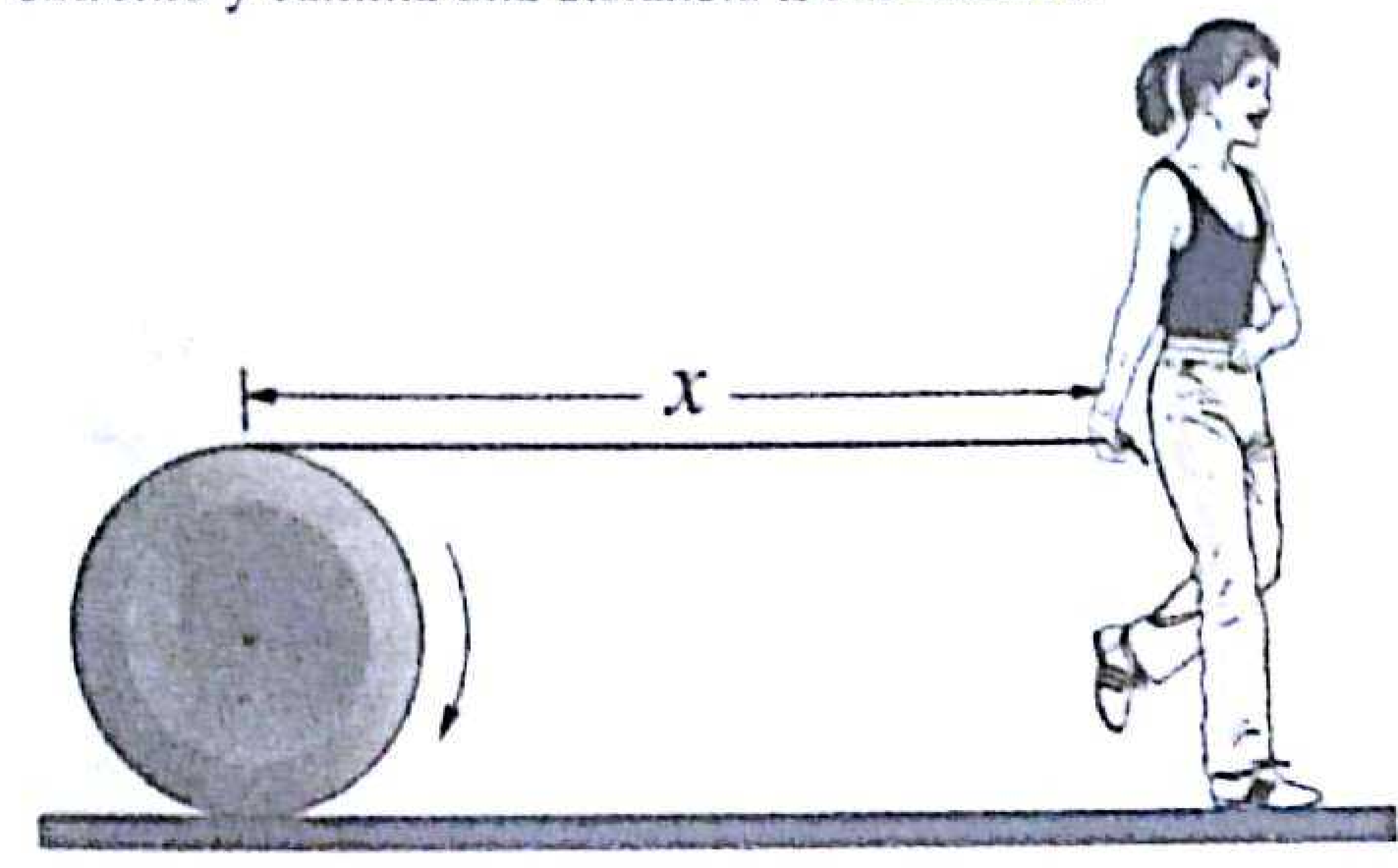
¿Qué distancia debe caminar la alumna para llegar hasta el tambor, de modo que el extremo A de la tabla quede ubicado justo encima del centro del tambor?

a) $x = L$
b) $x = L/2$
c) $x = 3L/4$
d) $x = 3L/2$
e) $x = 2L$

* Verifica tu predicción usando una regla y una lata de refresco.

PE-2.15. *¿Qué longitud de cuerda se desenrollará?*

Un carrete grande descansa sobre el piso y tiene una cuerda enrollada. Una alumna agarra la cuerda por un extremo y camina una distancia L sin soltarla.



Si el carrete rueda detrás de la alumna sin resbalar, ¿qué longitud de cuerda se desenrollará del carrete?

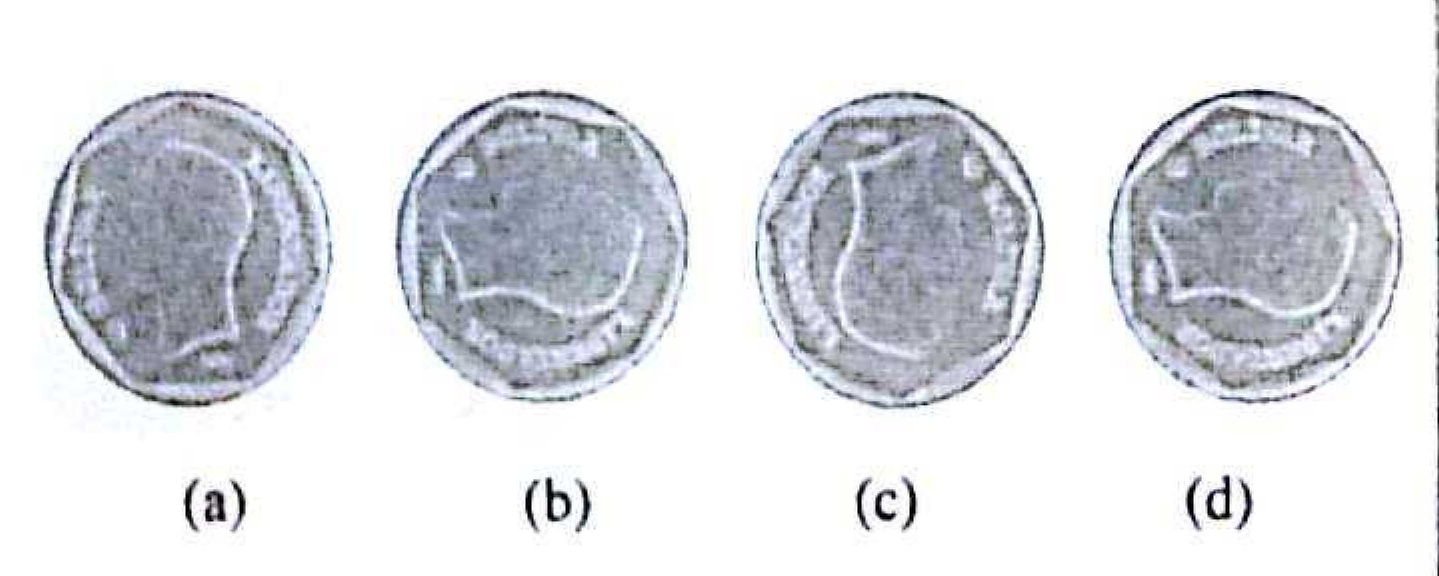
a) $x = L$
b) $x = L/2$
c) $x = 3L/4$
d) $x = 3L/2$
e) $x = 2L$

* Se sugiere no hacer el experimento sin antes tratar de predecir el resultado.

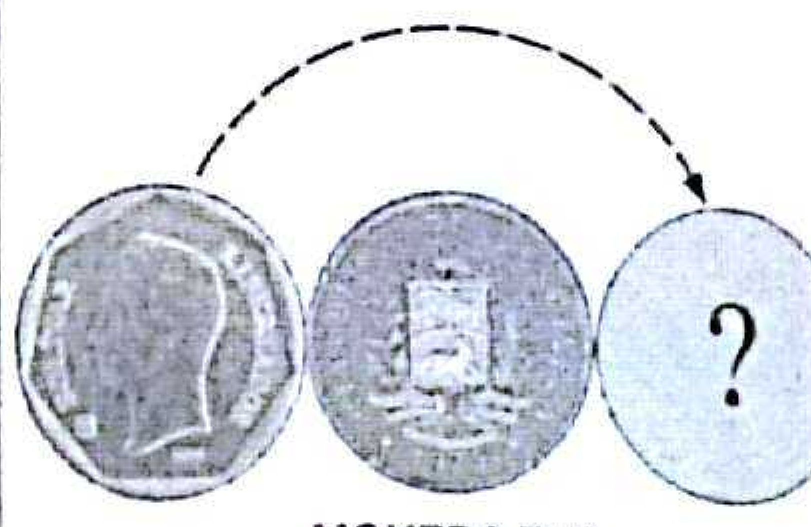
PE-2.16. *¿Cómo quedará la moneda?*

Sobre una superficie coloque dos monedas una junto a la otra, como se muestra a la derecha. A continuación mantenga fija una de ellas y ruede la otra a su alrededor sin que deslice.

¿Cuál de las figuras mostradas a la izquierda indica la orientación final de la moneda que gira?



(a) (b) (c) (d)

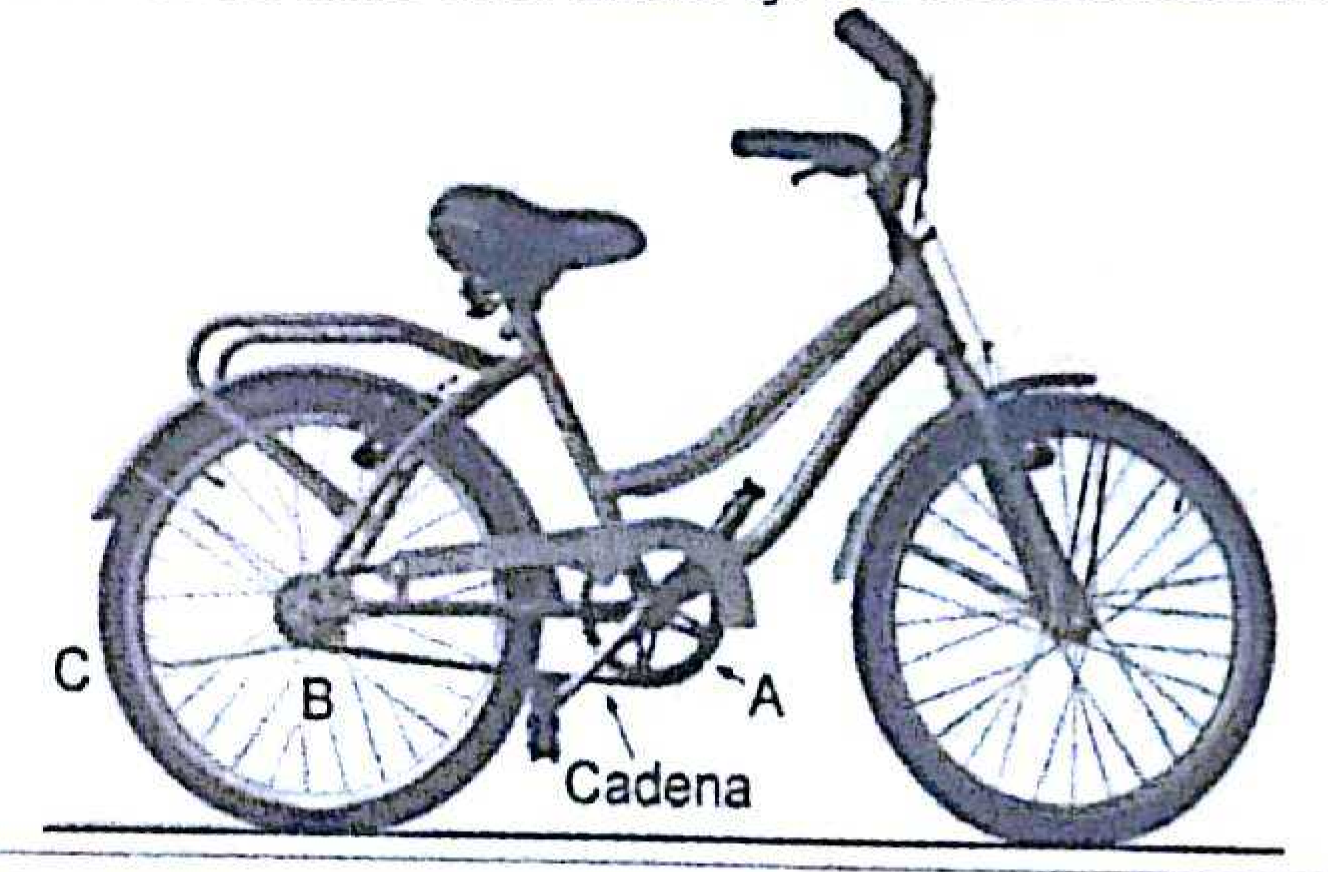


MONEDA FIJA

* Se sugiere no hacer el experimento sin antes tratar de predecir el resultado.

PE-2.17. *Rotación de los pedales en una bicicleta*

Cuando se pedalea una bicicleta, la rotación de la rueda dentada A se transmite por una cadena al piñón B, el cual a su vez está unido en el mismo eje con la rueda trasera C.

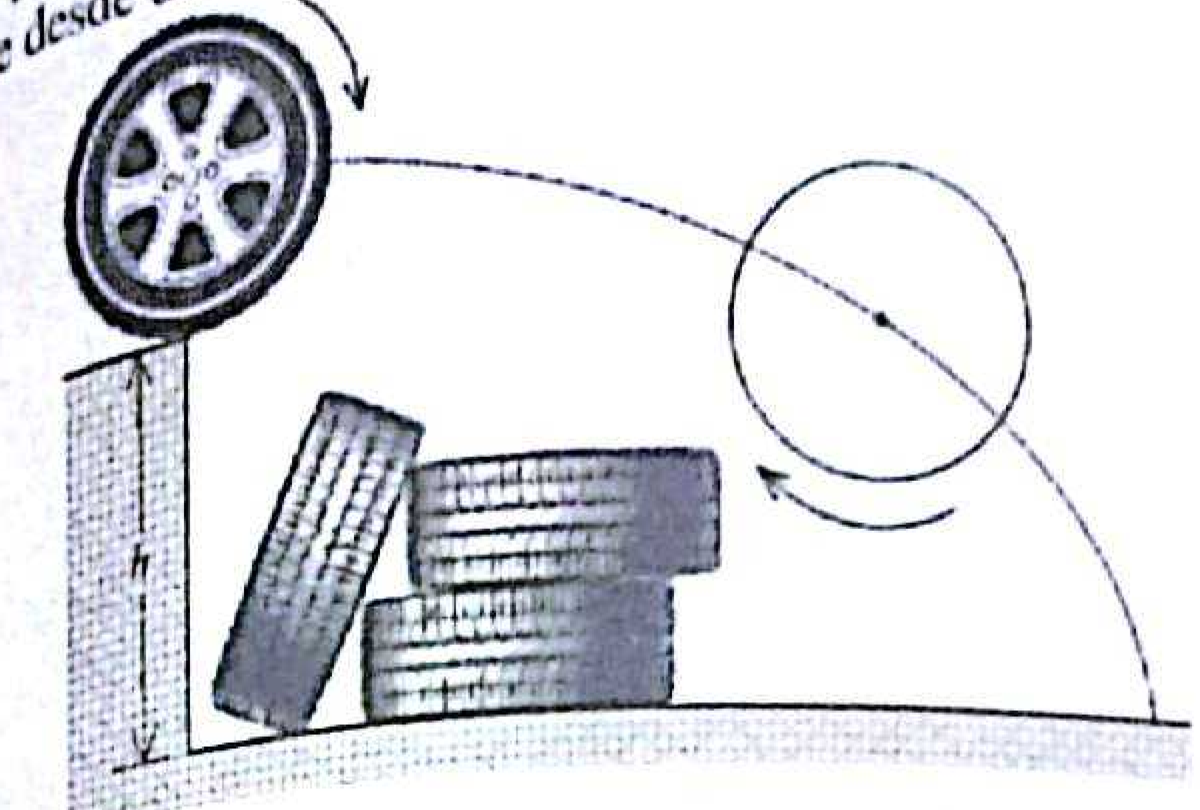


Si consideramos las velocidades lineales y angulares de los puntos en la periferia de cada una de las ruedas, se debe cumplir que:

a) $v_A = v_B < v_C$ $\omega_A = \omega_B < \omega_C$
b) $v_A > v_B = v_C$ $\omega_A > \omega_B = \omega_C$
c) $v_A = v_B > v_C$ $\omega_A = \omega_B > \omega_C$
d) $v_A = v_B < v_C$ $\omega_A < \omega_B = \omega_C$
e) $v_A < v_B = v_C$ $\omega_A < \omega_B = \omega_C$

PE-2.18. *¿Cuántas vueltas da la rueda en el aire?*

Una rueda de radio $R = 0{,}5$ m va rodando sin deslizar por un plano horizontal con una velocidad $v = 2\pi$ m/s y luego cae desde una altura $h = 4{,}9$ m.

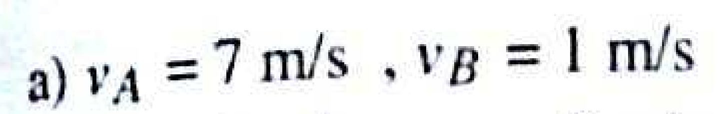


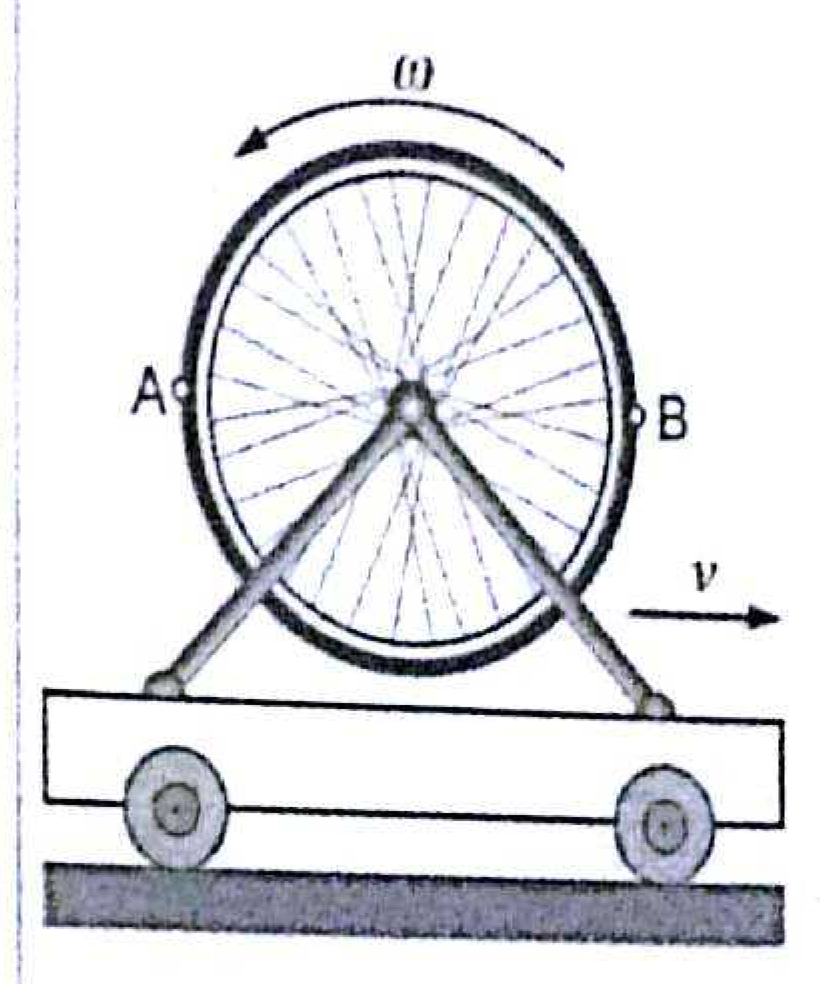
¿Cuántas vueltas completas da la rueda mientras está en el aire?

a) 1 vuelta
b) 2 vueltas
c) 4 vueltas
d) 2π vueltas
e) 49 vueltas

PE-2.19. *Rueda dando vueltas en un carrito móvil*

Una rueda de radio $R = 0{,}5$ m está situada sobre un carrito que avanza por una vía horizontal con una velocidad $v = 3$ m/s. La rueda se pone en rotación en sentido anti-horario con una velocidad angular $\omega = 8$ rad/s en torno al eje que pasa por su centro. Si consideramos los puntos A y B en la periferia, podemos decir que los módulos de las velocidades en esos puntos en relación con el suelo son:



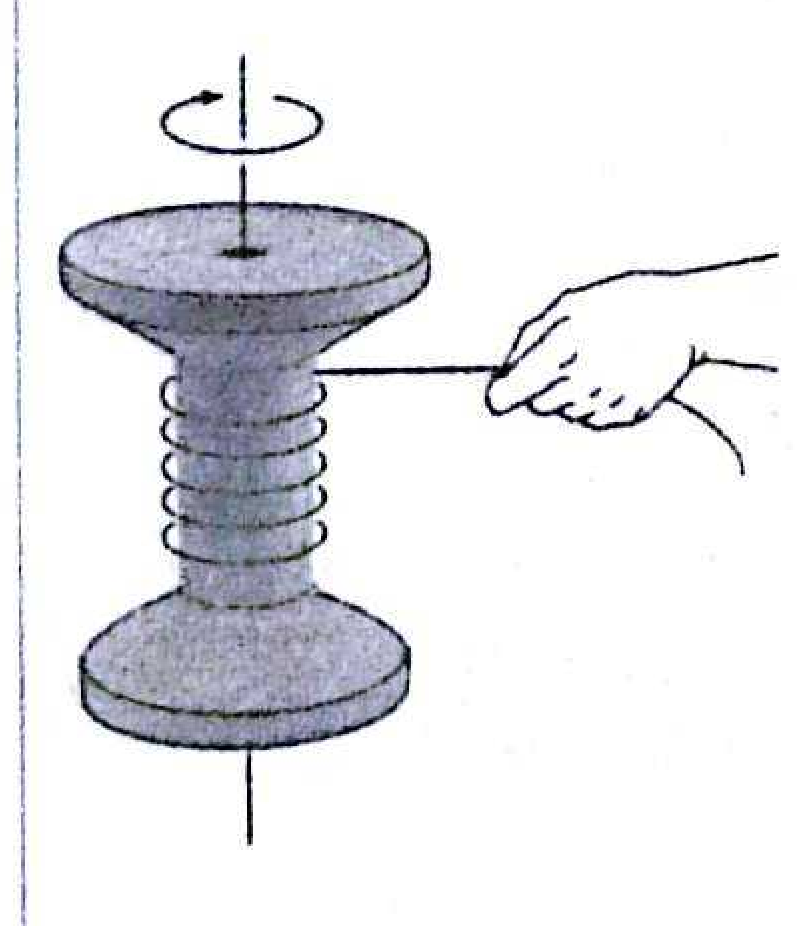


a) $v_A = 7$ m/s , $v_B = 1$ m/s
b) $v_A = 3$ m/s , $v_B = 5$ m/s
c) $v_A = 5$ m/s , $v_B = 7$ m/s
d) $v_A = 1$ m/s , $v_B = 7$ m/s
e) $v_A = 5$ m/s , $v_B = 5$ m/s

PE-2.20. *Desenrollando aceleradamente un carrete*

Un hilo está enrollado en un carrete cilíndrico de radio $R = 2{,}0$ cm, cuyo eje central está fijo en un soporte. Se tira del hilo aceleradamente desde reposo durante 10 segundos y en ese tiempo se desenrollan 5 metros de hilo. ¿Cuál fue la aceleración angular del carrete?





a) $\alpha = 1$ rad/s^2
b) $\alpha = 2$ rad/s^2
c) $\alpha = 5$ rad/s^2
d) $\alpha = 10$ rad/s^2
e) $\alpha = 25$ rad/s^2

CAP. 2: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
2.01					√
2.03		√			
2.05				√	
2.07	√				
2.09	√				
2.11				√	
2.13			√		
2.15		√			
2.17				√	
2.19					√

	a	b	c	d	e
2.02			√		
2.04				√	
2.06		√			
2.08				√	
2.10					√
2.12			√		
2.14					√
2.16	√				
2.18		√			
2.20			√		

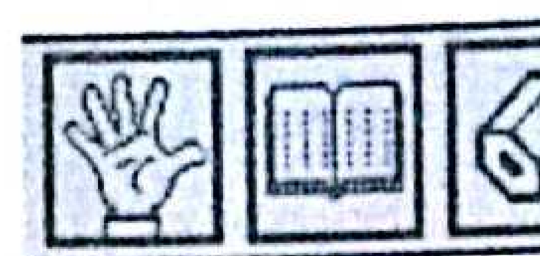
3

DINÁMICA DE ROTACIÓN

Hemos visto que el movimiento de rotación de un cuerpo rígido se describe en términos de las variables cinemáticas: desplazamiento angular θ, velocidad angular ω, y aceleración angular α. Ahora pasamos a estudiar la dinámica de rotación, es decir, las relaciones entre las variables cinemáticas y las propiedades que causan los cambios en el movimiento de rotación de los cuerpos. Cuando se aplican las leyes de Newton a la rotación, es necesario introducir ciertas magnitudes físicas que son análogas a las de la dinámica de traslación; estas son: el momento de inercia, I, que es el análogo de la masa, y el torque, $\vec{\tau}$, que está relacionado con la fuerza. El momento de inercia respecto a un eje considerado, depende no solamente del valor de la masa del cuerpo, sino también de cómo está distribuida la masa con relación a dicho eje. El torque o momento de una fuerza depende del punto del cuerpo donde está aplicada dicha fuerza. Veremos que el torque neto que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, en la misma manera que la fuerza neta sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. Es decir, la ley fundamental de la dinámica de un cuerpo en rotación es: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, "El torque de las fuerzas externas que hacen girar un cuerpo rígido en torno a un eje dado, es igual al producto del momento de inercia del cuerpo respecto a dicho eje por la aceleración angular del cuerpo". En el caso mas general, el eje de rotación no está fijo en el espacio. Trataremos primero la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje que está fijo en un marco de referencia inercial (rotación pura). Posteriormente, se discutirá la rotación de cuerpos rígidos en torno a ejes que no están fijos en el espacio, específicamente veremos que el caso común del rodamiento de un cuerpo se puede analizar como un movimiento combinado de rotación y traslación.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Momento de torsión o Torque
- Momento de Inercia
- El torque y la aceleración angular
- Energía cinética de rotación
- Trabajo y energía cinética en la rotación
- Rodamiento: una combinación de rotación y traslación



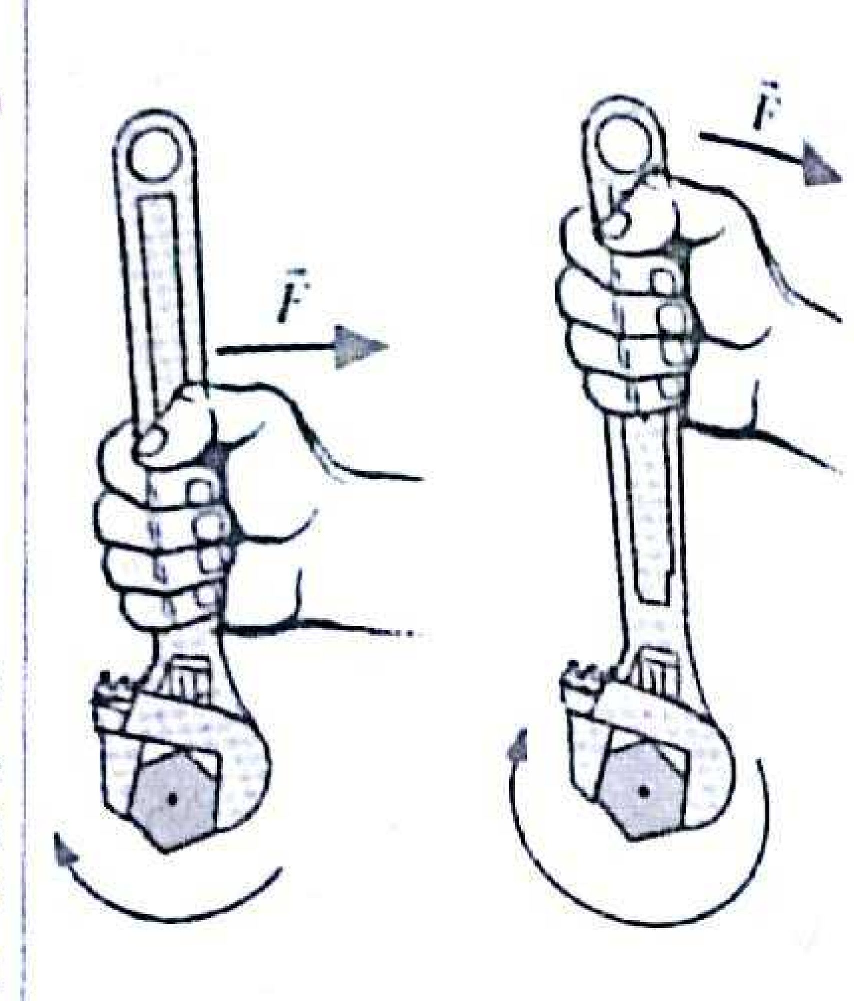
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

MOMENTO DE TORSIÓN O TORQUE

La tendencia de una fuerza en hacer girar un cuerpo rígido alrededor de un eje depende de tres propiedades:

1) El módulo de la fuerza
2) La dirección de la fuerza
3) El punto de aplicación respecto del eje de rotación.

Así por ejemplo, cuando tratamos de aflojar o apretar una tuerca con una llave inglesa, la acción será más efectiva, no solamente si aumentamos el módulo de la fuerza, sino también, cuando aplicamos la fuerza en un punto que esté lo más alejado posible del eje de rotación y en una dirección perpendicular al mango de la llave.

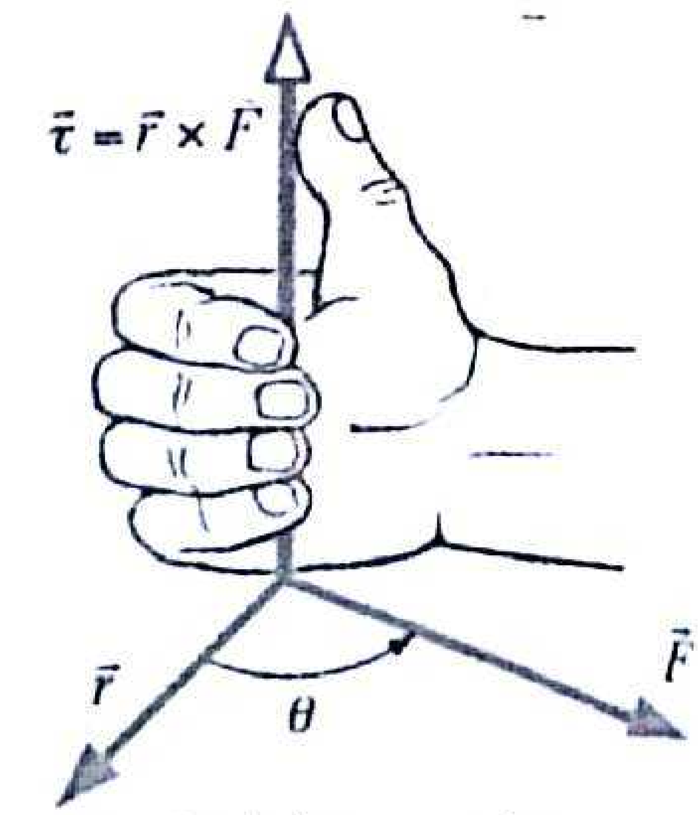


Para cuantificar el efecto de la torsión de una fuerza se define el momento de torsión o *torque*, por el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza, $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

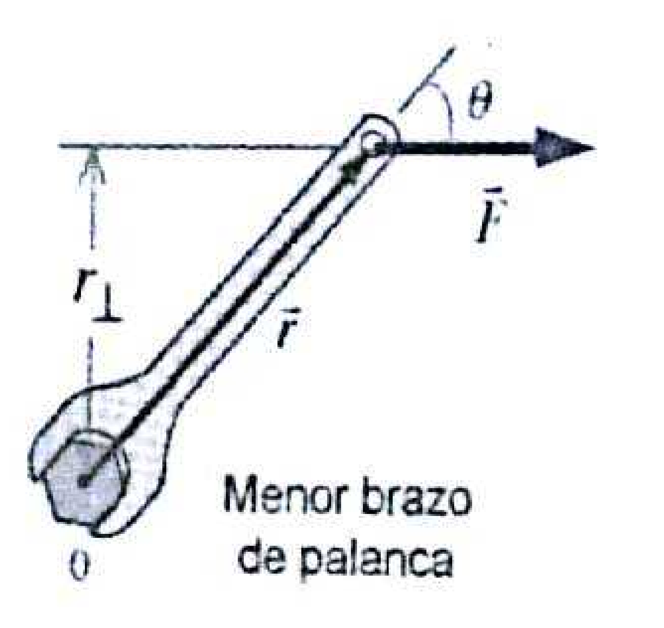
La unidad SI del torque es newton-metro: N·m.

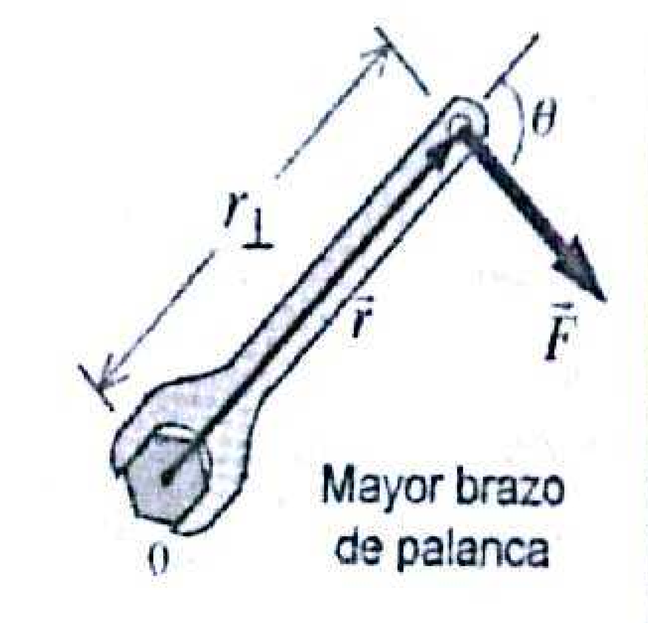
La dirección del torque $\vec{\tau}$ es perpendicular a ambos vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el sentido está determinado por la regla de la mano derecha, según se ilustra en la figura.



Regla de la mano derecha

La distancia efectiva para el torque es la proyección del vector $\vec{r}$ perpendicular a la línea de acción de la fuerza. Esta distancia, $r_\perp$ se denomina *brazo de palanca*.





Módulo del torque

$$|\vec{\tau}| = rFsen\theta = r_\perp F$$

Brazo de palanca

$$r_\perp = rsen\theta$$

MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia de un sistema de partículas respecto de un eje de rotación es la suma de los productos de sus masas m_i por el cuadrado de sus respectivas distancias r_i, perpendiculares a dicho eje.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Momento de inercia de un sistema de N partículas

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

La unidad SI del momento de inercia es: Kg·m².
Observe dos aspectos importantes:
a) El momento de inercia depende del eje de rotación.
b) Una masa dada contribuye con más inercia al sistema mientras más alejada se encuentre del eje.

Cuando el sistema consiste de una distribución continua de materia, la suma se transforma en una integral:

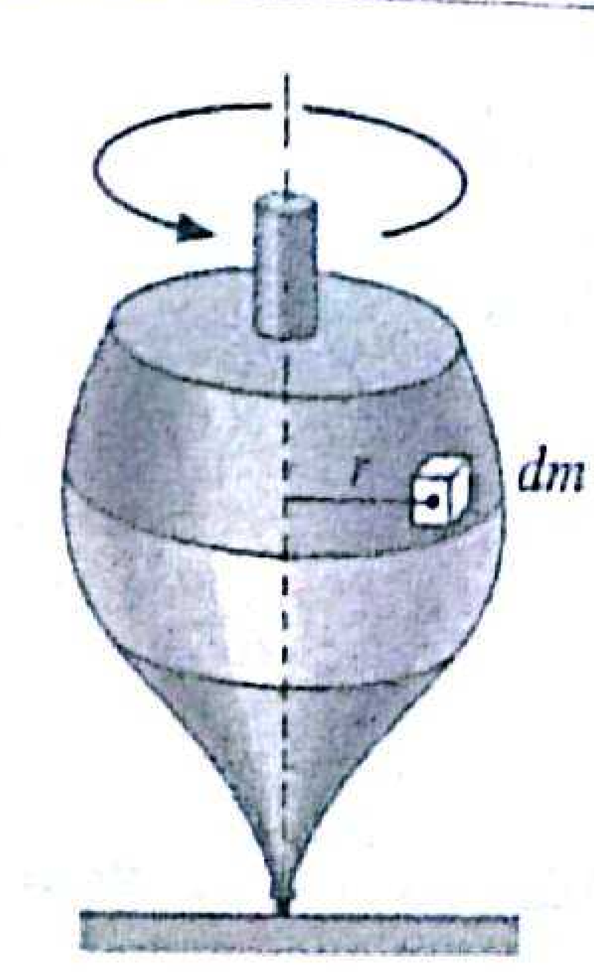
$$I = \int r^2 dm$$

Para el cálculo de I, cada elemento de masa dm se escribe en términos de la densidad volumétrica de masa, ρ:

$$dm = \rho dV$$

En general, la densidad volumétrica de masa es una función de posición, $\rho = \rho(\vec{r})$. Cuando se trata de una placa de espesor uniforme, resulta conveniente definir una densidad superficial de masa, σ (kg/m²).

Los momentos de inercia de cuerpos con geometrías sencillas son relativamente fáciles de evaluar cuando el eje de rotación coincide con un eje de simetría. Para ejes arbitrarios, el cálculo puede resultar tedioso, sin embargo existen dos teoremas que son de gran utilidad.



Momento de inercia de un cuerpo continuo

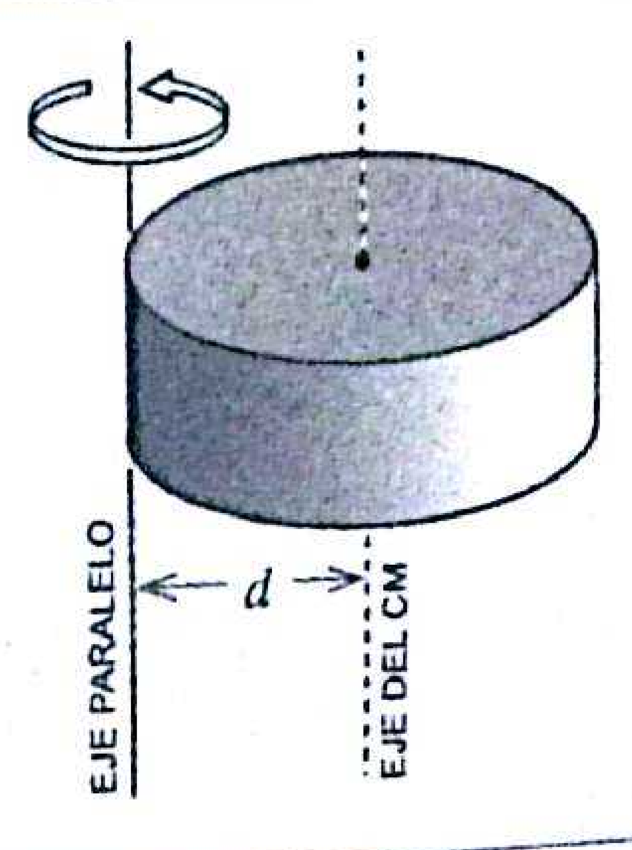
$$I = \int r^2 dm$$

TEOREMA DE EJES PARALELOS (STEINER)

El momento de inercia de rotación de un cuerpo en torno a un eje arbitrario I, es igual al momento de inercia en torno a un eje *paralelo* que pase por el centro de masa, I_{CM}, más la masa total M por la distancia entre los dos ejes, d, elevada al cuadrado:



$$I = I_{CM} + Md^2$$

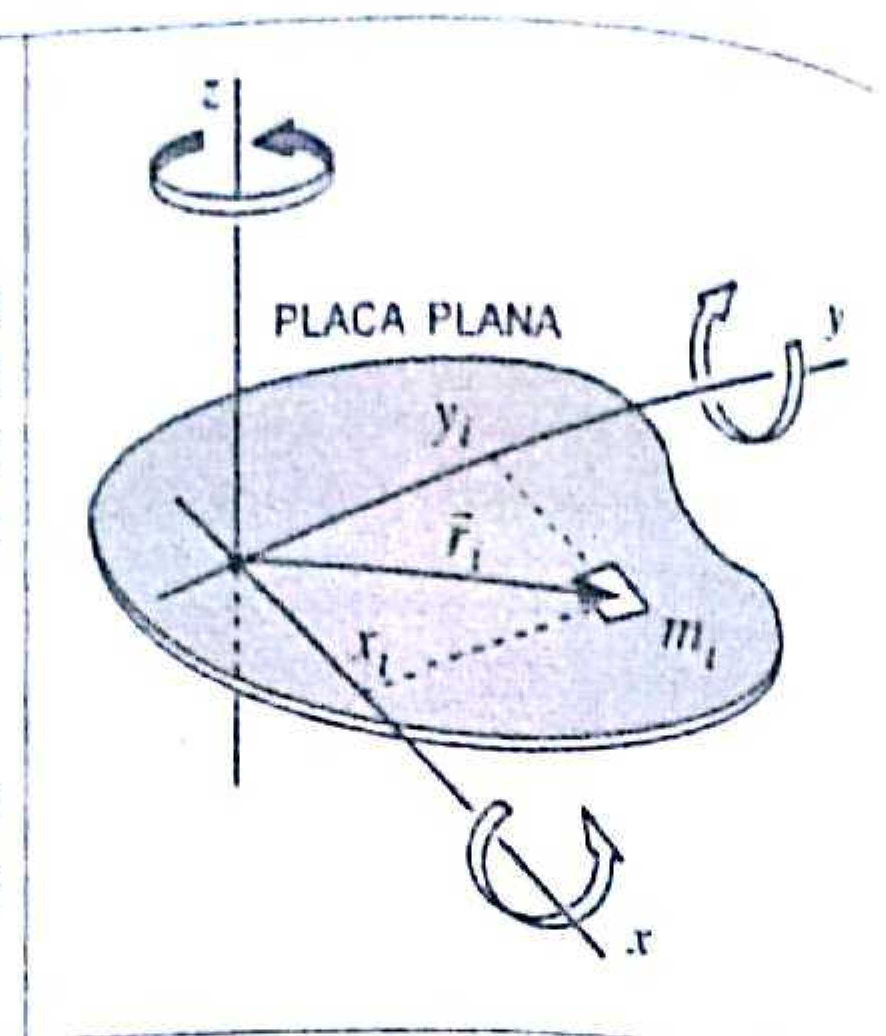


TEOREMA DE EJES PERPENDICULARES

Para un *cuerpo plano*, la suma de los momentos de inercia en torno a cualesquiera dos ejes perpendiculares en el plano del cuerpo, es igual al momento de inercia en torno a un eje perpendicular al plano que pase por su punto de intersección.

$$I_x + I_y = I_z$$

Este teorema es aplicable únicamente a figuras planas (placas). La demostración de estos dos importantes teoremas está dada en la sección de problemas resueltos.



ALGUNOS MOMENTOS DE INERCIA
(En torno a un eje de simetría que pasa por el CM)

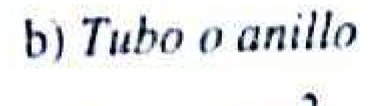
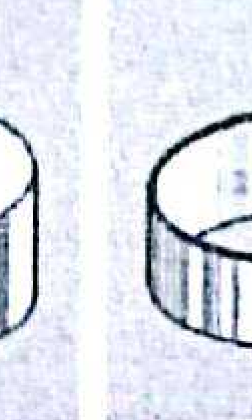
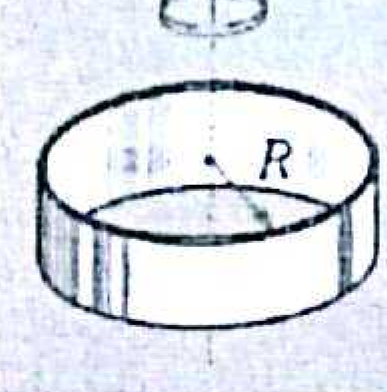
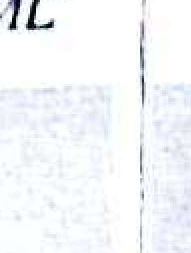
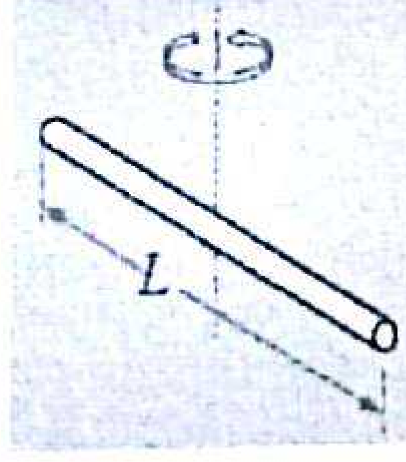
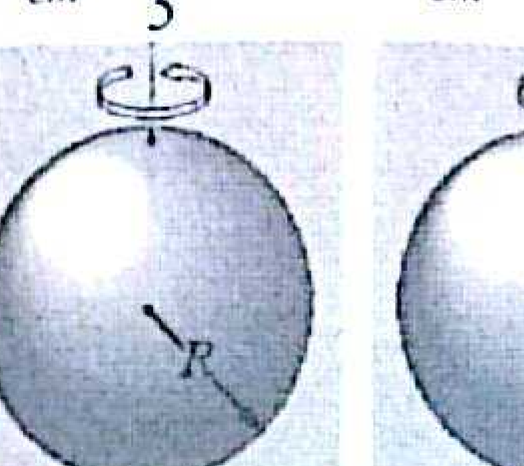
a) *Cilindro macizo* $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

b) *Tubo o anillo* $I_{cm} = MR^2$

c) *Barra delgada* $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

d) *Esfera maciza* $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$

e) *Esfera hueca* $I_{cm} = \frac{2}{3}MR^2$

EL TORQUE Y LA ACELERACIÓN ANGULAR

Supongamos una partícula de masa m_i de un cuerpo que gira en torno al eje z. La componente tangencial de la fuerza externa sobre la partícula i la hace girar en un círculo de radio r_i en un plano xy. La aceleración tangencial está dada por la segunda ley de Newton: $F_i = m_i a_i$. El módulo del torque asociado a esta fuerza es:

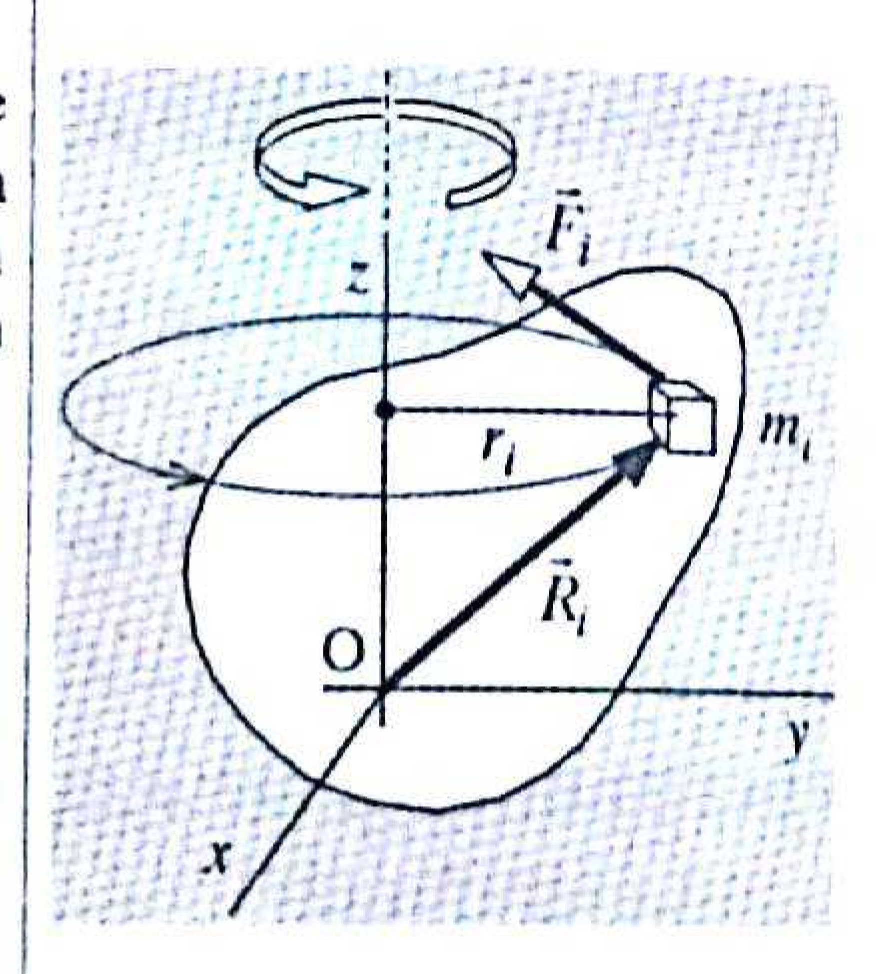
$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

Como todos los elementos de masa giran con la misma aceleración angular, siendo $a_i = r_i \alpha$, tenemos:

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Sumando sobre todas las partículas obtenemos el torque neto sobre el cuerpo:

$$\tau_{neto} = \sum \tau_i = (\sum m_i r_i^2)\alpha = I\alpha$$



Segunda ley de Newton para la rotación

$$\vec{\tau}_{neto} = I\vec{\alpha}$$

El torque neto sobre el cuerpo es debido únicamente a las fuerzas externas ya que los torques internos de cada par de partículas son iguales y opuestos y se anulan. Se puede demostrar que la relación: $\vec{\tau}_{neto} = I\vec{\alpha}$ es válida cuando:

a) El eje de rotación está fijo en posición y dirección.

b) El cuerpo se traslada con aceleración y el eje de rotación a través del centro de masa no cambia de dirección, pero I y α deben calcularse en torno al CM.

Si el centro de masa está acelerado

$$\vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\vec{\alpha}$$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Cuando un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo, una partícula del cuerpo de masa m_i ubicada a una distancia r_i del eje de rotación, tendrá una velocidad $v_i = \omega r_i$, siendo ω□ la velocidadangular que es común a todas las partículas del cuerpo. La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}[\sum m_i r_i^2]\omega^2$$

Tomando en cuenta que: $\sum m_i r_i^2 = I$, tenemos:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Es decir, la energía cinética del cuerpo rígido que gira con una velocidad angular dada, es proporcional a su momento de inercia I con respecto al eje de rotación.

Energía cinética de rotación

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

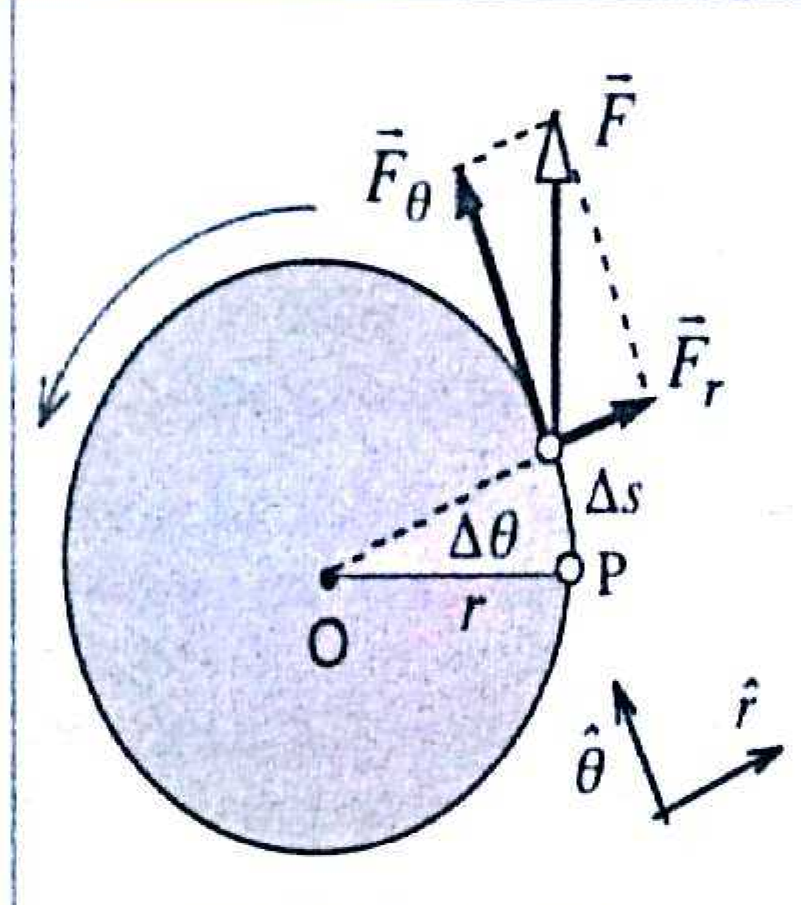
TRABAJO Y ENERGÍA EN LA ROTACIÓN

Sea una partícula P de un cuerpo que gira en torno a un eje fijo. Si una fuerza externa $\vec{F}$ le produce a la partícula un desplazamiento infinitesimal, $ds = r d\theta$, el trabajo elemental realizado por la fuerza es:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_\theta (r d\theta) = \tau d\theta$$

Si la posición angular cambia desde θ_o hasta θ, el trabajo total realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta$$



Trabajo en la rotación

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta$$

Aplicando la regla de la cadena, se puede escribir:

$$\tau = I\alpha = I(\frac{d\omega}{dt}) = I(\frac{d\omega}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = I(\frac{d\omega}{d\theta})\omega$$

De modo que: $dW = \tau\, d\theta = I\omega\, d\omega$, y el trabajo total será:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

"El trabajo realizado por el torque externo es igual al cambio en la energía cinética de rotación del cuerpo"

Energía cinética de rotación:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Relación Energía-Trabajo

$$W = \Delta K_{rot}$$

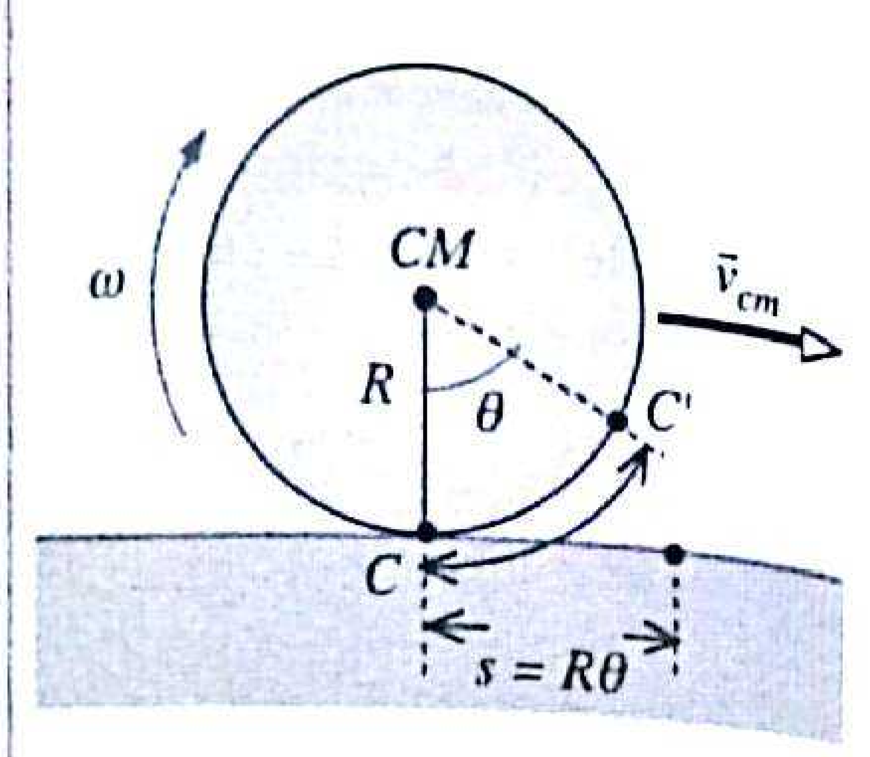
CUERPOS RODANTES

Cuando un cuerpo rueda sin deslizar sobre una superficie plana, sus movimientos de rotación y traslación están acoplados. Si el cuerpo gira un ángulo θ su punto C de contacto con el piso se habrá desplazado una distancia: $\overline{CC'} = s = R\theta$. Como el centro del cuerpo se encuentra directamente encima del punto de contacto, su centro de masa se mueve la misma distancia s. La velocidad del CM es:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Si la rueda tiene una aceleración angular α, como el centro de masa se desplaza sobre una trayectoria rectilínea, su aceleración lineal es horizontal:

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R$$



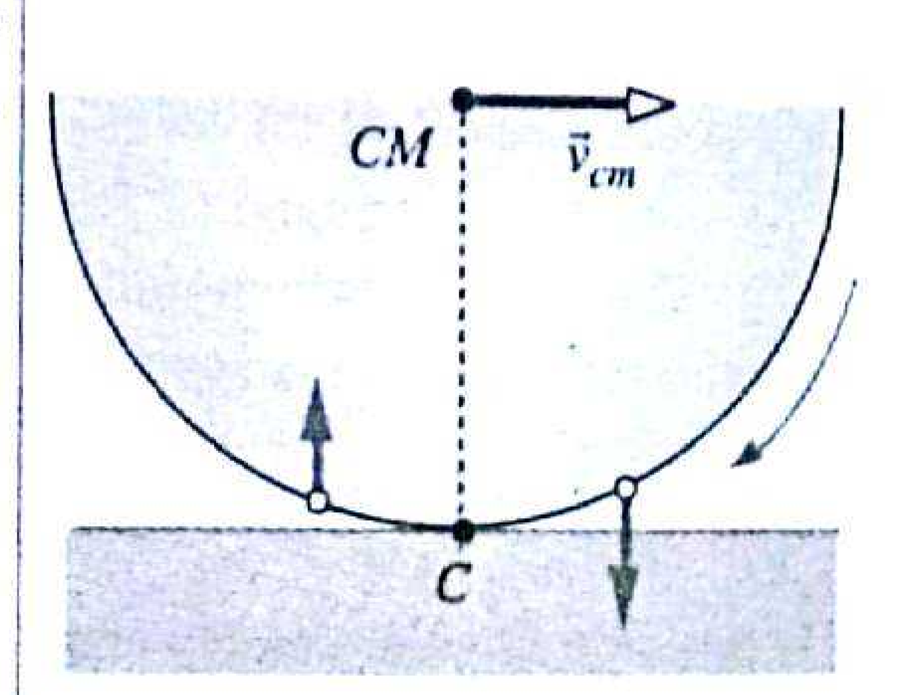
Condición de rodamiento puro

$$v_{cm} = \omega R$$

$$a_{cm} = \alpha R$$

Las ruedas de un automóvil o de una bicicleta se diseñan para que rueden sin resbalar. Es decir, deben ofrecer suficiente rozamiento para que su adhesión al pavimento asegure que el punto C de contacto siempre esté momentáneamente en reposo con respecto al suelo.

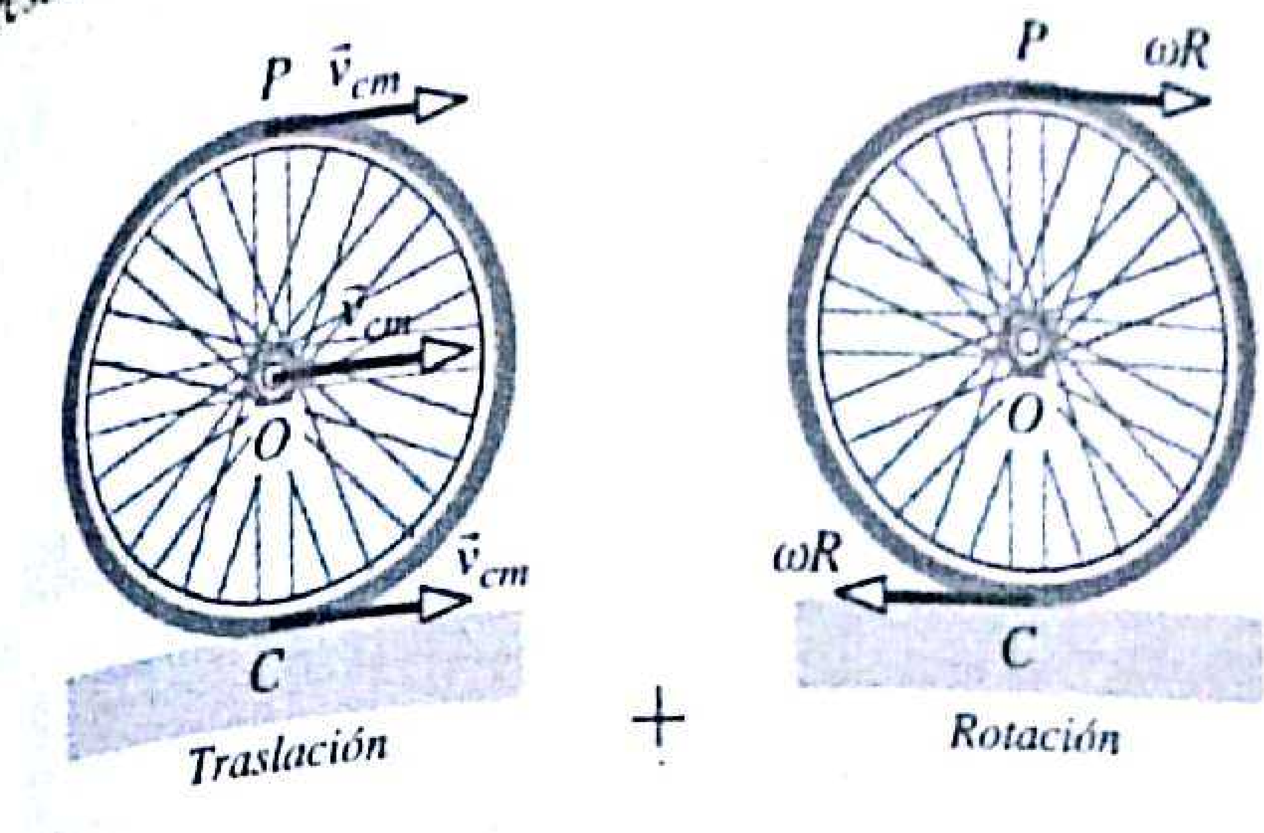
Supongamos una rueda que se traslada hacia la derecha en una superficie plana. En un instante dado, un punto a la izquierda del punto C de contacto, se estará moviendo hacia arriba, mientras que un punto a la derecha de C, se estará moviendo hacia abajo. Un momento después, este último punto tocará el suelo y quedará instantáneamente en reposo; así el proceso se va repitiendo. Es importante observar que, mientras el punto de contacto no resbale, la fuerza de rozamiento no realiza ningún trabajo .



En el rodamiento puro, el punto C de contacto de una rueda está momentáneamente en reposo

Con relación al eje O, el punto C de contacto se mueve hacia atrás con velocidad $v = -\omega R$, mientras que el punto superior se mueve hacia delante con velocidad $v = +\omega R$.

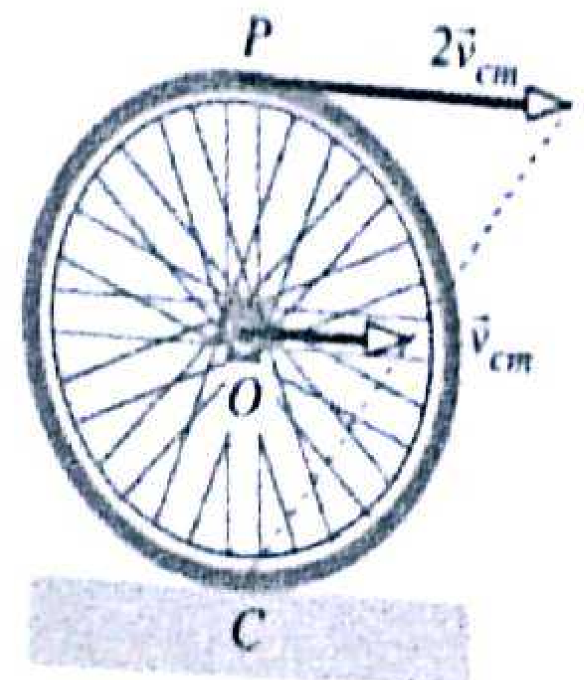
El rodamiento de un cuerpo rígido se puede visualizar como la superposición de dos movimientos: una rotación pura respecto a un eje que pasa por su centro de masa, superpuesto a la traslación pura de este eje. Las velocidades instantáneas de los puntos de la rueda resultan de la superposición de estos dos movimientos.



En el punto superior P:
$v_P = v_{cm} + R\omega\square = 2v_{cm}$

En el punto del eje O:
$v_O = v_{cm} + 0\square = v_{cm}$

En el punto de contacto C:
$v_C = v_{cm} - R\omega = 0$



ENERGÍA CINÉTICA EN EL RODAMIENTO

El eje que pasa por el punto C de contacto está instantáneamente fijo, la energía cinética total de la rueda es:

$$K = \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

Donde I_c es el momento de inercia respecto del eje en el punto de contacto. Aplicando y la condición de rodadura $v_{cm} = R\omega$ y el teorema de los ejes paralelos:

$$I_c = I_{cm} + MR^2$$

Encontramos:

$$K = \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)(\frac{v_{cm}}{R})^2$$

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

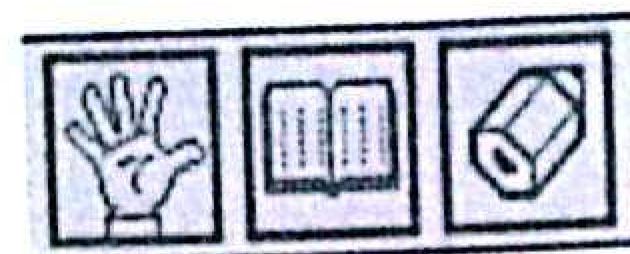
En conclusión, la rodadura sin deslizamiento de un sólido rígido se puede analizar de dos maneras equivalentes:

a) Traslación del CM + rotación alrededor del CM.

b) Rotación pura respecto del punto de contacto.

La energía cinética total de un cuerpo que rueda es la suma de:

Energía de traslación del CM: $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$
+
Energía rotacional respecto al CM: $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

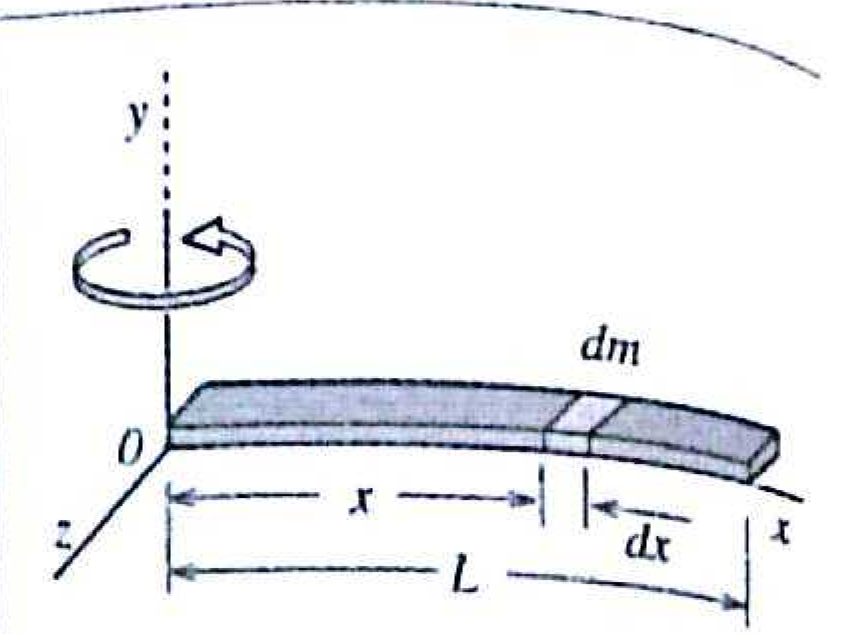


PROBLEMAS RESUELTOS

PR-3.01. *Momento de inercia de una barra uniforme*

Hallar el momento de inercia de una barra delgada y uniforme, de masa M y longitud L respecto a un eje perpendicular a la misma que pasa por un extremo.

Solución: Tomemos un elemento de masa dm, que se encuentra a una distancia x del eje de rotación. Como la masa está uniformemente repartida con una densidad lineal de masa $\lambda = M/L$, la masa elemental es:



$$dm = \lambda dx = (\frac{M}{L})dx$$

El momento de inercia de toda la barra respecto al eje y es:

$$I_y = \int_0^L x^2\,dm = \int_0^L x^2(\frac{M}{L})dx$$

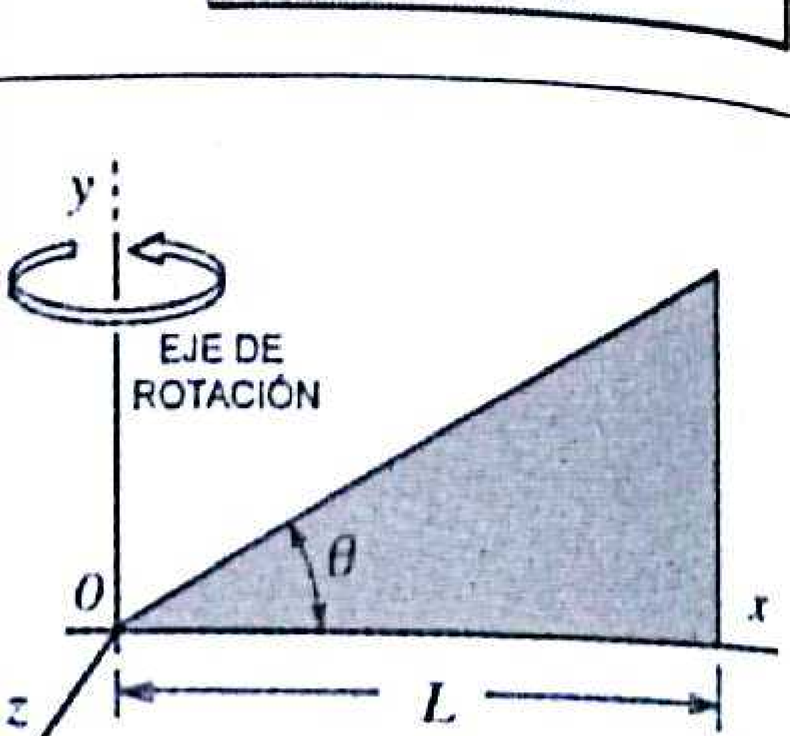
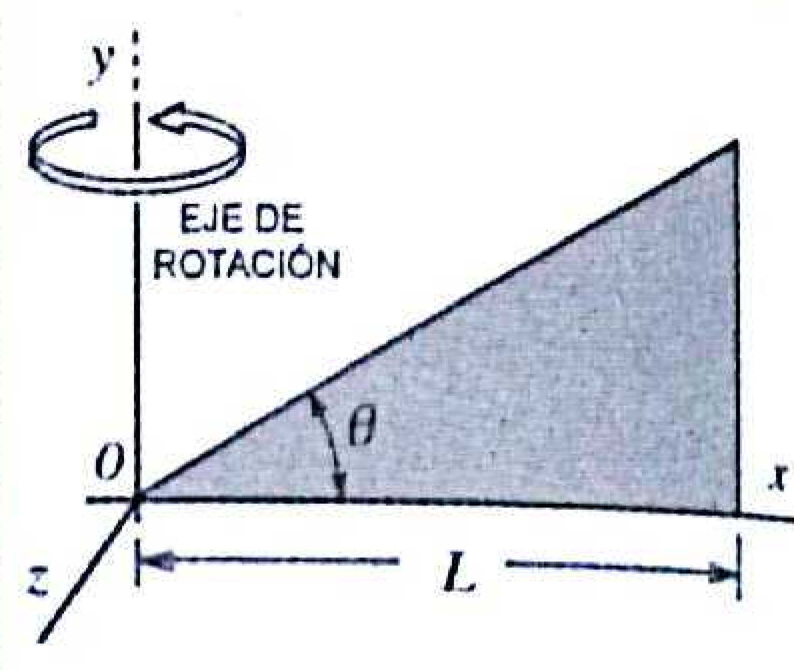
$$I_y = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2$$

Respuesta:

$$I_y = I_z = \frac{1}{3}ML^2$$

PR-3.02. *Momento de inercia de una placa triangular*

Sea una placa plana triangular de base L y de masa M distribuida uniformemente, como se muestra en la figura. Calcule el momento de inercia alrededor de un eje que queda en el plano de la placa y que pasa por su vértice. ¿Dependerá el momento de inercia del ángulo θ?

Solución: Tomamos como diferencial de masa una tira rectangular de ancho dx y altura y, que se encuentra a una distancia x del eje de rotación

$$dm = \sigma\, dA = \sigma y dx$$

Siendo σ la densidad superficial de masa:

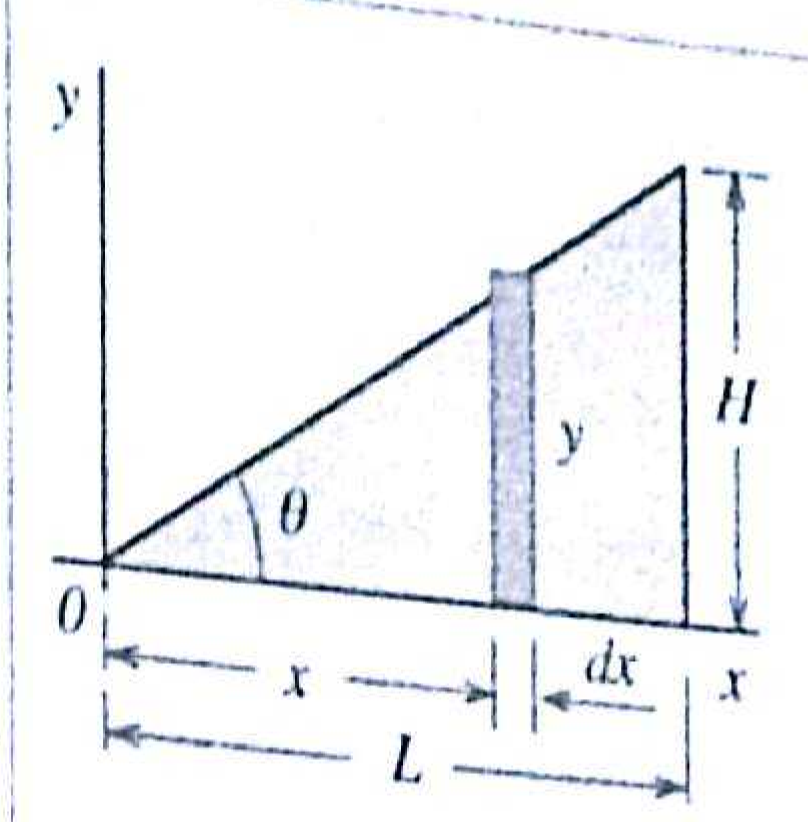
$$\sigma = \frac{Masa}{Area} = \frac{M}{LH/2} \quad \text{kg/m}^2$$

Las coordenadas (x,y) en la pendiente del triángulo están relacionadas por:

$$\operatorname{tg}\theta = y/x = H/L \qquad \Rightarrow \qquad y = x\,(H/L)$$

Sustituyendo y en el diferencial de masa, se tiene:

$$dm = \sigma(H/L)xdx$$



Todos los puntos de la tira infinitesimal se encuentran a igual distancia (x) del eje de rotación, por lo tanto el momento de inercia respecto al eje y es:

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2\,\sigma dA$$

$$I_y = \int_0^L x^2(\sigma\frac{H}{L})xdx = \sigma(\frac{H}{L})(\frac{L^4}{4})$$

Sustituyendo el valor de la densidad σ, tenemos finalmente:

$$I_y = (\frac{M}{LH/2})(\frac{HL^3}{4}) = \frac{1}{2}ML^2$$

Respuesta:

$$I_y = \frac{1}{2}ML^2$$

Independiente del ángulo θ

PR-3.03. *Momentos de inercia de diferentes cilindros*

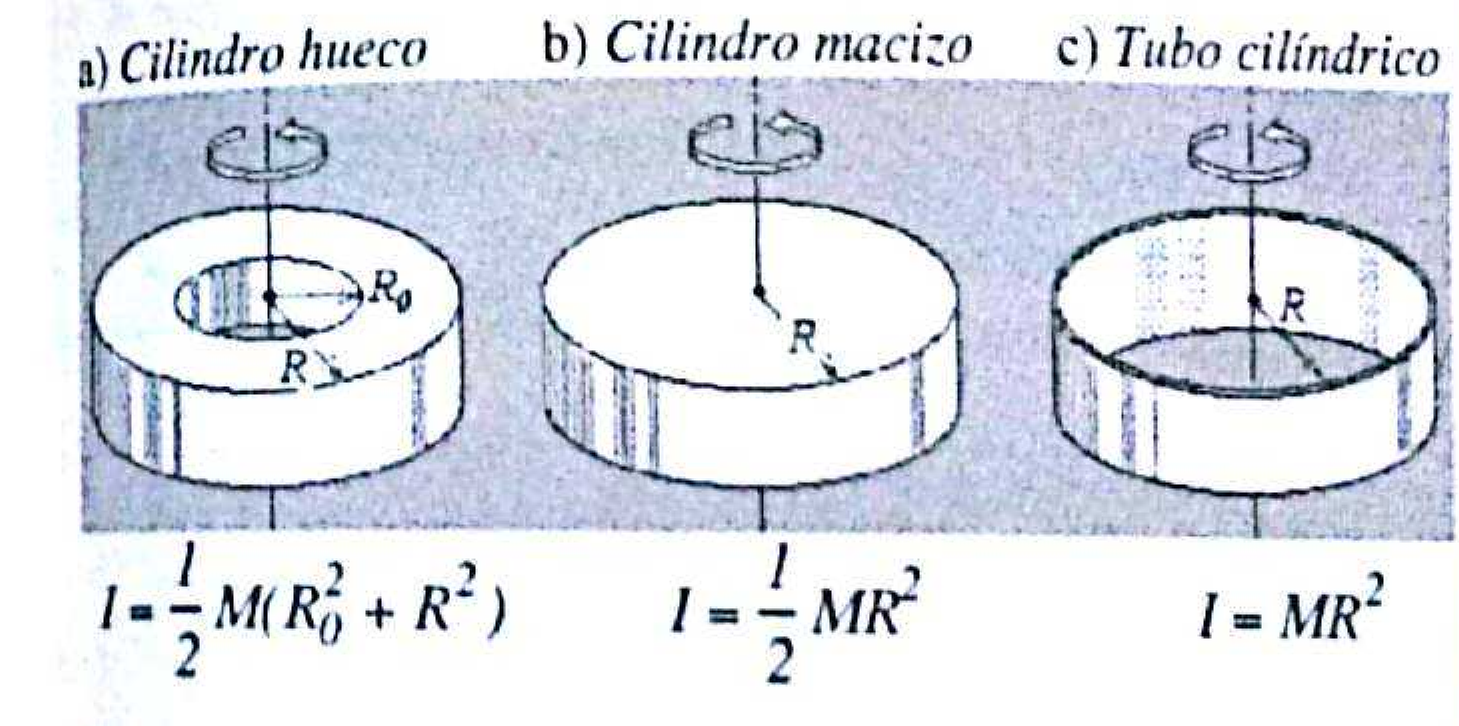
Demostrar las expresiones siguientes para los momentos de inercia de los diferentes cilindros alrededor de sus ejes:

a) Un cilindro hueco con masa uniforme M, radio interior R_0, radio exterior R y longitud L.

b) Un cilindro macizo con masa uniforme M, radio R y longitud L.

c) Un tubo cilíndrico de pared delgada con masa uniforme M, radio R y longitud L.

a) *Cilindro hueco* b) *Cilindro macizo* c) *Tubo cilíndrico*



$I = \frac{1}{2}M(R_0^2 + R^2)$ $\qquad I = \frac{1}{2}MR^2$ $\qquad I = MR^2$

Solución: Consideremos como elemento de masa una concha cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud L. Si ρ (kg/m^3) es la densidad volumétrica de masa, la masa elemental de esta concha cilíndrica es:

$$dm = \rho dv = \rho(2\pi rLdr)$$

Como todas las partes de este cilindro están a la misma distancia, r, del eje de rotación, su momento de inercia es:

$$dI = r^2\,dm = (2\pi\rho L)r^3\,dr$$

El momento de inercia del cilindro completo es:

$$I = \int_{R_0}^{R} r^2\,dm = 2\pi\rho L\int_{R_0}^{R} r^3\,dr = \frac{2\pi\rho L}{4}(R^4 - R_0^4)$$

$$I = \frac{\pi\rho L}{2}(R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2)$$

Si sustituimos en esta expresión, la densidad volumétrica de masa:

$$\rho = \frac{Masa}{Volumen} = \frac{M}{\pi(R^2 - R_0^2)L}$$

encontramos:

$$I = \frac{\pi L}{2}\left(\frac{M}{\pi(R^2 - R_0^2)L}\right)(R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2) = \frac{M(R^2 + R_0^2)}{2}$$

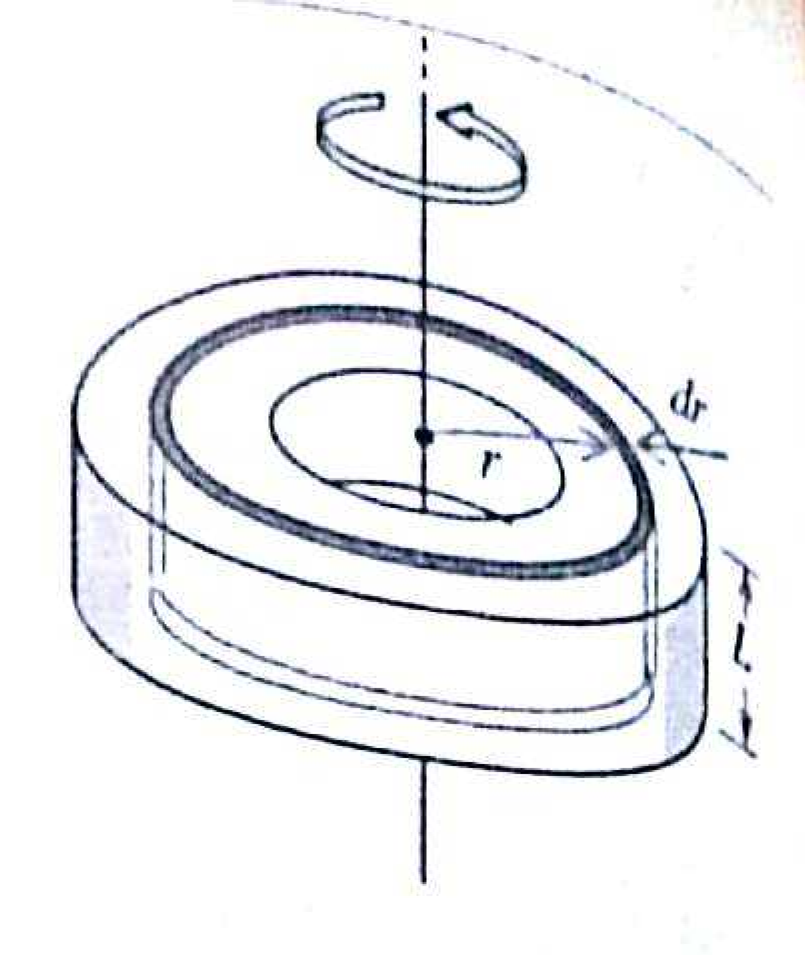
b) Si el cilindro es completamente macizo, podemos usar el resultado anterior y hacemos nulo el radio interior ($R_0 = 0$), entonces, el momento de inercia queda:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

c) Para un tubo cilíndrico de pared delgada hacemos $R_0 \sim R$ y la fórmula queda:

$$I = MR^2$$

Observe que en todos los casos, el momento de inercia respecto al eje es independiente del largo de los cilindros.



Respuesta:

a) Cilindro hueco: $I = \frac{1}{2}M(R_0^2 + R^2)$

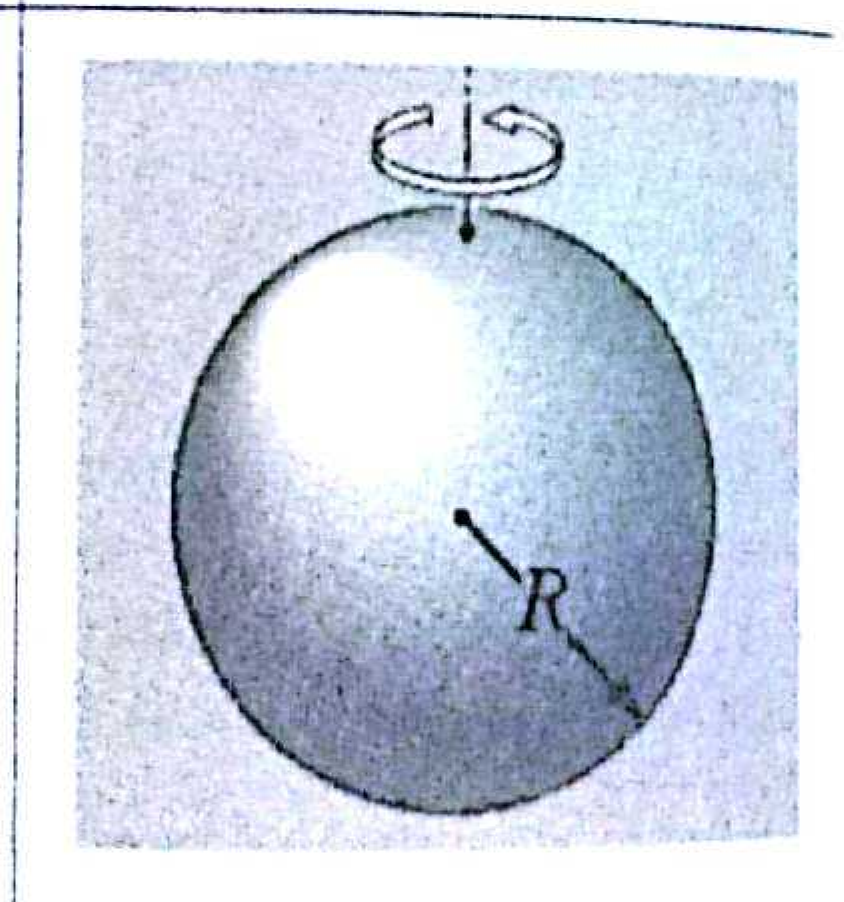
b) Cilindro macizo: $I = \frac{1}{2}MR^2$

c) Tubo cilíndrico: $I = MR^2$

PR-3.04. *Momento de inercia de una esfera maciza*

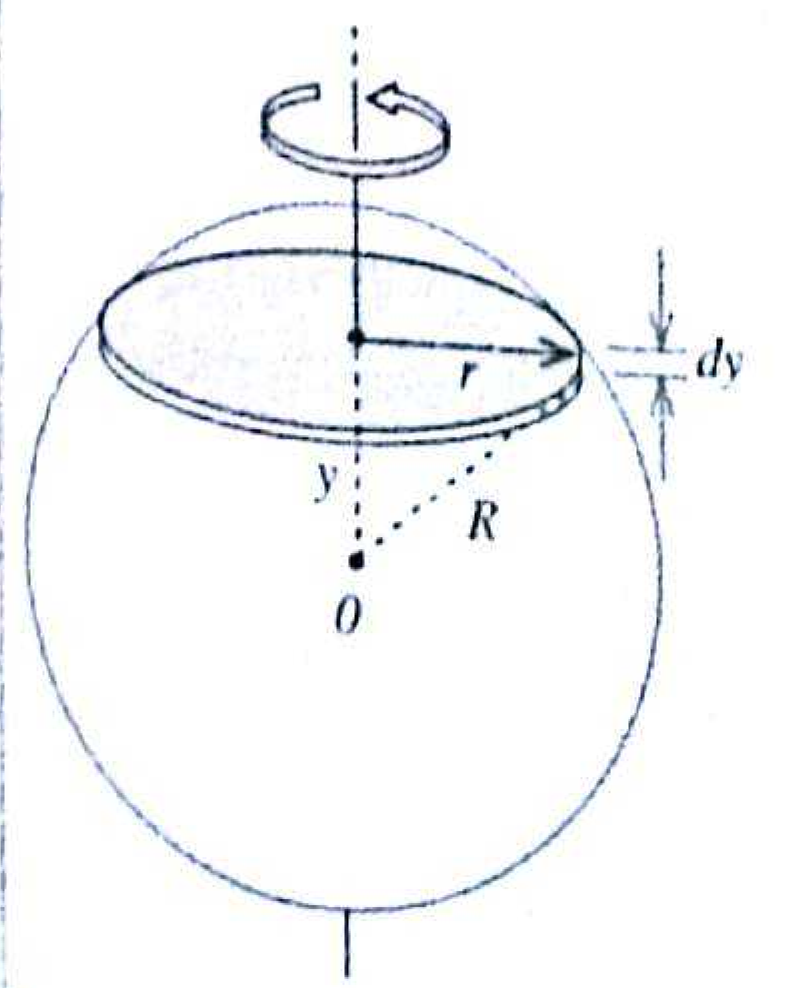
Demostrar que el momento de inercia de una esfera maciza de masa uniforme M y radio R, respecto a un eje que pasa por su centro es:

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$$



Solución: En el problema anterior encontramos que el momento de inercia de un cilindro macizo alrededor de su eje no depende de su longitud L, por lo tanto el resultado se aplica también a un disco circular de espesor despreciable. Podemos usar este resultado para calcular el momento de inercia de la esfera si la dividimos en tajadas delgadas con forma de discos circulares de radio variable. El radio r de un disco ubicado a la altura y es:

$$r = \sqrt{R^2 - y^2}$$



En términos de la densidad volumétrica ρ, la masa del disco elemental es:

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dy = \rho\pi(R^2 - y^2)dy$$

El momento de inercia del disco de radio r y masa dm es:

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}(\sqrt{R^2 - y^2})^2\rho\pi(R^2 - y^2)dy$$

$$dI = \frac{\rho\pi}{2}(R^2 - y^2)^2 dy$$

Cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = R$, cubrimos la mitad superior de la esfera, por lo tanto el momento de inercia de la esfera completa es el doble de la integral de dI desde $y = 0$ hasta $y = R$.

$$I_{cm} = 2\int_0^R dI = \rho\pi\int_0^R (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{cm} = \rho\pi\int_0^R (R^4 - 2R^2y^2 + y^4)dy$$

$$I_{cm} = \rho\pi\left[R^4 y - 2R^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^R = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

Teniendo en cuenta que la densidad volumétrica de la esfera maciza es:

$$\rho = \frac{Masa}{Volumen} = \frac{M}{4\pi R^3/3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$$

El momento de inercia en términos de la masa y el radio de la esfera, es:

$$I_{cm} = \frac{8}{15}\left(\frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}\right)\pi R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

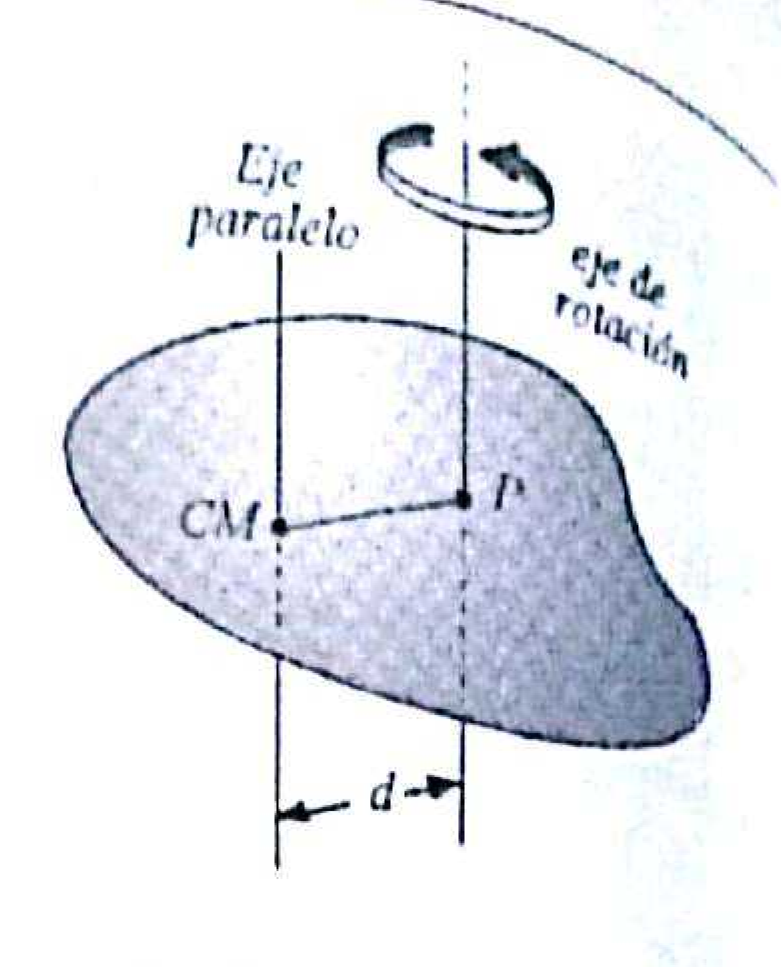
Respuesta:

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$$

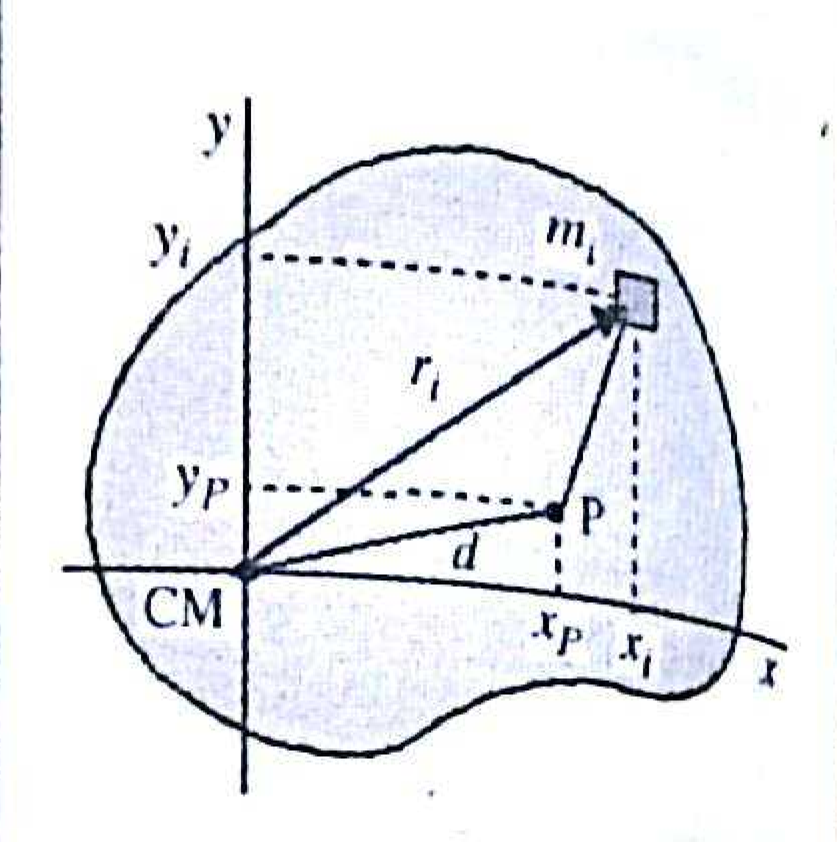
PR-3.05. *El teorema de los ejes paralelos (Steiner)*

Demostrar el Teorema de Steiner: El momento de inercia de un cuerpo con respecto a cualquier eje, I_P, es igual a la suma del momento de inercia con respecto a un eje que pasa por su centro de masa y que sea paralelo al eje dado, I_{CM}, mas el producto de la masa total por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los dos ejes (Md^2).

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$



Solución: Consideremos una sección transversal del cuerpo en el plano xy y escojamos el origen en su centro de masa, CM. Sean (x_i, y_i) las coordenadas de una masa puntual m_i arbitraria del cuerpo. El momento de inercia I_P alrededor de un eje que pasa por un punto P y es paralelo al eje z será:



$$I_P = \sum m_i r_{Pi}^2 = \sum m_i [(x_i - x_P)^2 + (y_i - y_P)^2]$$

$$I_P = \sum m_i (x_i^2 - y_i^2) - 2x_P \sum m_i x_i$$

$$-2y_P \sum m_i y_i + (x_P^2 + y_P^2) \sum m_i$$

La primera suma es justamente, el momento de inercia alrededor del eje que pasa por el centro de masa:

$$\sum m_i (x_i^2 - y_i^2) = I_{CM}$$

Los dos términos del medio son nulos ya que el centro de masa está en el origen y por definición del CM:

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$$

Además: $(x_P^2 + y_P^2) = d^2$ y la masa total es:

$$\sum m_i = M$$

Por lo tanto queda demostrado el teorema *de los ejes paralelos*:

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Respuesta:

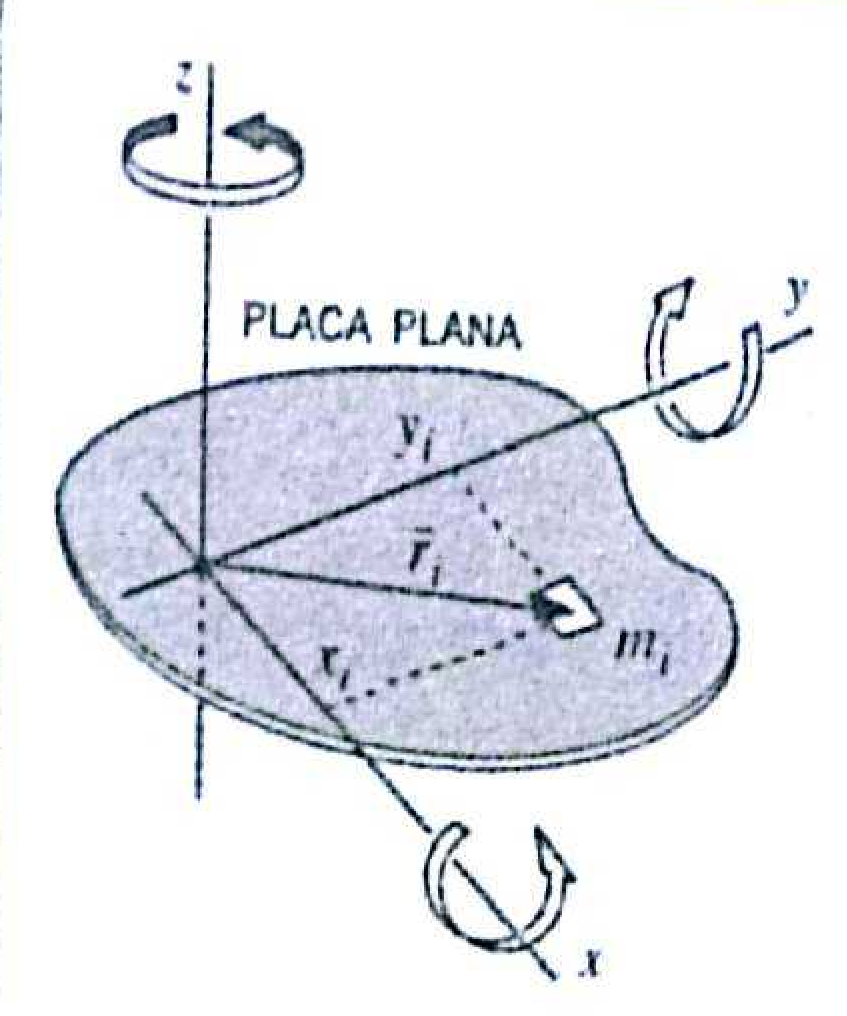
$$\boxed{I_P = I_{CM} + Md^2}$$

PR-3.06. *El teorema de los ejes perpendiculares*

Demostrar que para una figura plana se cumple el siguiente teorema: La suma de los momentos de inercia alrededor de dos ejes perpendiculares contenidos en la figura es igual al momento de inercia alrededor de un tercer eje perpendicular a la misma.

$$I_z = I_x + I_y$$

Solución: Si consideramos una placa plana, los momentos de inercia respecto de los ejes x e y son respectivamente:



$$I_x = \sum m_i x_i^2 \qquad I_y = \sum m_i y_i^2$$

Por otra parte, el momento de inercia respecto al eje z es:

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$

Para cada elemento m_i se tiene: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. De modo que:

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

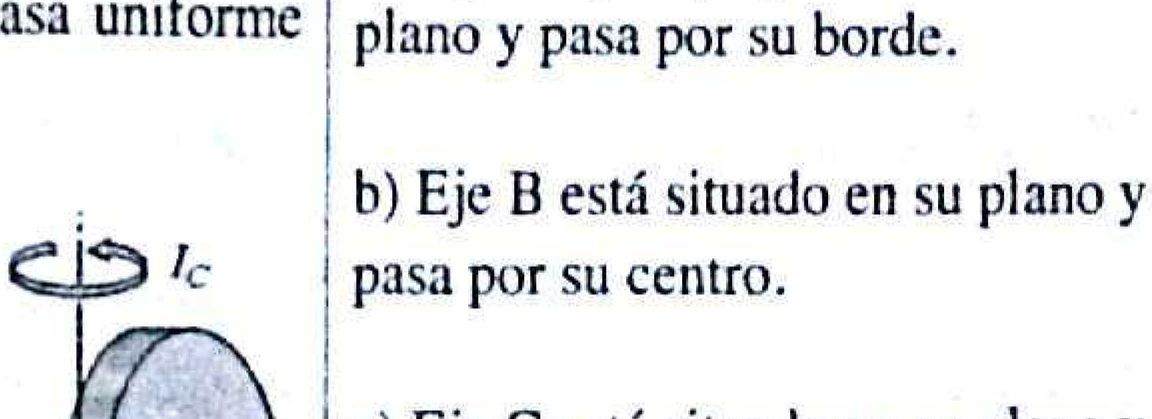
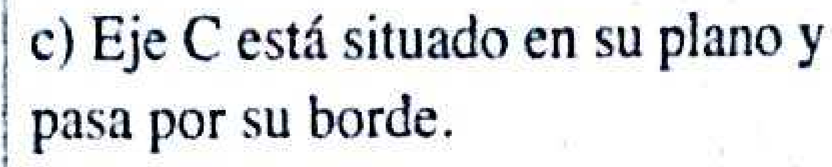
Queda demostrado que: $I_z = I_x + I_y$

Respuesta:

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

PR-3.07. *Rotación de disco en torno a diferentes ejes*

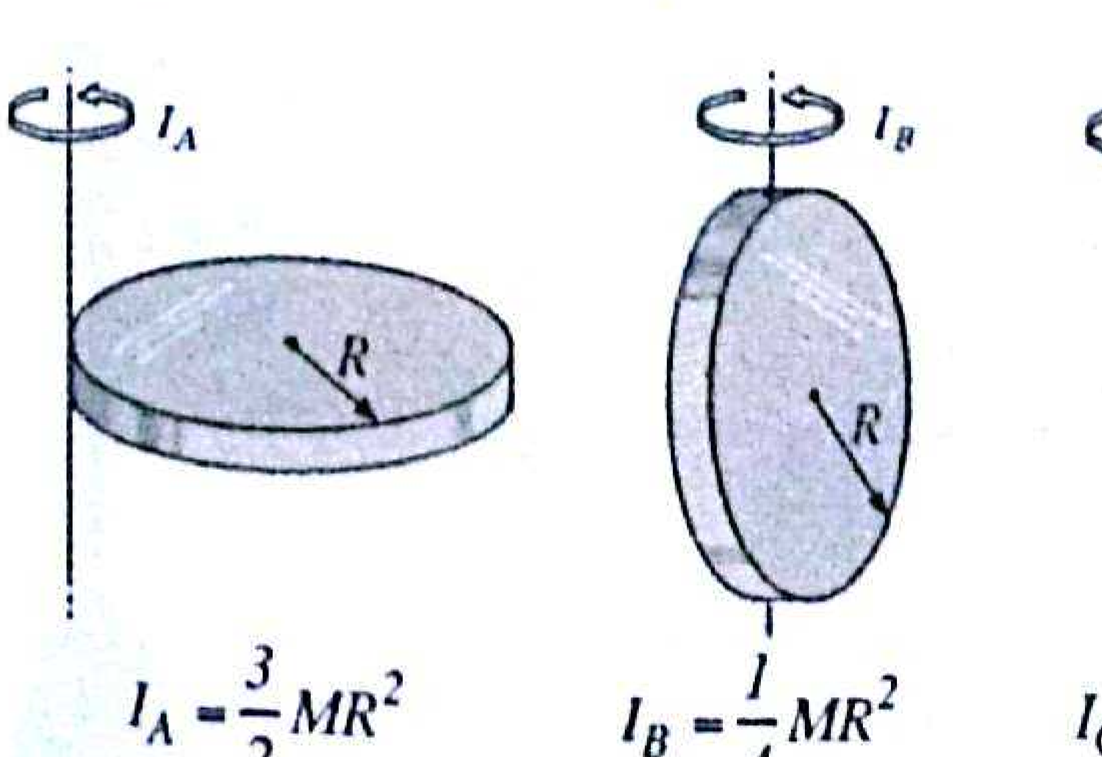
Demostrar las siguientes expresiones para el momento de inercia de un disco circular de radio R y masa uniforme M, respecto a los distintos ejes:

a) Eje A es perpendicular a su plano y pasa por su borde.

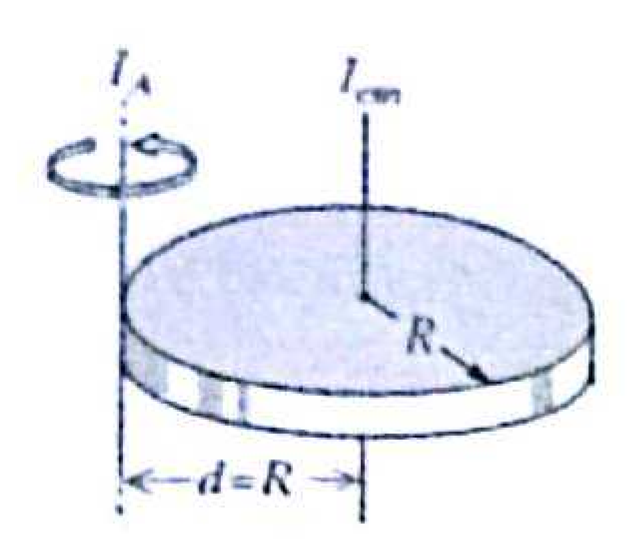
b) Eje B está situado en su plano y pasa por su centro.

c) Eje C está situado en su plano y pasa por su borde.



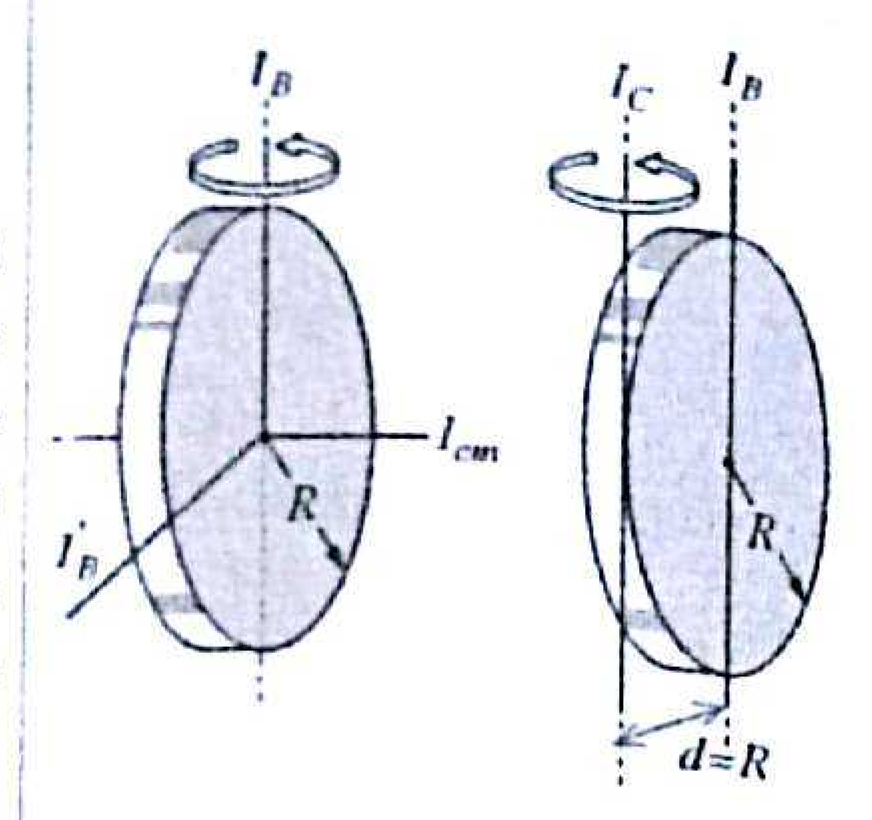
$$I_A = \frac{3}{2}MR^2 \qquad I_B = \frac{1}{4}MR^2 \qquad I_C = \frac{5}{4}MR^2$$

Solución: a) El cálculo por integración directa del momento de inercia respecto a un eje que pasa por el borde del disco, sería un tanto tedioso. Pero resulta bastante sencillo si hacemos uso del teorema de los ejes paralelos. Ya hemos encontrado el momento de inercia respecto al eje del disco perpendicular a su plano y que pasa por el centro, obteniéndose: $I_{cm} = MR^2/2$. Teniendo en cuenta que la distancia entre los dos ejes paralelos I_{cm} y I_A es $d = R$, entonces:



$$I_A = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

b) Para hallar el momento de inercia I_B, usaremos el teorema de los ejes perpendiculares (aplicable únicamente a una figura plana). Podemos seleccionar un conjunto de tres ejes mutuamente perpendiculares, dos de los cuales son equivalentes y están en el plano del disco ($I_B = I_B^{'}$), y el tercero, perpendicular al plano y cuyo momento de inercia es conocido (I_{cm}).



$$I_x + I_y = I_z \qquad \Rightarrow \qquad I_B + I_B^{'} = I_{cm}$$

$$2I_B = I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_B = \frac{1}{4}MR^2$$

c) Para hallar el momento de inercia respecto a un eje que queda en el plano del disco y pasa por su borde, aplicamos el teorema de los ejes paralelos, usando como eje paralelo el propio eje B que pasa por el centro de masa del disco:

$$I_C = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$$

Respuesta:

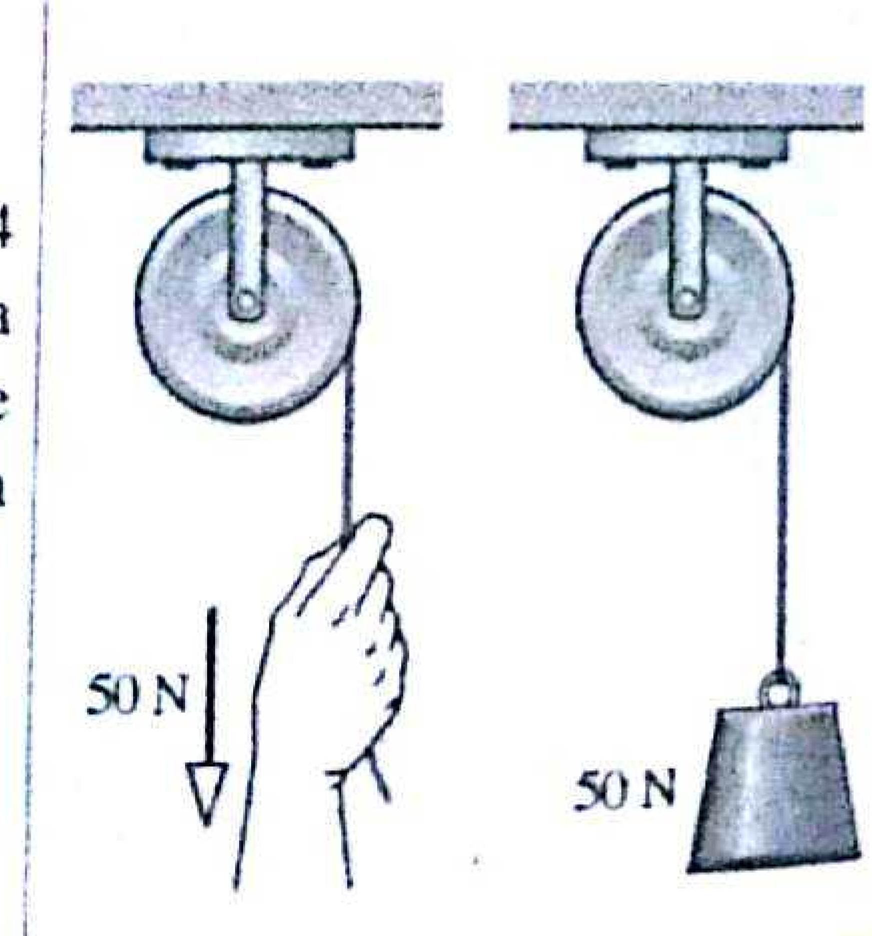
$$I_A = \frac{3}{2}MR^2$$
$$I_B = \frac{1}{4}MR^2$$
$$I_C = \frac{5}{4}MR^2$$

PR-3.08. *Fuerzas iguales pero con efectos diferentes*

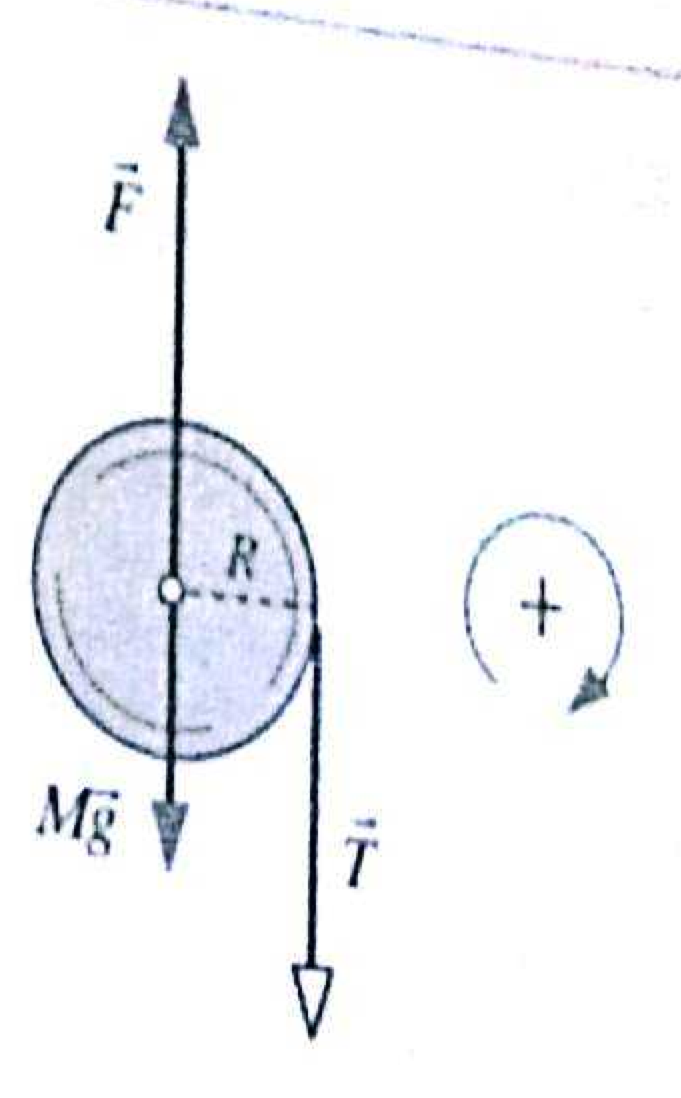
Una polea con forma cilíndrica de masa uniforme $M = 4$ kg y radio $R = 0.1$ m, tiene su eje fijo y una cuerda enrollada a su alrededor. Si por el extremo de la cuerda se aplica una fuerza, determine la aceleración angular de la polea en las dos situaciones siguientes:

a) Se aplica una fuerza de módulo $T = 50$ N.

b) Se suspende un objeto cuyo peso es $mg = 50$ N.



Solución: a) En el diagrama de cuerpo libre de la derecha se muestran las fuerzas aplicadas sobre la polea. Hemos tomado como positivo el sentido horario para los torques. Aplicando la segunda ley de Newton a la rotación alrededor del eje de la polea:

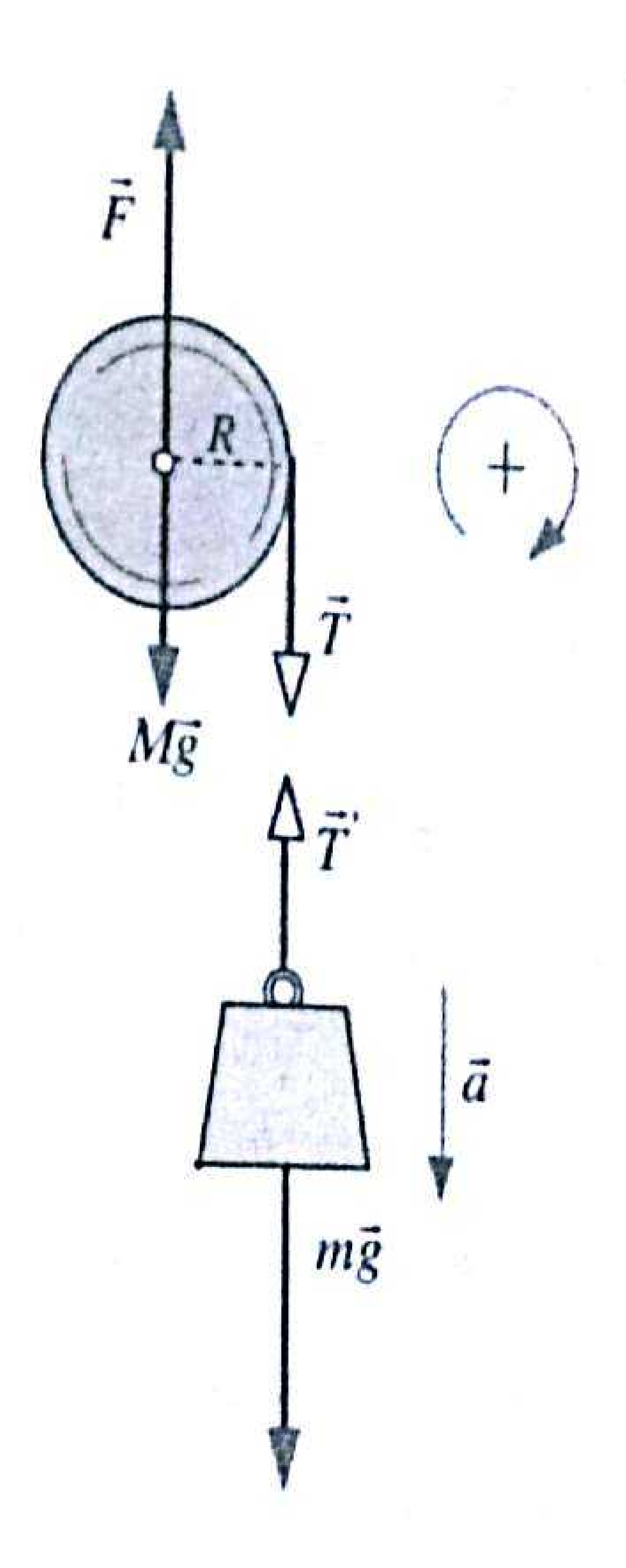


$$\sum \tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad TR = (\frac{1}{2}MR^2)\alpha$$

La aceleración angular de la polea es:

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{2(50\text{N})}{(4\text{kg})(0{,}1\text{m})} = 250\text{rad/s}^2$$

b) En el segundo caso los diagramas de cuerpo libre son los mostrados en la figura de la derecha. Hemos tomado como positivo el sentido horario para la rotación de la polea y el vertical hacia abajo para la traslación de la pesa. Aplicamos la segunda ley de Newton para la rotación de la polea y para la traslación de la pesa suspendida:



Polea: $\sum \tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}MR\alpha$

Pesa: $\sum F_y = ma \qquad \Rightarrow \qquad (mg - T^{'}) = ma$

$$T^{'} = m(g - a)$$

Tomando en cuenta que $|\vec{T}^{'}| = |\vec{T}| = T$, podemos igualar las dos expresiones obtenidas para la tensión de la cuerda.

$$m(g - a) = \frac{1}{2}MR\alpha$$

La aceleración lineal de un punto en el borde de la polea y la aceleración angular de rotación de la polea están relacionadas por: $a = \alpha R$. Sustituyendo:

$$mg = \alpha R(m + \frac{M}{2}) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2mg}{R(2m + M)}$$

$$\alpha = \frac{2(50\text{N})}{(0{,}1\text{m})[2(50\text{N}/9{,}8\text{m/s}^2) + 4\text{kg}]} = 70{,}4\text{rad/s}^2$$

Respuesta

a) $\alpha = 250$ rad/s^2,
b) $\alpha = 70{,}4$ rad/s^2 ¿por qué en este caso se acelera menos?

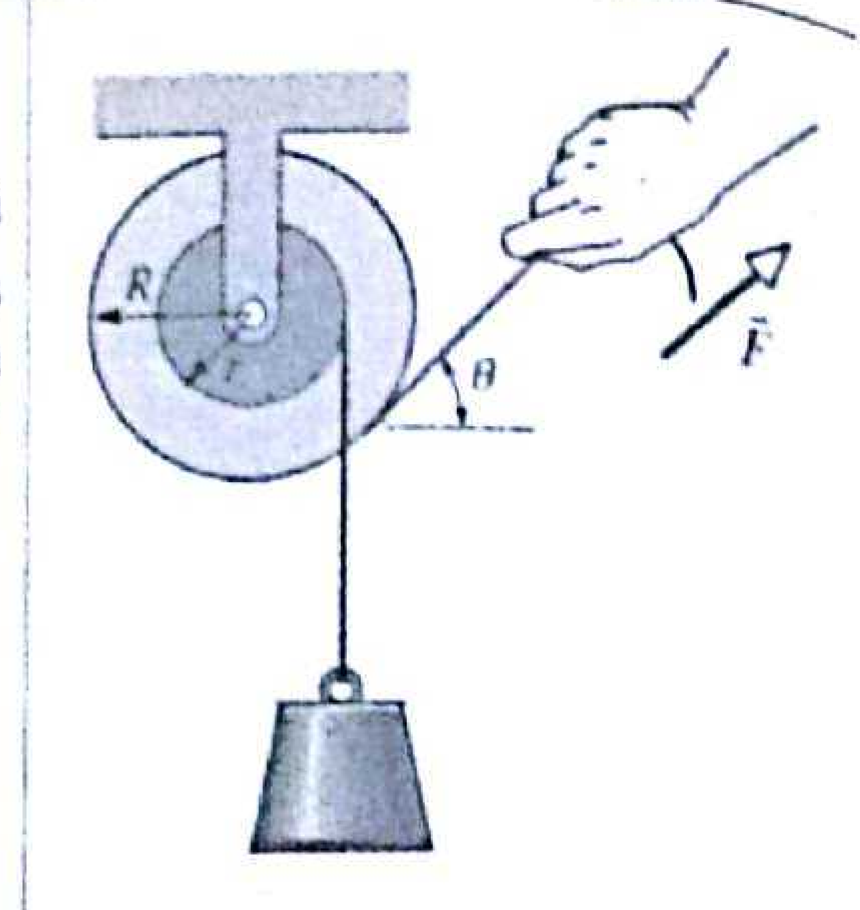
PR-3.09. *Polea doble para elevar pesas*

Para elevar una pesa de masa m_O = 20 kg con una aceleración a = 2.2 m/s^2 se utiliza un sistema de dos poleas solidarias que tienen un eje común. Si se aplica a la polea grande una fuerza formando un ángulo θ = 30° con la horizontal, determine:



a) La tensión de la cuerda que soporta la pesa.
b) La aceleración angular de las poleas.
c) El momento de inercia total del sistema de poleas.
d) El torque neto ejercido sobre el sistema de poleas.
e) El módulo de la fuerza aplicada a la polea grande.

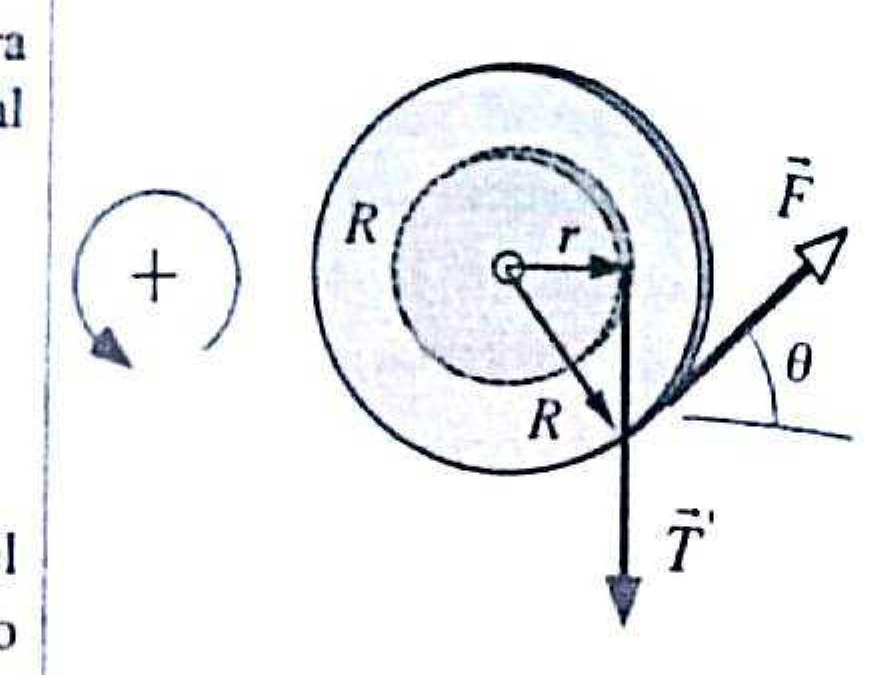
Disco pequeño: $r = 0.1$ m, $m = 2.5$ kg.
Disco grande: $R = 0.2$ m, $M = 5.0$ kg.



Solución: a) Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación de la pesa y tomando el sentido (+) vertical hacia arriba, tenemos

$$T - m_o g = m_o a \quad \Rightarrow \quad T = m_o(g + a)$$

$$T = (20\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2 + 2.2\text{ m/s}^2) = \underline{240\text{ N}}$$



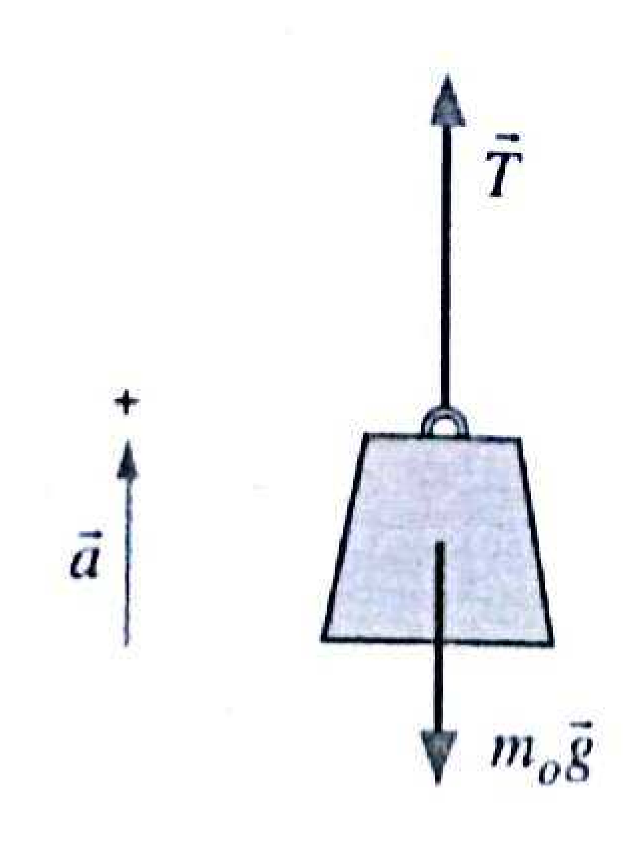
b) La aceleración tangencial de un punto en el borde del disco pequeño es igual a la aceleración de la pesa. Como $a = \alpha r$, la aceleración angular de las poleas es:

$$\alpha = a/r = (2.2\text{ m/s}^2)/(0.1\text{ m}) = \underline{22\text{ rad/s}^2}$$

c) El momento de inercia del sistema de poleas es la suma de los momentos de inercia de los dos discos solidarios:

$$I = mr^2/2 + MR^2/2$$

$$= [\,(2.5\text{kg})(0.1\text{m})^2/2 + (5\text{kg})(0.2\text{m})^2/2] = \underline{0.113\text{ kg.m}^2}$$



d) El torque neto aplicado sobre el sistema de poleas es:

$$\tau_{neto} = I\alpha = (0.113\text{ kg.m}^2)(22\text{ rad/s}^2) = \underline{2{,}48\text{ N.m}}$$

e) El torque neto ejercido sobre las poleas es la suma vectorial de dos torques: El debido a la tensión de la cuerda sobre la polea pequeña, $\vec{\tau}_r = \vec{r} \times \vec{T}' = -rT'\hat{z}$ y el de la fuerza aplicada a la polea grande, $\vec{\tau}_R = \vec{R} \times \vec{F} = +FR\hat{z}$.

$$\tau_{neto} = FR - T'r \quad \Rightarrow \quad F = [\tau_{neto} + Tr]/R$$

$$F = [2.48\text{ N m} + (240\text{ N})(0.1\text{m})]/(0.2\text{m}) = \underline{132\text{ N}}$$

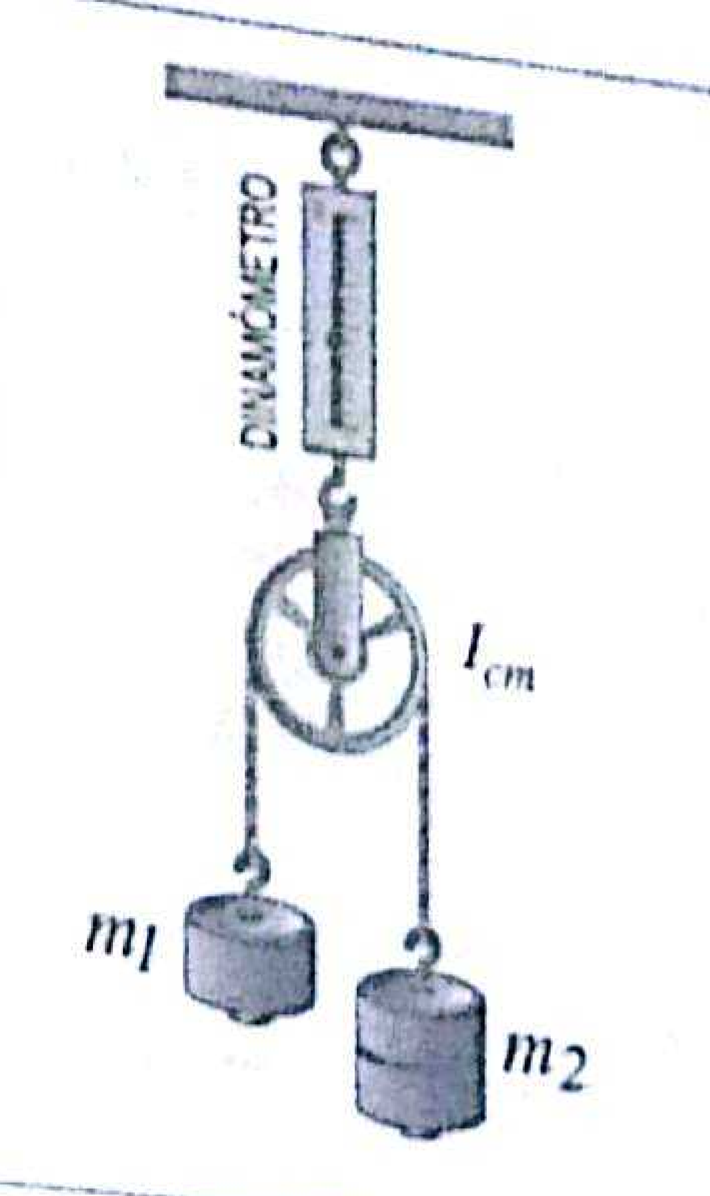
Respuesta:

a) $T = 240$ N
b) $\alpha = 22$ rad/s^2
c) $I = 0.113$ kg.m^2
d) $\tau_{neto} = 2{,}48$ N.m
e) $F = 132$ N

PR-3.10. *Pesando una máquina de Atwood real*

La máquina de Atwood es un dispositivo que se utiliza para determinar la aceleración de la gravedad. Consiste de dos pesas de masas m_1 y $m_2 > m_1$, que están suspendidas de una cuerda que pasa sin resbalar sobre una polea sin fricción de radio R y momento de inercia I_{CM}. Cuando la pesa de masa mayor cae, la polea gira alrededor de su eje.

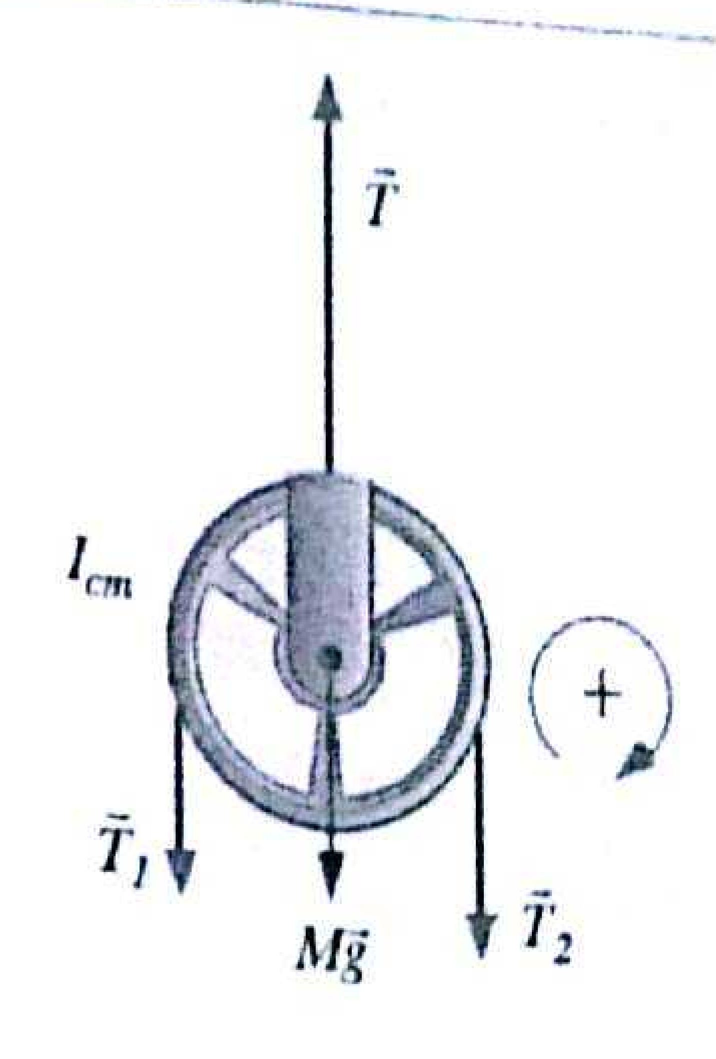
Determine:
a) La aceleración de las pesas.
b) La tensión de la cuerda a cada lado de la polea.
c) La lectura del dinamómetro que sostiene el sistema.



Solución: a) Cuando se sueltan las pesas, la que pesa mas (m_2) baja y jala hacia arriba a m_1. Las ecuaciones de movimiento de las dos pesas son:

Pesa m_1: $$\sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a$$

Pesa m_2: $$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a$$

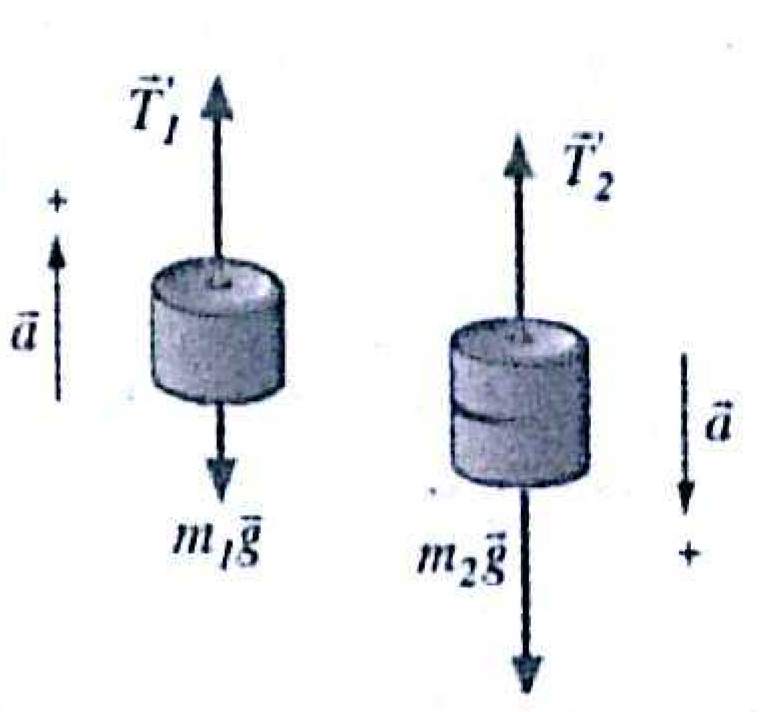


La ecuación de movimiento rotacional de la polea es:

$$\sum \tau_{cm} = T_2 R - T_1 R = I_{cm}\alpha$$

La aceleración lineal a de un punto en el borde de la polea y la aceleración angular α están relacionadas: $\alpha = a/R$. Sustituyendo las expresiones para T_2 y T_1:

$$(m_2 g - m_2 a)R - (m_1 g + m_1 a)R = I_{cm}(a/R)$$



Por lo tanto la aceleración de las pesas es:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + I_{cm}/R^2)}$$

b) Las tensiones en la cuerda a cada lado de la polea son, respectivamente:

$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{(2m_2 + I_{cm}/R^2)m_1 g}{(m_1 + m_2 + I_{cm}/R^2)}$$

$$T_2 = m_2(g-a) = \frac{(2m_1 + I_{cm}/R^2)m_2 g}{(m_1+m_2+I_{cm}/R^2)}$$

c) Como la polea no se traslada, la lectura del dinamómetro es la suma de las dos tensiones mas el peso de la polea:

$$T = T_1 + T_2 + Mg = \frac{4m_1m_2g + (m_1+m_2)gI_{cm}/R^2}{(m_1+m_2+I_{cm}/R^2)} + Mg$$

Respuesta:

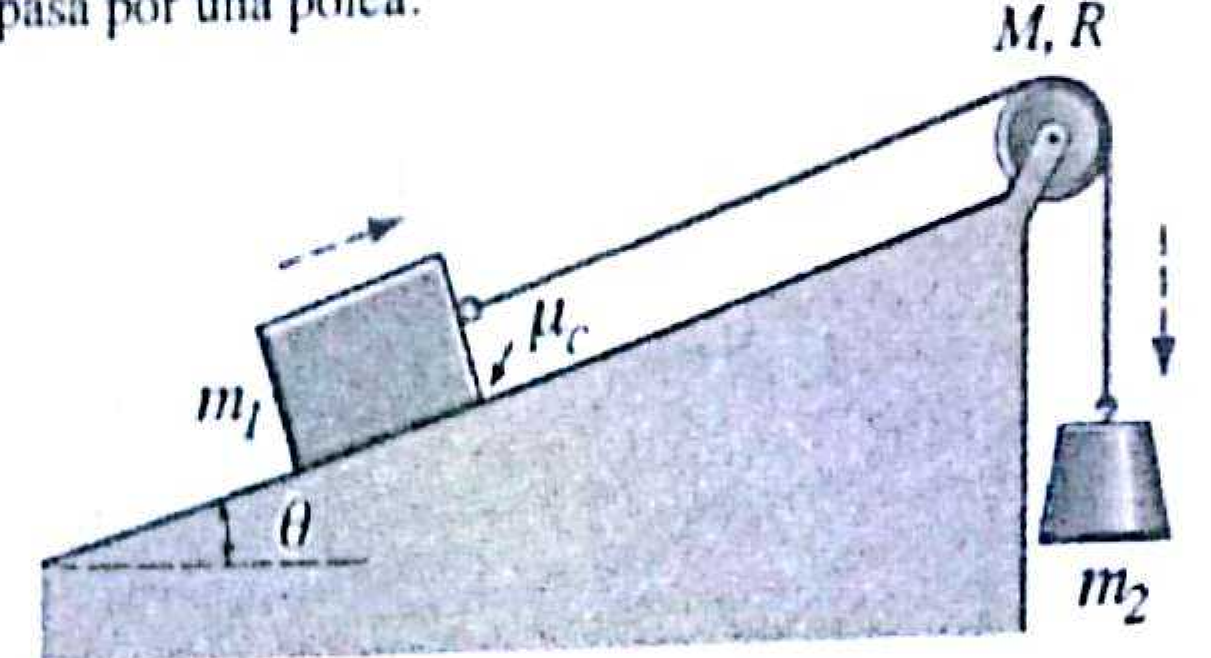
a) $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{(m_1+m_2+I_{cm}/R^2)}$

b) $T_1 = \dfrac{(2m_2 + I_{cm}/R^2)m_1 g}{(m_1+m_2+I_{cm}/R^2)}$

$T_2 = \dfrac{(2m_1 + I_{cm}/R^2)m_2 g}{(m_1+m_2+I_{cm}/R^2)}$

PR-3.11. *La pesa cae y el bloque sube*

Un bloque de masa m_1 se coloca en un plano inclinado a un ángulo θ respecto a la horizontal y unido a una pesa de masa m_2 que está suspendida mediante una cuerda que pasa por una polea. La polea es un disco uniforme de radio R y momento de inercia I. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es μ_c. Determine la aceleración de la pesa y el bloque.



Solución: Si la pesa acelera hacia abajo, la polea gira en el sentido horario y el bloque sube por el plano inclinado. Las ecuaciones de movimiento del bloque m_1 son:

$$\sum F_x = T_1 - m_1 g sen\theta - F_c = m_1 a \qquad (1)$$

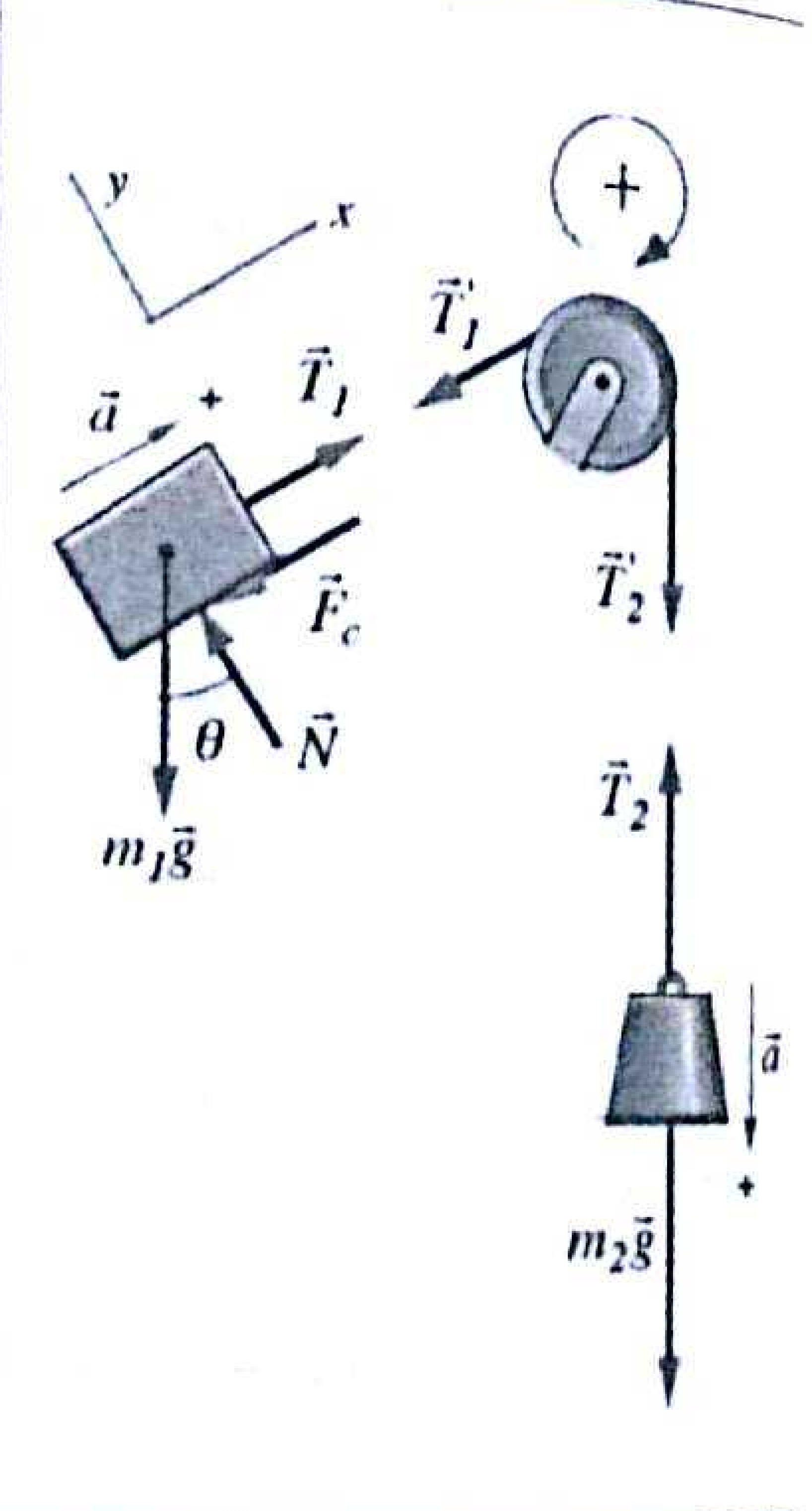
$$\sum F_y = N - m_1 g cos\theta = 0 \qquad (2)$$

Donde $F_c = \mu_c N = \mu_c m_1 g cos\theta$ es la fuerza de fricción cinética. La ecuación de movimiento de la pesa m_2 es:

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a \qquad (3)$$

Si sumamos las ecuaciones (1) y (3) y sustituyendo F_c:

$$T_1 - T_2 + m_2 g - m_1 g(sen\theta + \mu_c cos\theta) = (m_1 + m_2)a \qquad (4)$$



La aceleración lineal $a = \alpha R$ de un punto en el borde de la polea es igual a la aceleración de la pesa y del bloque. La ecuación de rotación de la polea es:

$$\sum \tau_{cm} = (T_2 - T_1)R = I_{cm}\alpha = (\frac{1}{2}MR^2)\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma$$

Sustituyendo esta expresiones de $(T_2 - T_1)$ en la ecuación (4) se obtiene:

$$m_2 g - m_1 g(sen\theta + \mu_c cos\theta) = (m_1+m_2)a + \frac{1}{2}M$$

Finalmente, despejamos la aceleración lineal del sistema:

$$a = \frac{m_2 - m_1(sen\theta + \mu_c cos\theta)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

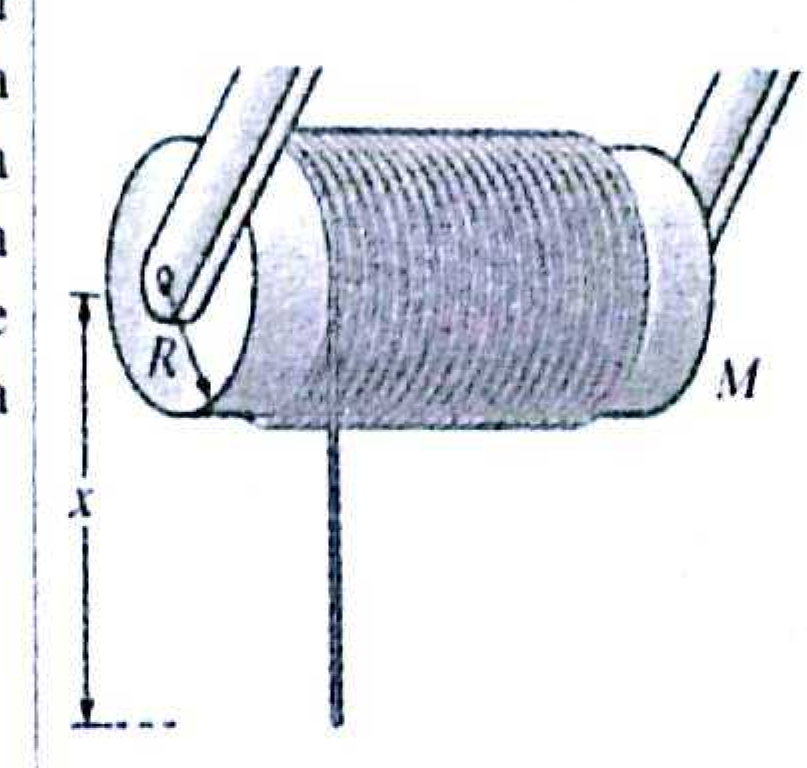
Respuesta:

$a = \dfrac{m_2 - m_1(sen\theta + \mu_c cos\theta)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$

PR-3.12. *Al caer la cuerda hace que el tambor gire*

Una cuerda de masa total m y longitud L está enrollada formando una capa alrededor de un cilindro uniforme de masa M y radio R. El cilindro puede girar sin fricción alrededor de su eje. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del cilindro en función de la longitud x de la cuerda suspendida.

Solución: Sea $\lambda = m/L$ la masa por unidad de longitud de la cuerda. Aplicando la conservación de la energía, la energía potencial que pierde el pedazo de cuerda suspendida de longitud x es igual a la suma de la energía cinética de traslación de éste, más la energía cinética de rotación de la porción de cuerda enrollada, más la energía cinética de rotación del cilindro hueco:



$$(\lambda x)g\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\lambda x)v^2 + \frac{1}{2}(L-x)\lambda R^2\omega^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega^2$$

Tomando en cuenta que $v = \omega R$:

$$\lambda x^2 g = mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

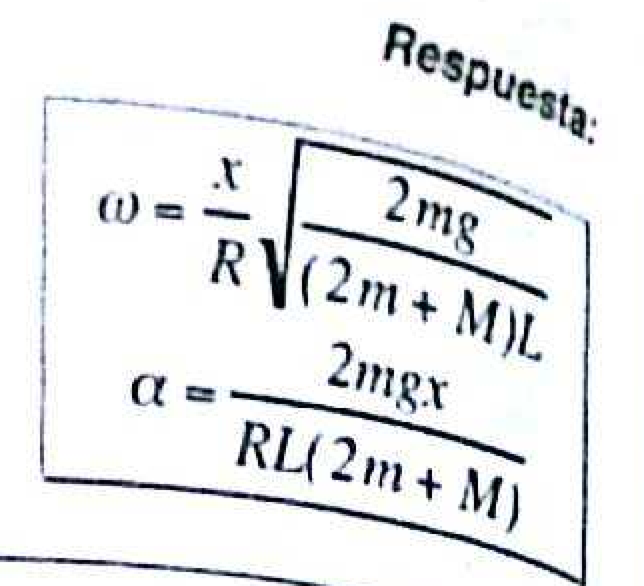
Despejando se obtiene la velocidad angular de rotación:

$$\omega = \frac{x}{R}\sqrt{(\frac{2m}{2m+M})\frac{g}{L}}$$

La aceleración angular de rotación es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{v}{R}\sqrt{(\frac{2m}{2m+M})\frac{g}{L}} = \frac{2mgx}{RL(2m+M)}$$

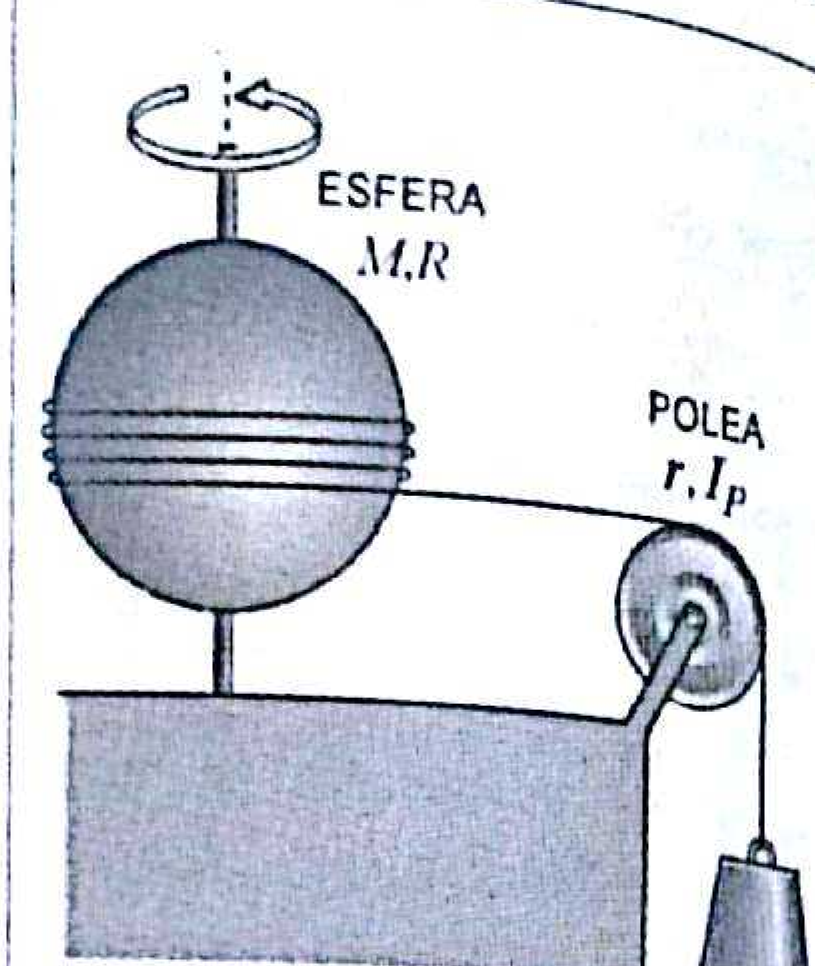
Respuesta:



PR-3.13. *La caída de la pesa hace girar la esfera*

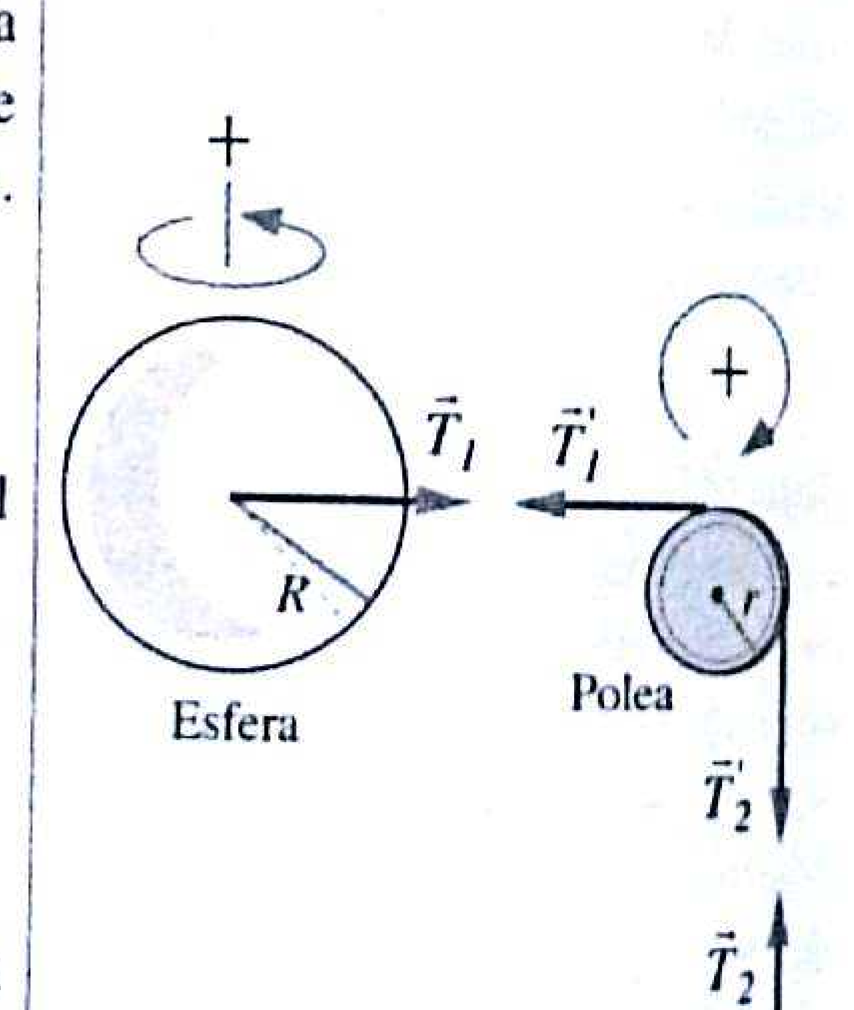
Una esfera hueca de radio R y masa M tiene enrollado un hilo liviano y puede girar alrededor de un eje vertical sin fricción. El hilo pasa por una polea de radio r y momento de inercia I_p, y de su extremo cuelga una pesa de masa m. Determine:

a) La aceleración de la pesa después de soltarla.
b) La velocidad de la pesa después de haber descendido una altura H.
c) La tensión de la cuerda a ambos lados de la polea mientras la pesa va descendiendo.



Solución: Tenemos tres elementos acoplados mediante la cuerda: una pesa, una polea y una esfera. Como la cuerda no se estira (ni se encoge), el módulo de la aceleración tangencial del borde de la esfera y del borde de la polea es igual al módulo de la aceleración de la pesa.

$$a = \alpha_P r = \alpha_e R$$



a) La *esfera* gira alrededor de su eje bajo la acción del torque: $\tau_e = T_1 R$. Su ecuación de movimiento es:

$$\sum \tau_e = T_1 R = I_e \alpha_e$$

Siendo I_e el momento de inercia de una esfera hueca alrededor del eje que pasa por su centro:

$$T_1 = \frac{I_e \alpha_e}{R} = \frac{(2MR^2/3)(a/R)}{R} = \frac{2}{3}Ma \qquad \text{(i)}$$

La ecuación de movimiento de la *polea* es:

$$\sum \tau_P = I_P \alpha_P \quad \Rightarrow \quad (T_2 - T_1)r = I_P \alpha_P = I_P(\frac{a}{r})$$

$$T_2 = T_1 + I_P(\frac{a}{r^2}) = (\frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})a \qquad \text{(ii)}$$

Para la *pesa* de masa m la ecuación de movimiento es:

$$\sum F_y = mg - T_2 = ma$$

Reemplazando la tensión T_2 y despejando la aceleración:

$$mg - (\frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})a = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg}{(m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})}$$

b) Como la aceleración a es constante, la velocidad final v de caída de la pesa partiendo de reposo desde una altura H es:

$$v^2 = v_0^2 + 2aH \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2aH}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgH}{(m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})}}$$

c) Finalmente, sustituimos la expresión de la aceleración a para hallar las tensiones respectivas de la cuerda a ambos lado de la polea:

$$T_1 = \frac{2}{3}Ma = \frac{2}{3}(\frac{mMg}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2}})$$

$$T_2 = (\frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})(\frac{mg}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2}})$$

Respuesta:

a) $a = \frac{mg}{(m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})}$

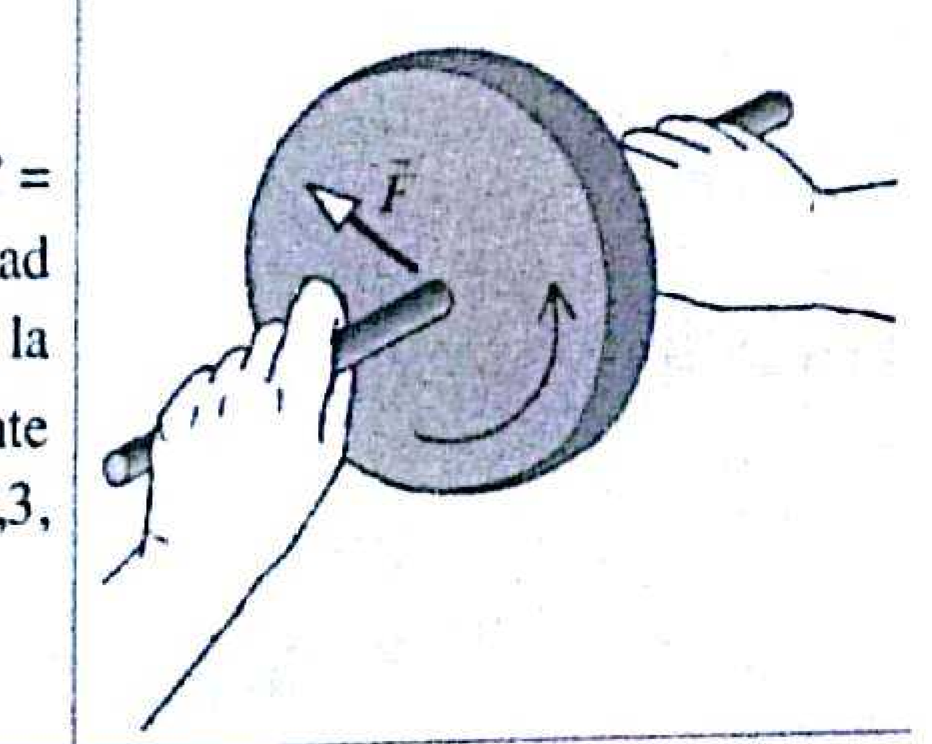
b) $v = \sqrt{\frac{2mgH}{(m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})}}$

c) $T_1 = \frac{2}{3}(\frac{mMg}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2}})$

$T_2 = (\frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2})(\frac{mg}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I_P}{r^2}})$

PR-3.14. *Frenando una rueda contra la pared*

Un disco cilíndrico macizo de masa M = 5 kg y radio R = 0,1 m está girando alrededor de su eje con una velocidad angular ω = 180 rad/s. El disco es empujado contra la pared vertical con una fuerza F = 20 N. Si el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la pared es μ_c = 0,3, al cabo de cuánto tiempo se detendrá el disco?



Solución: La ecuación del movimiento rotacional del disco es :

Solución: a) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica al centro de masa del lápiz, véase la siguiente figura:

$$Mg(\frac{L}{2}) = Mg(\frac{L}{2}cos\theta) + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

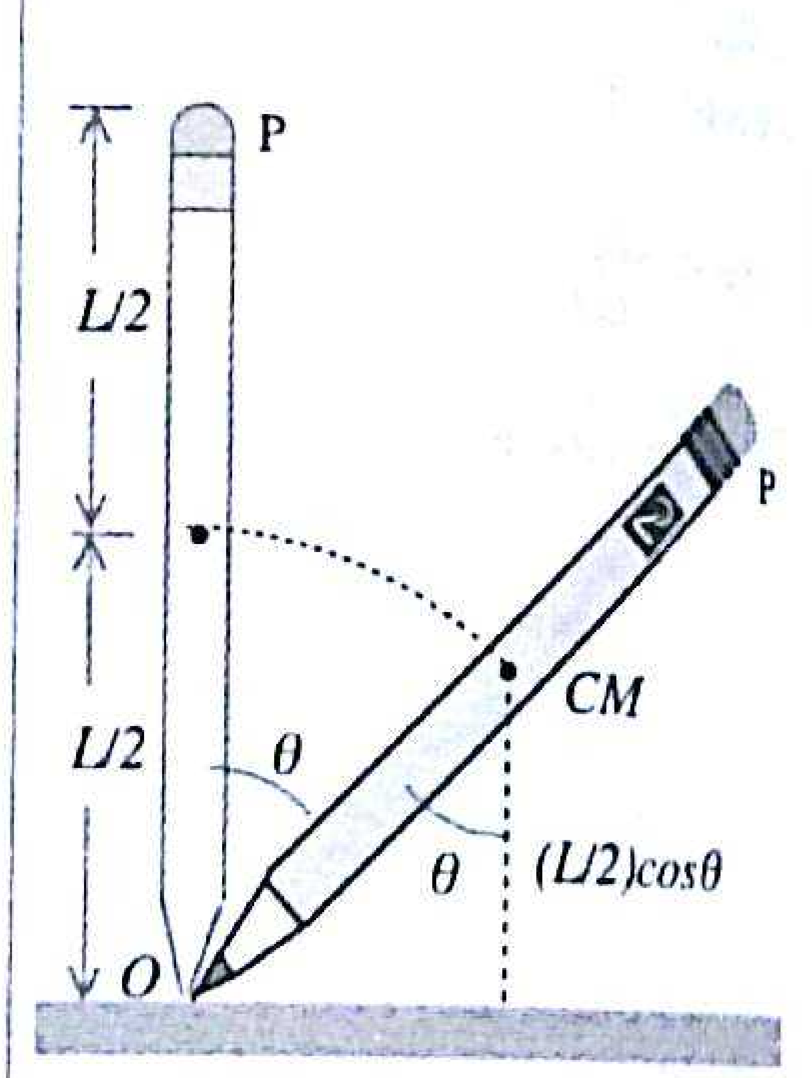
Siendo $I_o = ML^2/3$, el momento de una varilla respecto de un eje de rotación que pasa por el punto O de apoyo. Sustituyendo I_o en esta expresión y despejando, se obtiene la velocidad angular ω:

$$MgL(1-cos\theta) = \frac{1}{3}ML^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-cos\theta)}$$

b) La velocidad lineal del punto P en el extremo libre es:

$$v_P = \omega L = \sqrt{3gL(1-cos\theta)}$$



La aceleración angular viene dada por: $\tau_0 = I_0\alpha$

$$Mg(\frac{L}{2}sen\theta) = (\frac{1}{3}ML^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{3gsen\theta}{2L}$$

c) Los módulos de las aceleraciones radial y tangencial del extremo libre del lápiz (punto P) son, respectivamente:

$$a_r = \omega^2 L = \frac{3g}{L}(1-cos\theta)L = 3g(1-cos\theta)$$

$$a_t = \alpha L = \frac{3gsen\theta}{2L}L = \frac{3}{2}gsen\theta$$

y el módulo de la aceleración lineal total del punto P es:

$$a_P = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(3g(1-cos\theta))^2 + (\frac{3}{2}gsen\theta)^2}$$

$$a_P = \frac{3g}{2}\sqrt{(1-cos\theta)(5-3cos\theta)}$$

Respuesta:

a) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-cos\theta)}$

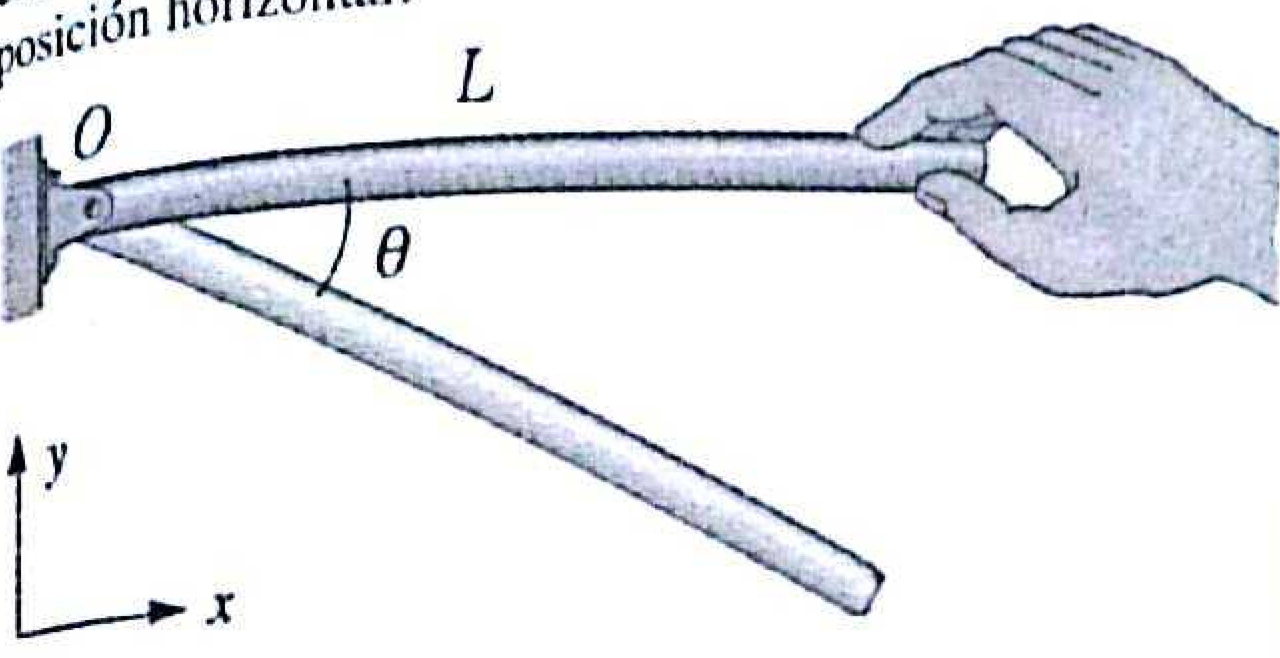
b) $v_P = \sqrt{3gL(1-cos\theta)}$

c) $a_P = \frac{3g}{2}\sqrt{(1-cos\theta)(5-3cos\theta)}$

d) Se observa que la aceleración del extremo libre va aumentando desde cero (para $\theta = 0°$) *y llega a exceder el valor de g* hasta alcanzar un valor máximo: $a_P = 3.35g$ cuando el lápiz alcanza la posición horizontal ($\theta = 90°$).

PR-3.17. ***Reacción del soporte al soltar la barra***

Una barra homogénea de masa M y longitud L puede girar alrededor de un pasador colocado en un extremo O. El extremo libre se sostiene inicialmente en reposo en posición horizontal.

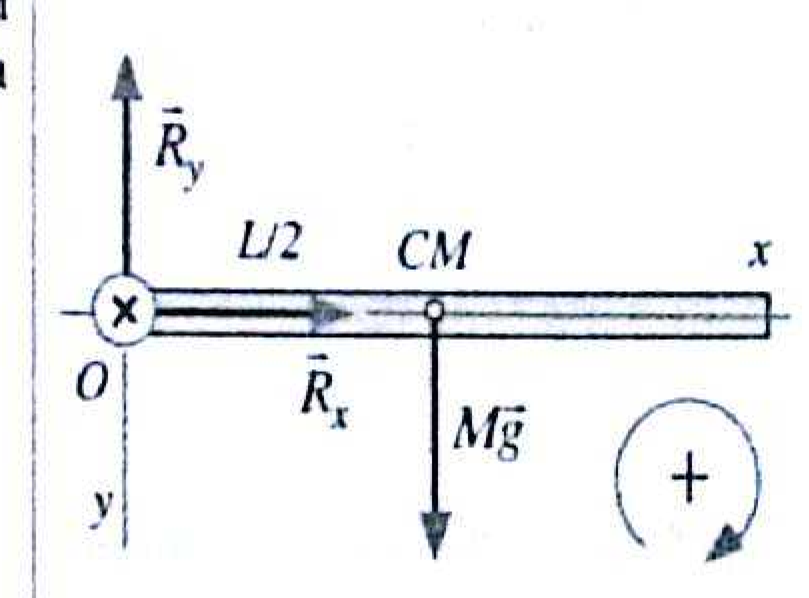


Si se suelta la barra desde esa posición, determine:

a) La fuerza de reacción ejercida por el soporte O en el instante en que la barra se suelta.

b) La fuerza de reacción ejercida por el soporte O en el instante en que la barra ha girado un ángulo θ = 45°.

Solución: a) En el instante inicial, el diagrama de cuerpo libre de la barra es el mostrado en la figura. La ecuación de rotación de la barra alrededor del O es: $\tau_0 = I_0\alpha$ y la aceleración angular es:



$$\alpha = \frac{\tau_0}{I_0} = \frac{Mg(L/2)}{ML^2/3} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

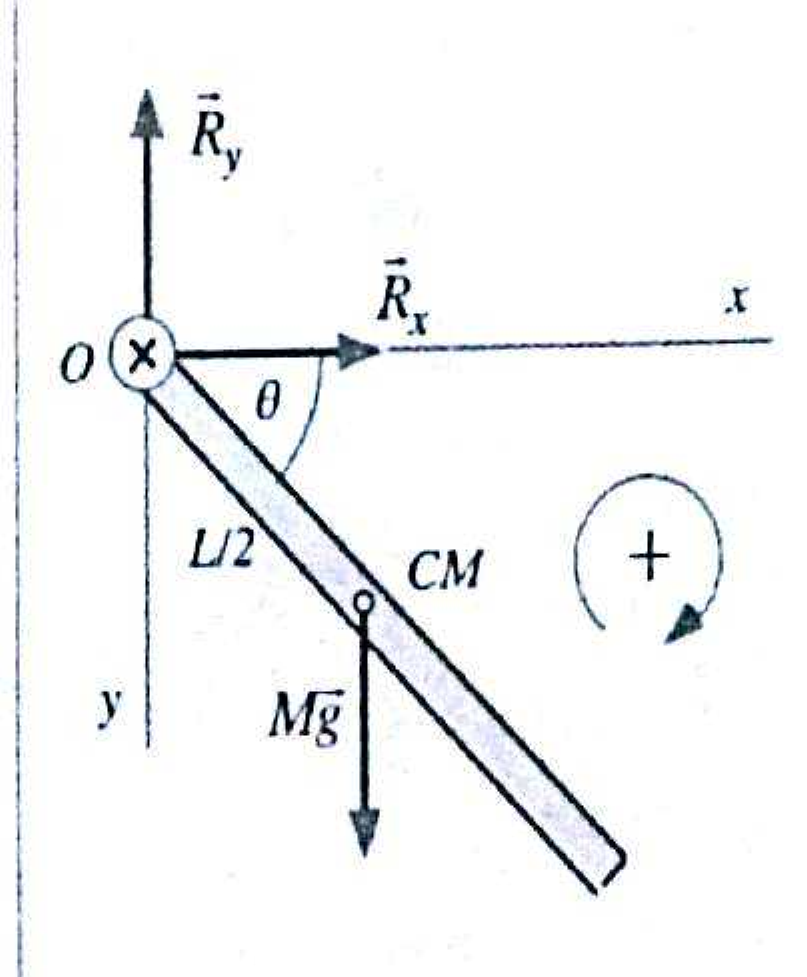
La aceleración del centro de masa es:

$$a_y = \alpha r = \frac{3}{2}\frac{g}{L}(\frac{L}{2}) = \frac{3}{4}g, \qquad a_x = 0$$

Aplicando la segunda ley de Newton al centro de masa:

$$\sum F_x = R_x = Ma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = 0$$

$$\sum F_y = Mg - R_y = Ma_y \quad \Rightarrow \quad R_y = Mg - \frac{3}{4}Mg = \frac{1}{4}Mg$$



b) Cuando la barra forma un ángulo θ con la horizontal, la aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{\tau_0}{I_0} = \frac{Mg(L/2cos\theta)}{ML^2/3} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}cos\theta$$

La velocidad angular en ese instante puede hallarse mediante la conservación de la energía mecánica:

$$Mg(\frac{L}{2}sen\theta) = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\omega^2$$

$$\omega^2 = 3\frac{g}{L}sen\theta$$

Las componentes radial y tangencial de la aceleración del centro de masa son:

$$a_t = \alpha r = (\frac{3}{2}\frac{g}{L}cos\theta)(\frac{L}{2}) = \frac{3}{4}g\cos\theta$$

$$a_r = \omega^2 r = (3\frac{g}{L}sen\theta)(\frac{L}{2}) = \frac{3}{2}g\cos\theta$$

Aplicamos la segunda ley de Newton al centro de masa:

$$R_x = Ma_x = M(-a_r\cos\theta - a_t sen\theta)$$

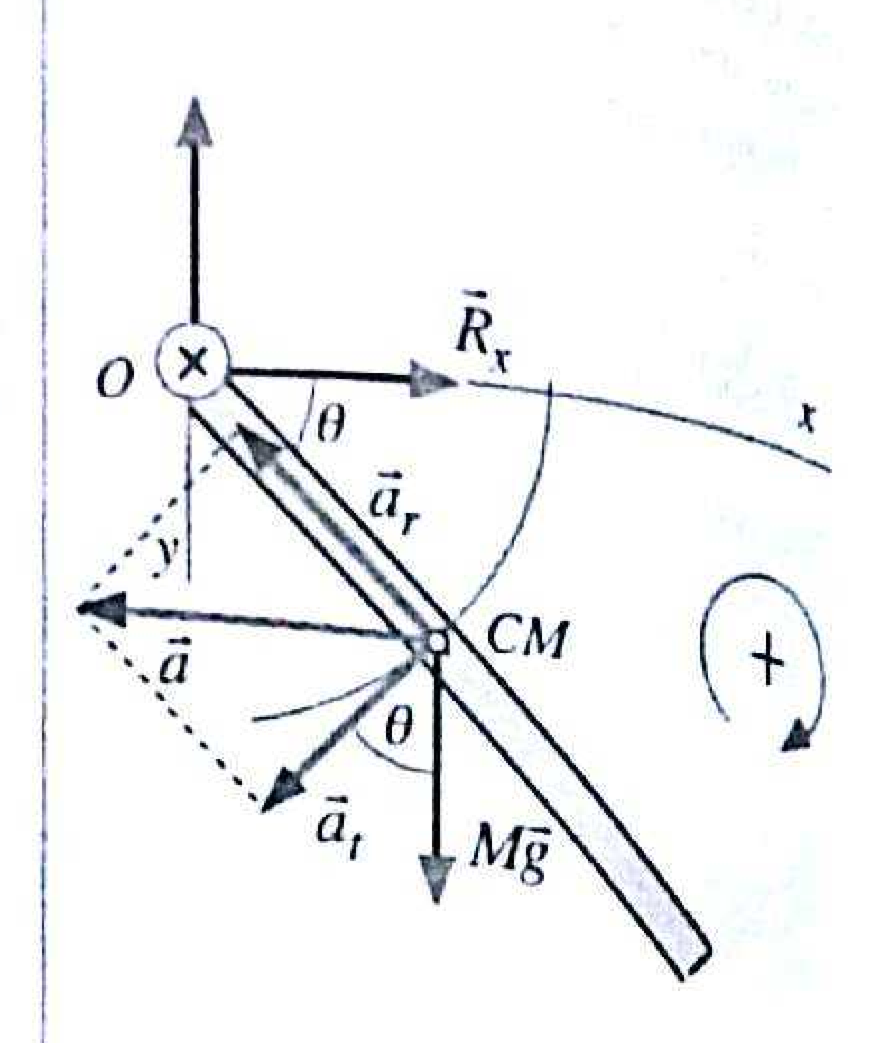
Para un ángulo $\theta = 45°$, la fuerza horizontal es:

$$R_x = Mg(-\frac{3}{4}\cos\theta sen\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta) = -\frac{9}{8}Mg$$

y la fuerza de reacción vertical:

$$R_y = Mg + M(a_r sen\theta - a_t\cos\theta) =$$

$$R_y = Mg + Mg(\frac{3}{2}\cos\theta sen\theta - \frac{3}{4}\cos\theta\cos\theta) = \frac{11}{8}Mg$$

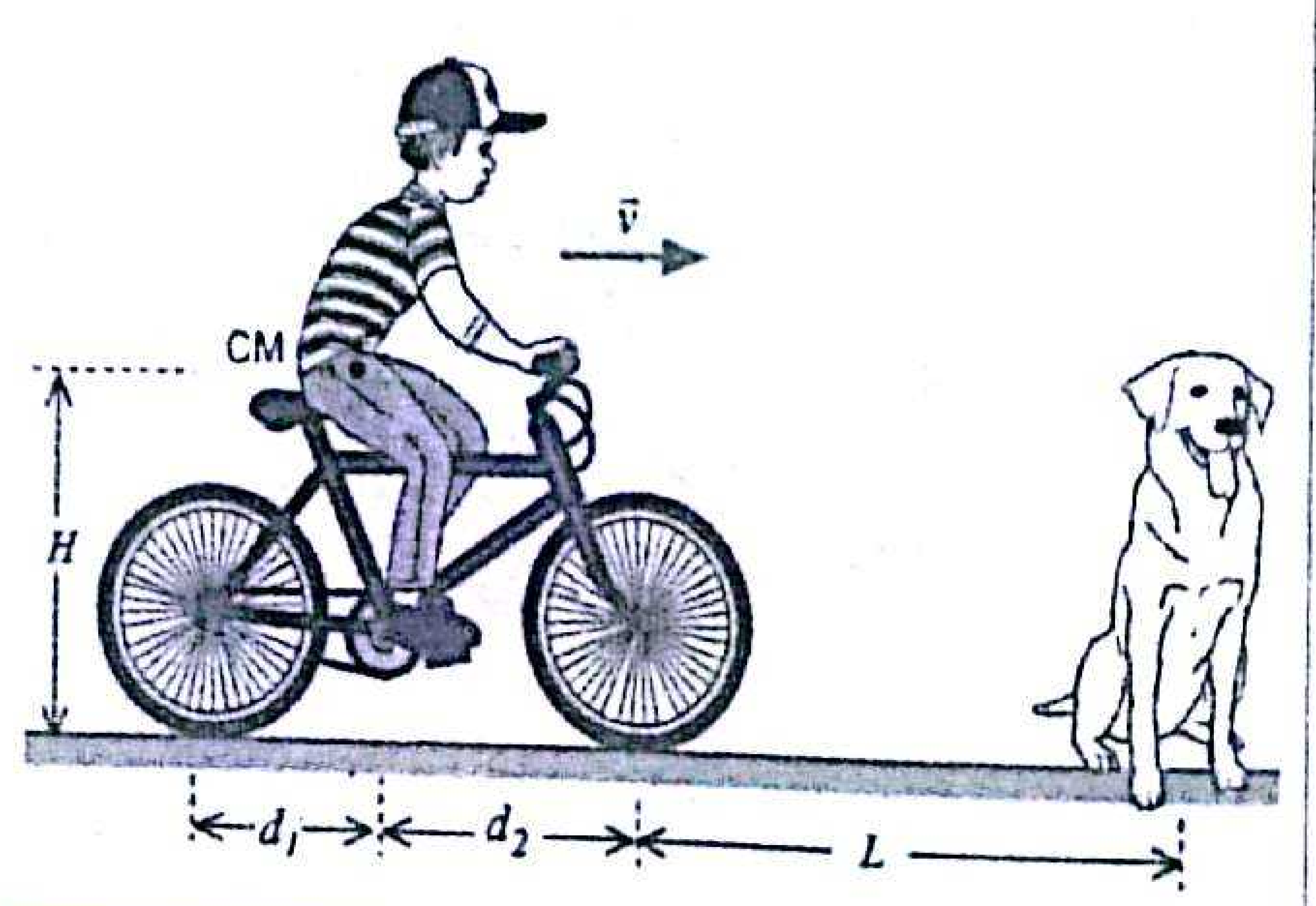


Respuesta:

a) $\theta = 0°$: $R_x = 0$, $R_y = \frac{1}{4}Mg$
b) $\theta = 45°$: $R_x = -\frac{9}{8}Mg$, $R_y = \frac{11}{8}Mg$

PR-3.18. *Si frena bruscamente, la bici puede volcarse*

Un ciclista va a una velocidad v = 8 m/s, y de repente se le atraviesa un perro a una distancia L = 6 m.



El trata de no atropellar al perro, evitando al mismo tiempo de ser lanzado hacia adelante sobre el manubrio. Si aplica solo el freno de la rueda delantera y se mueve con aceleración constante:
a) ¿Cuál es la máxima aceleración permitida para que la rueda trasera no pierda contacto con el piso?
b) ¿Cuál es la distancia recorrida antes de detenerse? ¿Podrá evitar atropellar al perro?

**Suponga que las distancias son:* d_1 = 0,3 m, d_2 = 0,65 m, H = 1m

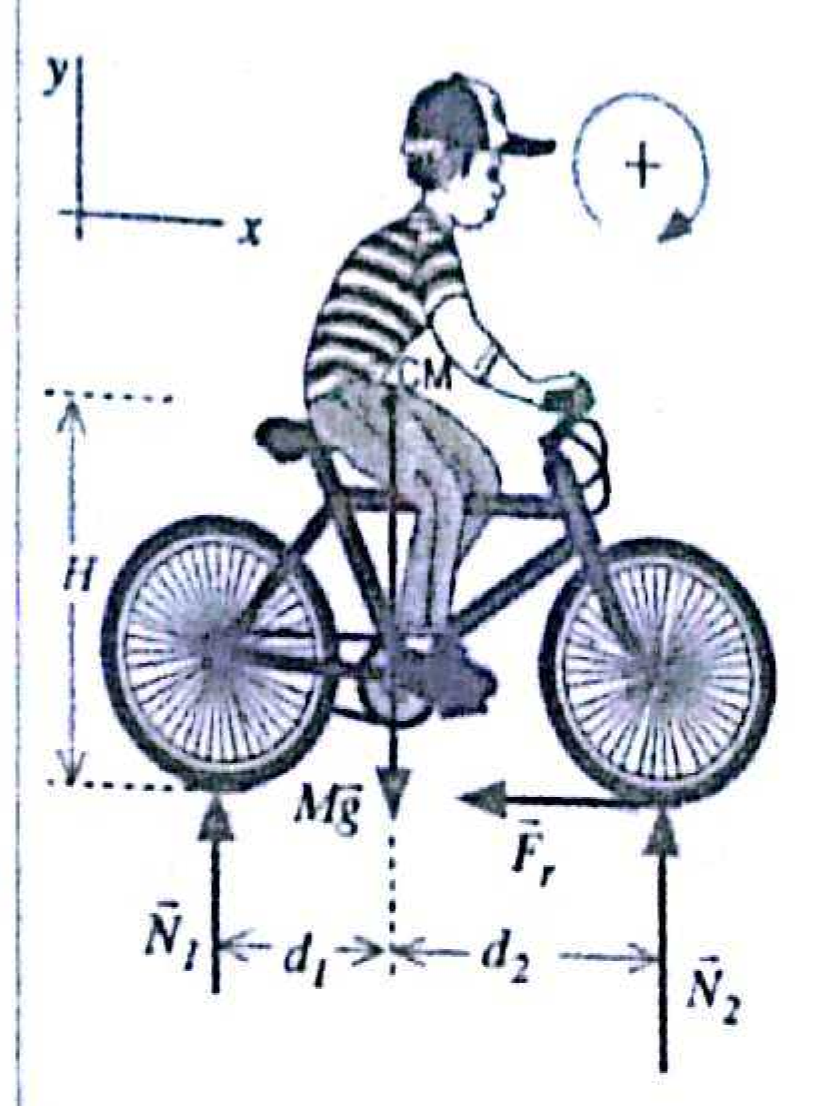
Solución: a) La condición crítica para que la bicicleta no vuelque es que sea nula la fuerza de contacto de la rueda trasera con el suelo ($\vec{N}_1 = 0$). En la dirección vertical la bicicleta no se mueve:

$$\sum F_y = N_2 - Mg = Ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = Mg$$

Por otra parte, la condición de equilibrio rotacional alrededor del centro de masa es:

$$\sum \tau_{cm} = F_r H - N_2 d_2 = 0$$

$$F_r = N_2(\frac{d_2}{H}) = Mg(\frac{d_2}{H})$$



Apliquemos la segunda ley de Newton en la dirección horizontal:

$$\sum F_x = -F_r = Ma_x \Rightarrow \quad a_x = -\frac{F_r}{M} = -g(\frac{d_2}{H})$$

$$a_x = -(9{,}8 m/s^2)(\frac{0{,}65m}{1m}) = \underline{-6{,}37 m/s^2}$$

b) Como el movimiento es con aceleración constante, la distancia recorrida antes de detenerse viene dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{v_0^2}{2a_x}$$

$$d = -\frac{(8m/s)^2}{2(-6{,}37m/s^2)} = \underline{5{,}02 m}$$

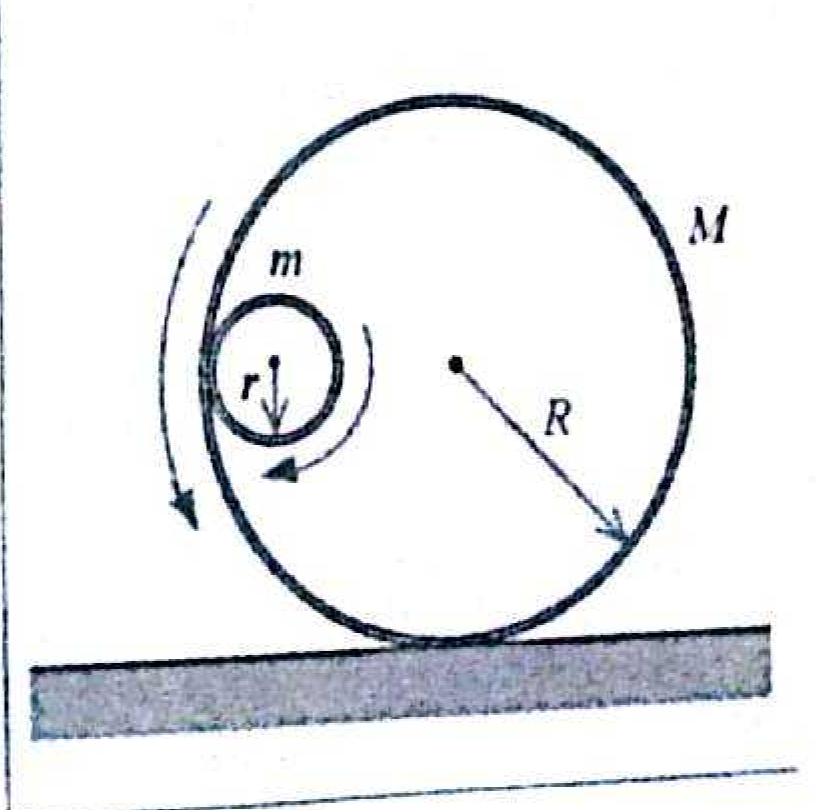
Esta distancia es menor que la separación inicial L = 6 m del perro, y por lo tanto, afortunadamente, la bicicleta no alcanza a tocarlo.

Respuesta:

a) $a_{máx}$ = - 6,37 m/s²
b) d = 5,02 m. ¡No lo alcanza!

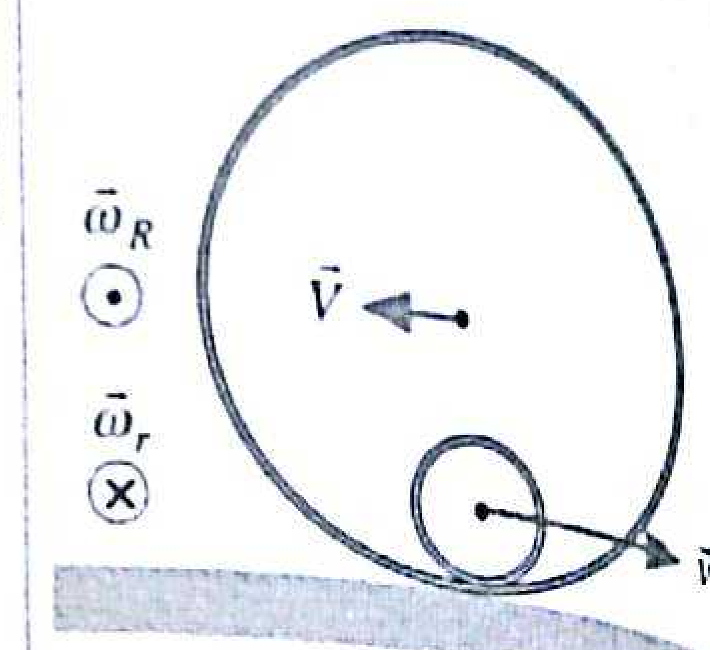
PR-3.19. *Un aro rodando dentro de otro aro*

Un aro de radio r y masa m se coloca dentro de otro aro de mayor radio $R = 3r$ y masa $M = 3m$. Se suelta el aro pequeño desde la posición mostrada en la figura, y rueda sin deslizar dentro del aro grande, mientras que éste se mueve libremente en una superficie horizontal sin fricción. No hay pérdidas de energía del sistema. ¿Cuál será la velocidad V del aro grande cuando el pequeño pase por la posición mas baja?



Solución: Las fuerzas horizontales externas sobre el sistema de los dos aros es nula, por lo tanto se conserva el momento lineal:

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -\frac{M}{m}\vec{V} = -3\vec{V} \quad \Rightarrow \quad v = 3V$$



La velocidad angular del aro pequeño es igual a su velocidad angular respecto al aro grande mas la velocidad angular del aro grande:

$$\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_{r/R} + \vec{\omega}_R$$

$$\vec{\omega}_r = \frac{v}{r}\hat{z} + \frac{V}{R}(-\hat{z}) = (\frac{v}{r} - \frac{V}{R})(\hat{z})$$

$$\vec{\omega}_r = (\frac{3V}{r} - \frac{V}{3r})\hat{z} = \frac{8}{3}\frac{V}{r}\hat{z}$$

La energía potencial inicial del aro pequeño se transforma en energía cinética de translación y de rotación de los dos aros:

$$mg(R-r) = (\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_r\omega_r^2) + (\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_R\omega_R^2)$$

$$2mg(2r) = m(3V)^2 + mr^2(\frac{8}{3}\frac{V}{r})^2 + 3mV^2 + MR^2(\frac{V}{R})^2$$

$$2mg(2r) = 9mV^2 + \frac{64}{9}mV^2 + 3mV^2 + 3mV^2 = \frac{199}{9}mV^2$$

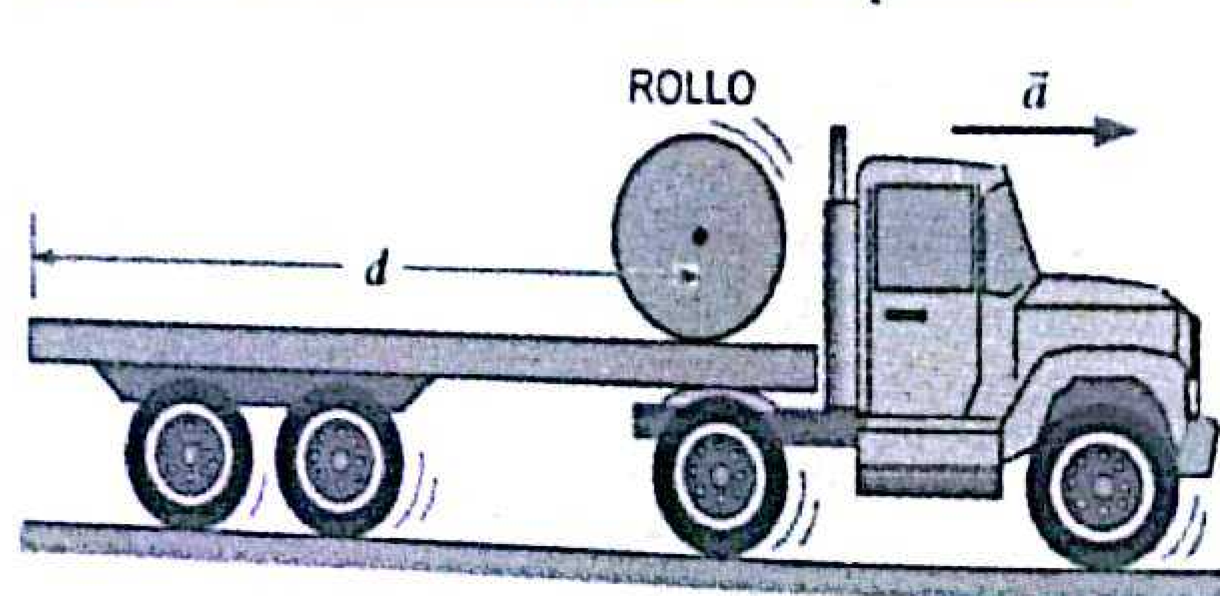
$$V = \sqrt{\frac{36rg}{199}}$$

Respuesta:

$$V = \sqrt{\frac{36rg}{199}}$$

PR-3.20. *Un rollo sale rodando al acelerar el camión*

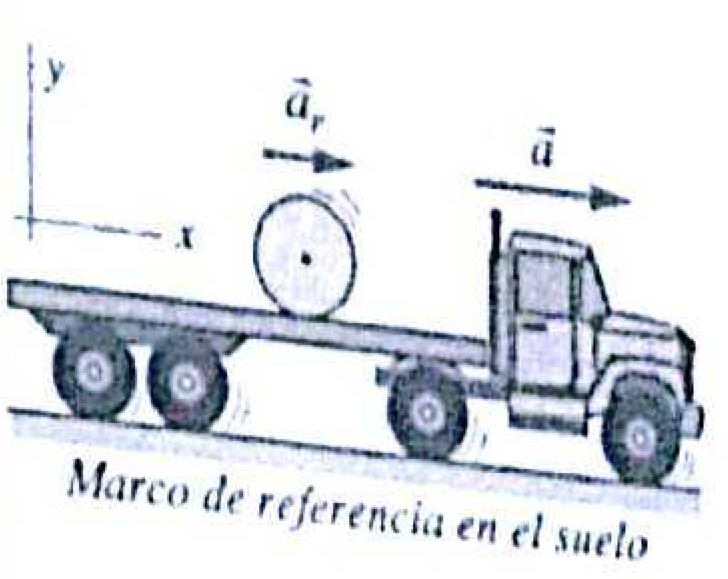
Un camión lleva en su plataforma un rollo en la forma de un cilindro macizo de masa M y radio R. Inicialmente el rollo está a una distancia d del borde de la plataforma.



¿Si el camión acelera hacia adelante con una aceleración a, que distancia se habrá movido el camión cuando el rollo caiga afuera del extremo de la plataforma?

Solución: Si observamos el movimiento desde el suelo, cuando el camión va hacia adelante con aceleración a, el rollo también se mueve hacia adelante pero con una aceleración menor, a_r. Esto significa que un observador en el camión verá al rollo alejarse hacia atrás con una aceleración relativa al camión:

$$a_{r/c} = a - a_r$$

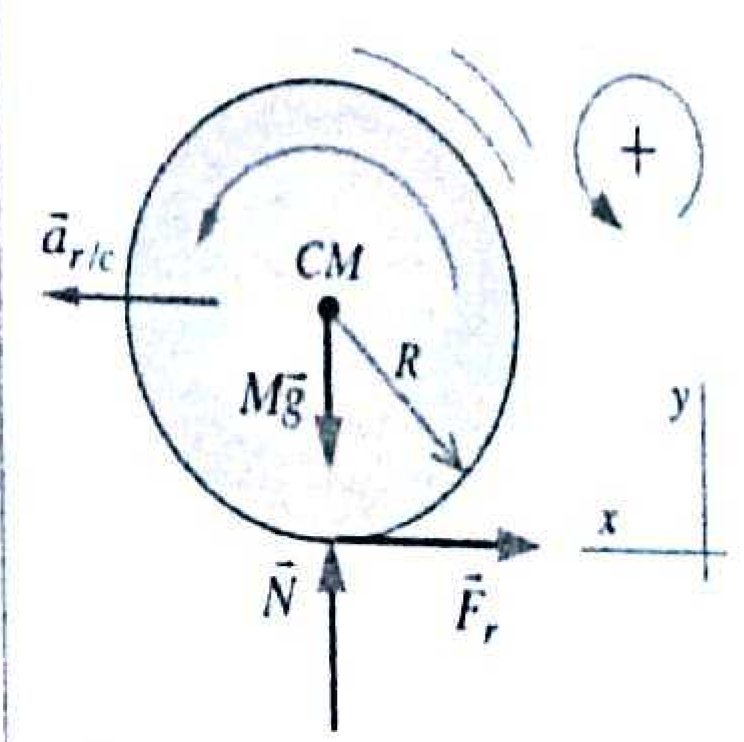


Marco de referencia en el suelo

Analicemos la rotación en el *marco de referencia del camión*. Este es un marco de referencia acelerado y por lo tanto no puede aplicarse directamente la segunda ley de Newton. Para ello habría que agregar fuerzas ficticias a las fuerzas reales. Sin embargo, se puede demostrar que si la rotación es alrededor del centro de masa, entonces la relación: $\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$, es válida aunque el marco de referencia del camión sea *no inercial*. La razón de ello es que la suma de las fuerzas ficticias sobre el cuerpo es equivalente a una sola fuerza ficticia que actúa sobre el centro de masa del mismo y por lo tanto no produce un torque neto.

La única fuerza que ejerce torque sobre el rollo para hacerlo girar alrededor del centro de masa, es la fuerza de roce, F_r, ejercida por la plataforma del camión. El rollo rueda hacia atrás del camión con una aceleración α, dada por:

$$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{RF_r}{MR^2/2} = 2\frac{F_r}{MR}$$



Marco de referencia acelerado del camión

Suponiendo que el rollo rueda sin deslizamiento, se debe cumplir la condición:

$$\alpha = \frac{a_{r/c}}{R} = \frac{a - a_r}{R}$$

Ahora podemos igualar las dos expresiones de la aceleración angular, α, para encontrar el valor de la fuerza de roce:

$$2\frac{F_r}{MR} = \frac{a - a_r}{R} \quad \Rightarrow \quad F_r = \frac{1}{2}M(a - a_r)$$

En el *marco de referencia inercial del suelo*, se puede aplicar la segunda ley de Newton para la traslación del cilindro:

$$\sum F_x = F_r = Ma_r$$

$$\frac{1}{2}M(a-a_r)=Ma_r \qquad \Rightarrow \qquad a_r=\frac{1}{3}a$$

El cilindro recorrerá la distancia d en la plataforma durante un tiempo t dada por la ecuación de cinemática:

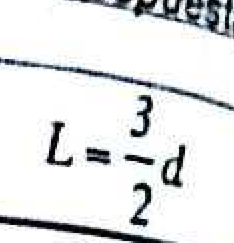
$$d=\frac{1}{2}a_{r/c}t^2=\frac{1}{2}(a-a_r)t^2=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{3}a)t^2=\frac{1}{3}at^2$$

$$t=\sqrt{\frac{3d}{a}}$$

Durante ese mismo intervalo de tiempo, el camión habrá avanzado hacia delante una distancia:

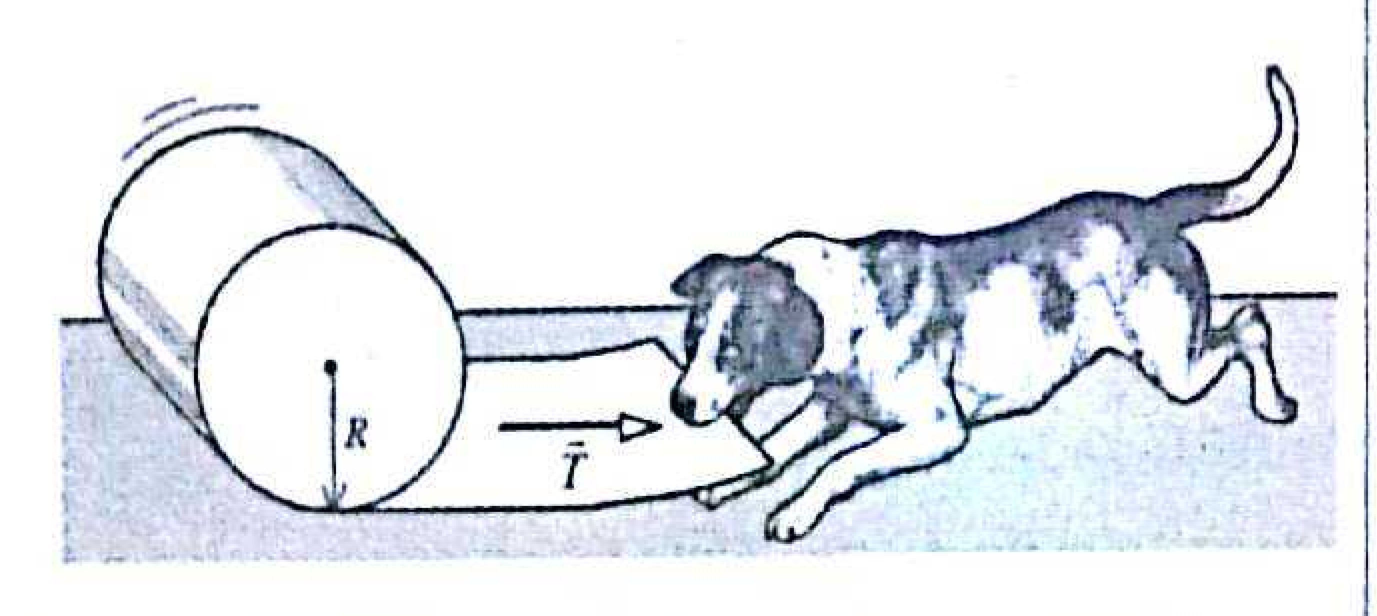
$$L=0+\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a(\frac{3d}{a})=\frac{3}{2}d$$

Respuesta:


$L=\frac{3}{2}d$

PR-3.21. *El rollo de papel es jalado por un extremo*

Un rollo de papel tapiz en la forma de un cilindro sólido de masa M y radio R está sobre el piso horizontal.



El rollo es jalado hacia la derecha mediante la aplicación a su extremo libre de una fuerza horizontal T. Si el coeficiente de fricción cinética entre el piso y el rollo es μ_c, determine:

a) La aceleración lineal del centro de masa del rollo.

b) La aceleración angular α en torno al centro de masa.

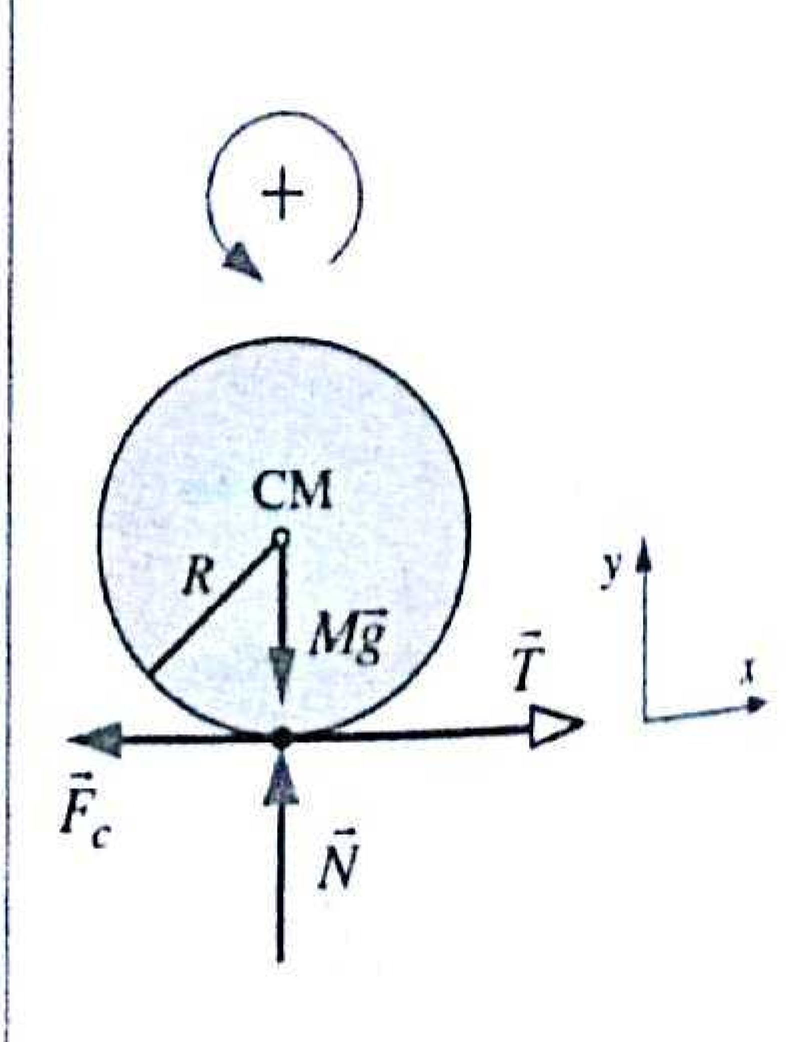
Solución: a) La segunda ley de Newton aplicada al movimiento de translación del centro de masa del rollo es:

$$\sum F_y=N-Mg=0 \qquad \Rightarrow \qquad N=Mg$$

$$\sum F_x=T-F_c=Ma_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad T-\mu_c N=Ma_{cm}$$

Sustituyendo N de la primera ecuación en la segunda tenemos la aceleración del centro de masa del rollo:

$$T-\mu_c Mg=Ma_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad a_{cm}=\frac{T}{M}-\mu_c g$$



b) La ecuación de movimiento para la rotación del rollo es:

$$\sum \tau_{cm}=TR-F_cR=I_{cm}\alpha$$

y la aceleración angular es:

$$\alpha=\frac{TR-F_cR}{I_{cm}}=\frac{TR-\mu_c MgR}{MR^2/2}=\frac{2}{R}(\frac{T}{M}-\mu_c g)$$

Respuesta

a) $a_{cm}=\frac{T}{M}-\mu_c g$

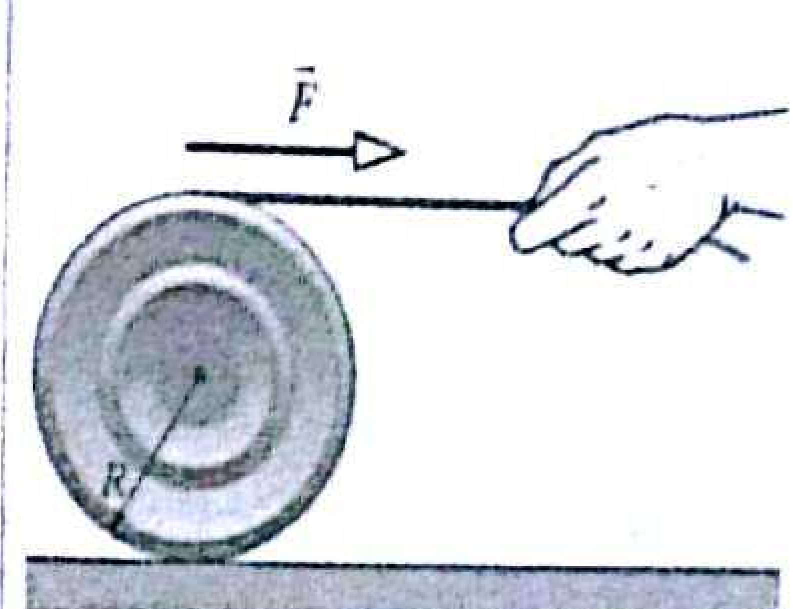
b) $\alpha=\frac{2}{R}(\frac{T}{M}-\mu_c g)$

PR-3.22. *La fuerza de rozamiento apunta hacia adelante*

Un carrete de alambre con forma cilíndrica, de masa uniforme M y radio R, está sobre una superficie horizontal. El carrete se desenrolla aplicando al alambre una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ que apunta hacia la derecha. Suponiendo que el carrete no desliza, determine:

a) La aceleración del centro de masa.

b) La magnitud y dirección de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$.



Solución: a) Supongamos inicialmente que la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$, está dirigida en dirección opuesta a la fuerza aplicada, $\vec{F}$. En este caso los torques debido a $\vec{F}_r$ y a $\vec{F}$ se suman y la ecuación de rotación alrededor del centro de masa es:

$$\sum \tau_{cm}=I_{cm}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad FR+F_rR=I_{cm}\alpha$$

Para un rodamiento sin deslizamiento, $\alpha=a_{cm}/R$:

$$FR+F_rR=(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{a_{cm}}{R})$$

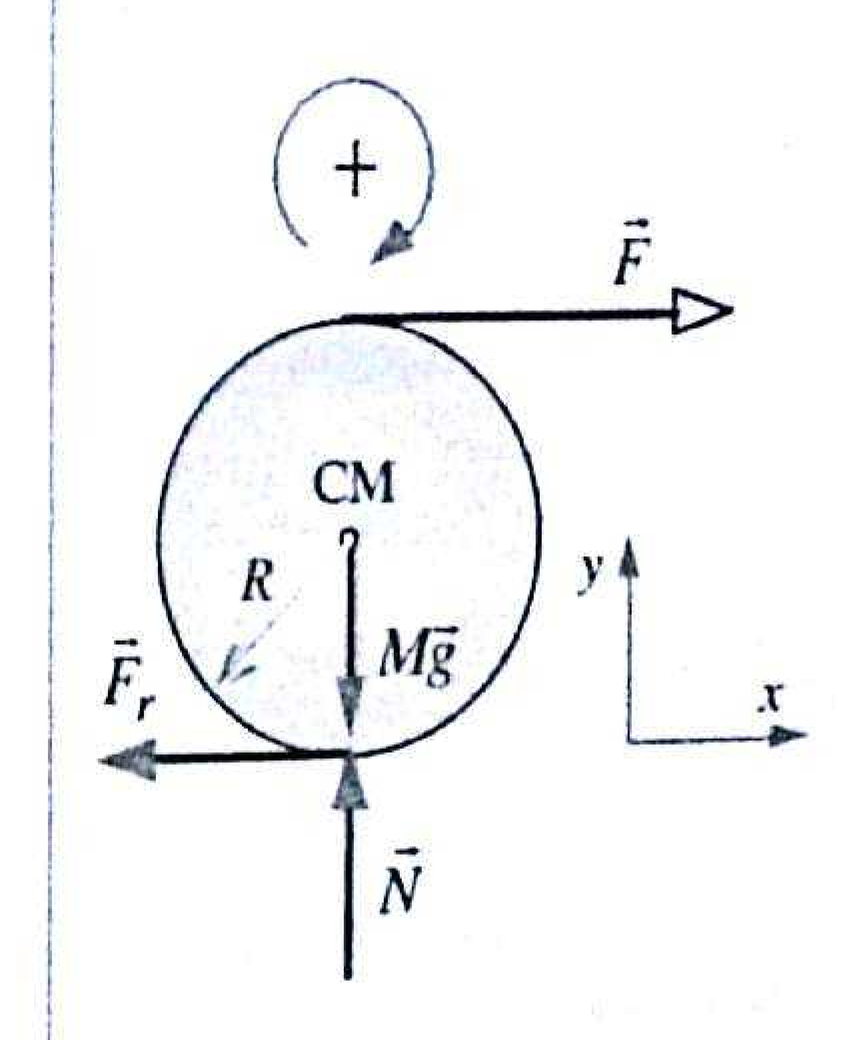
$$F+F_r=\frac{1}{2}Ma_{cm} \qquad \text{(i)}$$

La ecuación de traslación del centro de masa es:

$$\sum F_x=F-F_r=Ma_{cm} \qquad \text{(ii)}$$

Sumando las ecuaciones (i) y (ii), encontramos la aceleración del centro de masa:

$$2F=\frac{3}{2}Ma_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad a_{cm}=\frac{4}{3}\frac{F}{M}$$



b) Sustituyendo esta aceleración en la ecuación (i), se tiene:

$$F_r = \frac{1}{2}Ma_{cm} - F = \frac{1}{2}M(\frac{4}{3}\frac{F}{M}) - F = -\frac{1}{3}F$$

El signo (-) indica que el sentido de la fuerza de roce $\vec{F}_r$ que habíamos supuesto inicialmente es en realidad opuesto, es decir, hacia la derecha:

$$\vec{F}_r = +\frac{1}{3}\vec{F}$$

Respuesta:

a) $a_{cm} = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$

b) $\vec{F}_r = +\frac{1}{3}\vec{F}$ (Curiosamente no se opone a la fuerza aplicada)

PR-3.23. *En la rodadura, el rozamiento no trabaja*

Considere el problema anterior del cilindro de masa uniforme M y radio R que se desenrolla al aplicar una fuerza horizontal constante $\vec{F}$.

a) Verifique que la fuerza de rozamiento en la rodadura no realiza trabajo.

b) Si la fuerza de rozamiento no trabaja, explique por qué se frena una pelota redonda que rueda en un plano horizontal.

Solución: Si el cilindro parte del reposo y después que su centro de masa haya recorrido una distancia, d, su variación de energía cinética (traslación + rotación) es:

$$\Delta K = \Delta K_t + \Delta K_r = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Las velocidades lineales y angulares están dadas por:

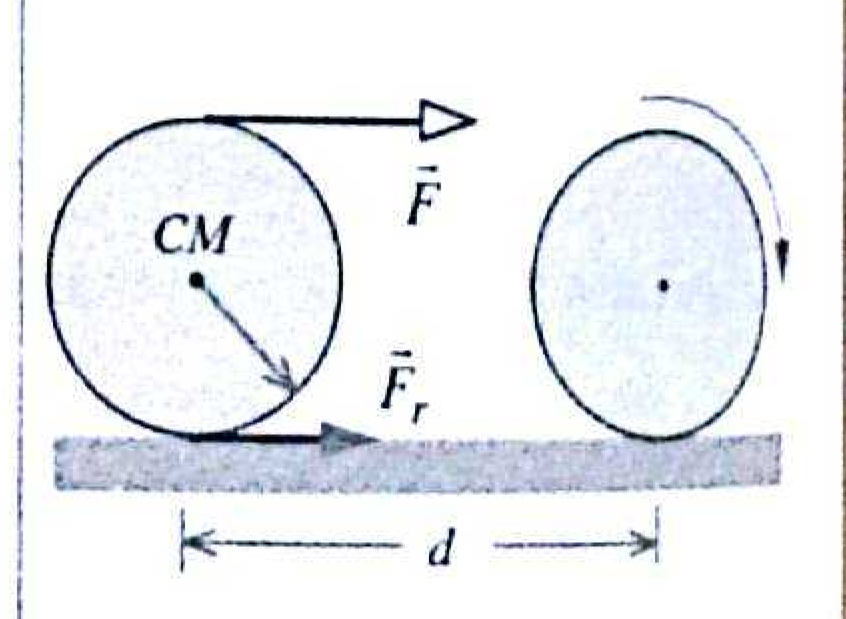
$$v_{cm}^2 - 0 = 2a_{cm}d \qquad \omega^2 - 0 = 2\alpha\Delta\theta$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\Delta K = Ma_{cm}d + I_{cm}\alpha\Delta\theta$$

La aceleración a_{cm} fue calculada en el problema anterior. Por lo tanto:

$$\Delta K = M(\frac{4}{3}\frac{F}{M})d + (\frac{1}{2}MR^2)(\frac{4}{3}\frac{F}{M}\frac{1}{R})(\frac{d}{R}) = 2Fd$$



Calculemos ahora el *trabajo realizado únicamente por la fuerza aplicada* $\vec{F}$, para trasladar y hacer girar el disco:

$$W_F = Fd + \tau\theta = Fd + RF(\frac{d}{R}) = 2Fd$$

Encontramos así que el trabajo que realiza la fuerza aplicada es igual a la variación de energía cinética del cilindro; $W_F = \Delta K$. Por lo tanto la fuerza aplicada externamente, $\vec{F}$, realiza todo el trabajo, lo cual implica que el trabajo de la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$, es nulo.

b) La fuerza de rozamiento no trabaja porque cuando el cilindro rueda sin deslizamiento, la superficie del cilindro y el plano en contacto están en cada instante en reposo una con respecto a la otra, de modo que el punto de acción de $\vec{F}_r$ nunca se desplaza. Así pues este rozamiento es del tipo de rozamiento estático.

En la situación real, una esfera que rueda en un plano horizontal, eventualmente se detiene porque no es un cuerpo perfectamente rígido. Todos los objetos son deformables en cierto grado, la esfera se aplana un poco y el nivel de la superficie horizontal adquiere también una ligera depresión. Por tanto, en lugar de un punto existe siempre un área de contacto. La fuerza normal ejerce un torque que se opone a la rotación y además hay deslizamiento que causa una pérdida de energía.

Respuesta:

a) La fuerza del rozamiento por rodadura no trabaja!

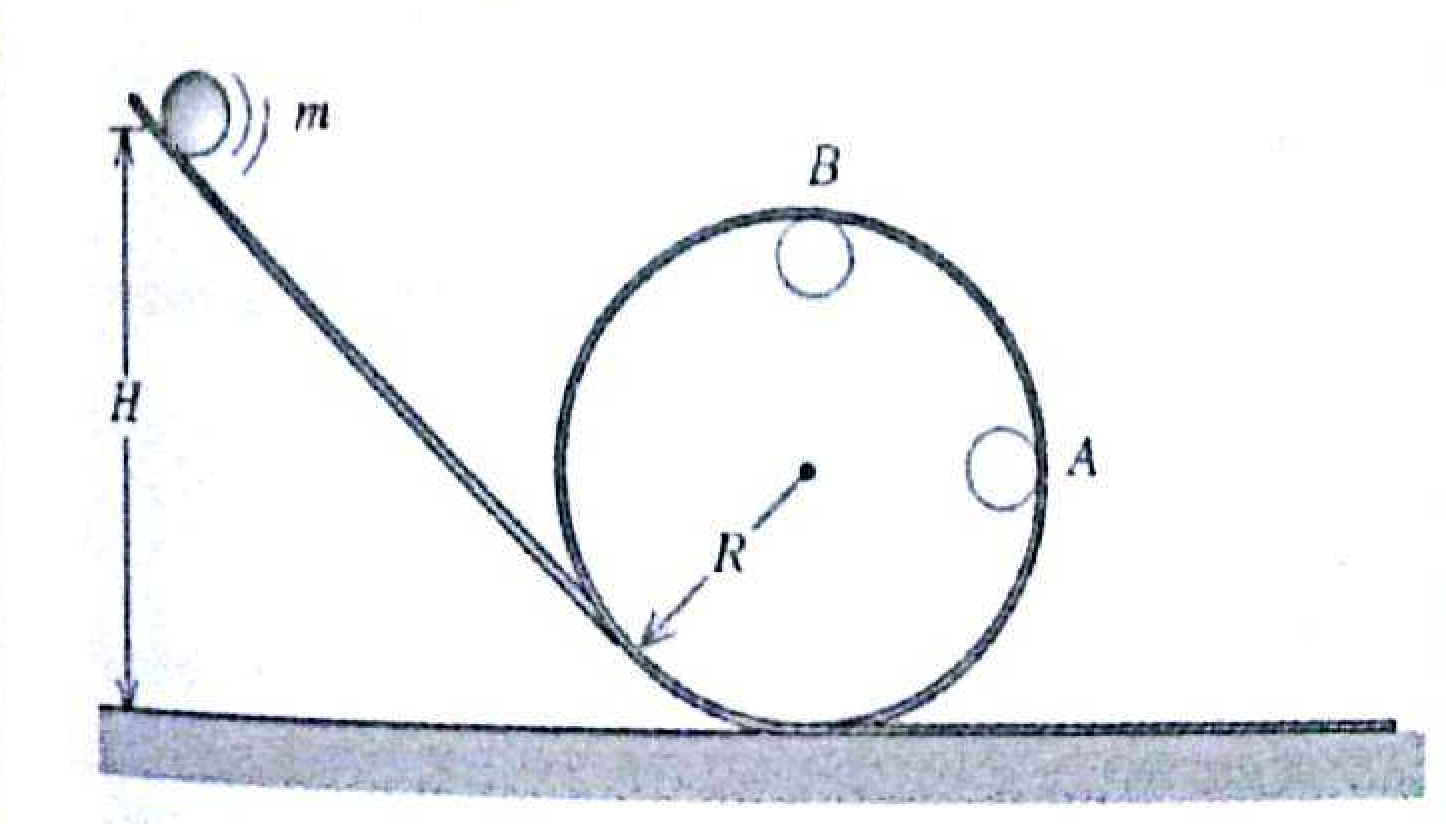
b) Lo anterior se aplica solo en el modelo de cuerpos perfectamente rígidos, ya que en la realidad todo cuerpo se deforma.

PR-3.24. *Una esferita rizando el rizo*

Una esferita sólida de masa m y radio r parte del reposo desde una altura H en una pista que consiste de un tramo recto inclinado, seguido de un bucle circular de radio R.

a) Si la esferita rueda sin resbalar, ¿cuál es el mínimo valor de H para que le dé la vuelta al bucle circular?

b) Suponga que la esferita está inicialmente a una altura $H = 3R$ ¿cuál será la fuerza normal que ejerce la pista sobre la esfera cuando pasa por el punto intermedio A?



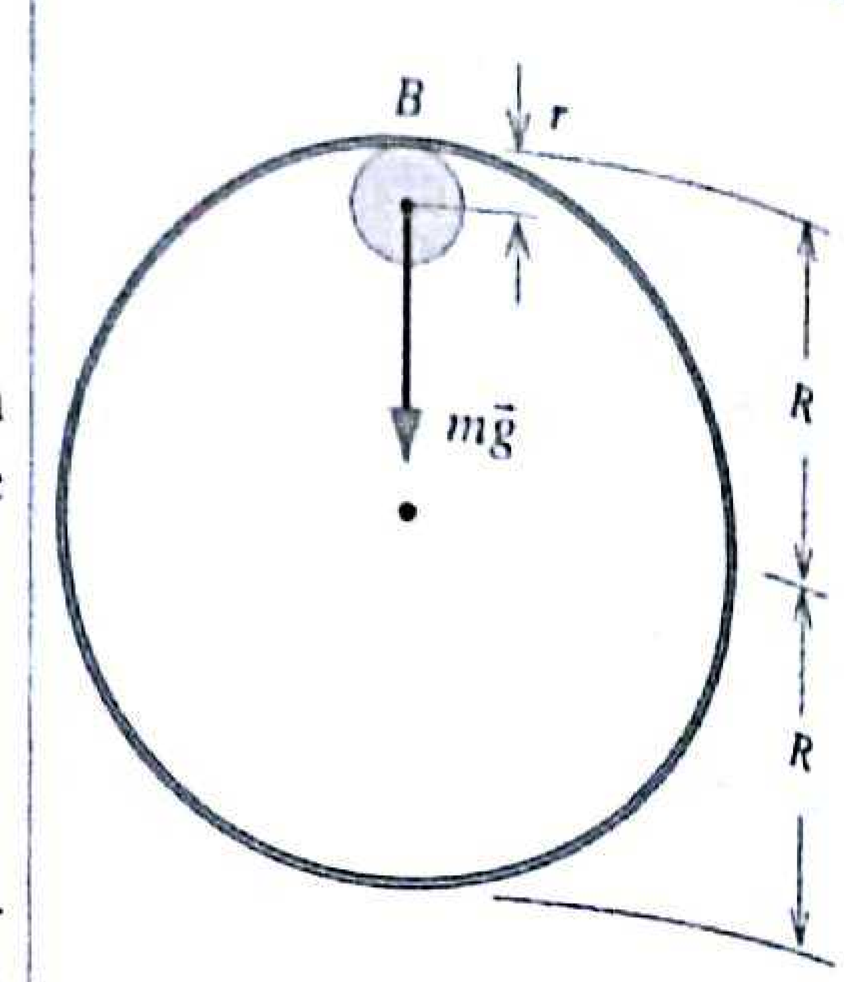
Solución: Aplicamos la conservación de la energía mecánica entre la posición inicial de la esferita, con altura $(H+r)$ y la posición final B, con altura $(2R-r)$:

$$U_f - U_i = \Delta K_{rot} + \Delta K_{trans}$$

$$mg(H + r) - mg(2R - r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Sustituyendo en esta expresión el momento de inercia para una esfera sólida ($I_{cm} = (2/5)mr^2$) y la condición de rodadura: $v = \omega r$, encontramos:

$$gH + 2gr = 2gR + \frac{7}{10}v^2 \qquad \text{(i)}$$

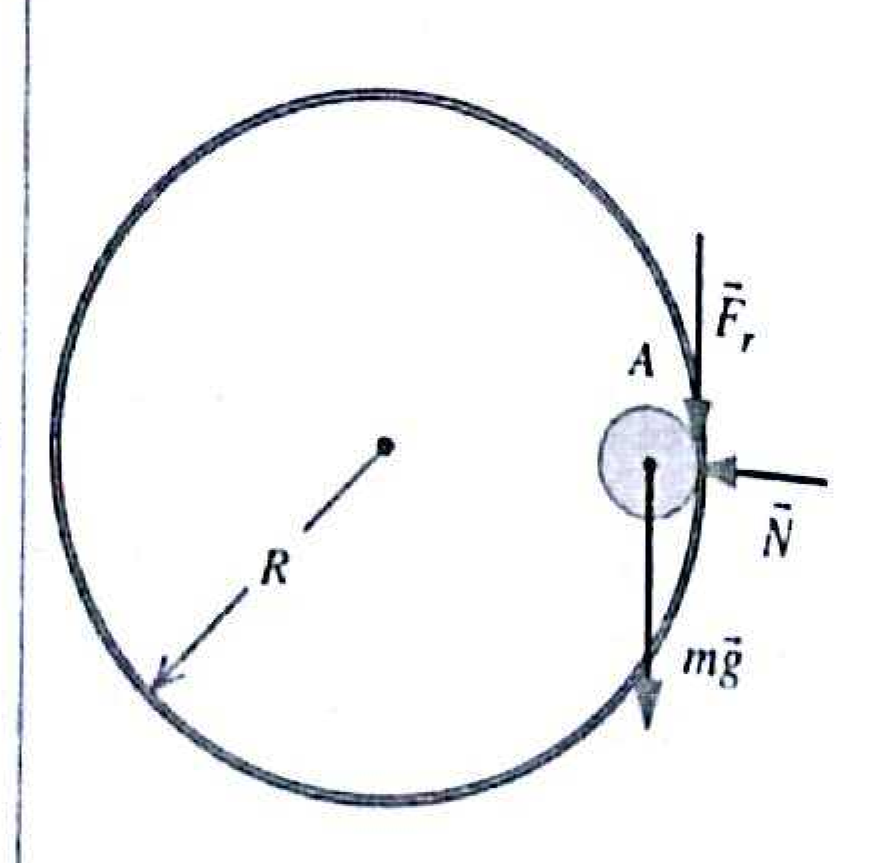


Para que la esferita de la vuelta al bucle debe permanecer en contacto con la pista hasta la cima B. Por lo tanto, su velocidad v debe cumplir la condición crítica de que la fuerza de contacto normal, se anule justamente en ese punto. Luego la fuerza centrípeta es justamente el peso mg:

$$\sum F_y = mg = \frac{mv^2}{(R - r)} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g(R - r) \qquad \text{(ii)}$$

Reemplazando este valor de v^2 en la ecuación (i) y despejando H, encontramos

$$H = 2(R - r) + 0{,}7(R - r) \quad \Rightarrow \quad H_{min} = 2{,}7(R - r)$$



b) Si la esferita está inicialmente a la altura $H = 3R$ y finalmente en el punto A ubicado a una altura R, aplicando la conservación de la energía:

$$mg(3R + r) - mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$mg(3R + r) - mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR^2)(\frac{v}{R})^2$$

$$v^2 = \frac{10}{7}(2R + r)g$$

La fuerza horizontal en el punto A es la de contacto "normal", que es responsable de la aceleración centrípeta:

$$\sum F_x = N = \frac{mv^2}{R - r}$$

Sustituyendo la velocidad: $N = \frac{10}{7}(\frac{2R + r}{R - r})mg$

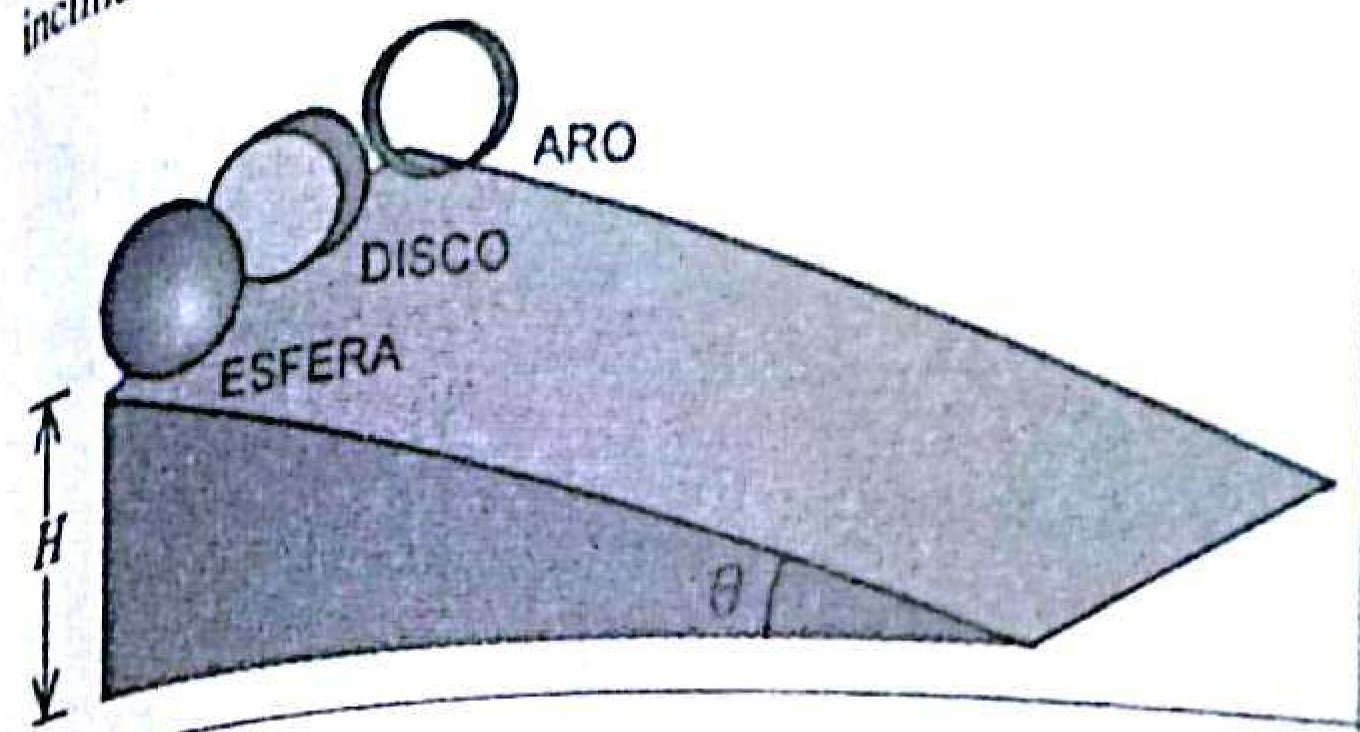
Respuesta:

a) $H_{min} = 2{,}7(R - r)$

b) $N = \frac{10}{7}(\frac{2R + r}{R - r})mg$

PR-3.25. *Esfera, disco y aro: ¿Cuál llega primero?*

Tres objetos redondos uniformes: una esfera sólida, un disco y un aro, se colocan en la parte superior de un plano inclinado a un ángulo θ.



Los tres objetos se sueltan desde el reposo a igual altura H y ruedan cuesta abajo sin deslizar. Determine el orden de llegada. ¿Dependerá el resultado de las masas y los radios?

Resuelva el problema utilizando dos enfoques diferentes:

a) Enfoque energético.
b) Enfoque dinámico.

Solución: a) Método energético: Cuando el objeto ha rodado hasta el pie de la rampa de altura H, la fuerza de gravedad ha efectuado un trabajo: MgH. Como ha partido del reposo, su energía cinética final debe ser igual a esta ganancia de energía, $W = \Delta K$:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Empleando la condición de que $v_{cm} = R\omega$ para el rodamiento puro, tenemos:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}(\frac{v_{cm}}{R})^2 = \frac{1}{2}(M + \frac{I_{cm}}{R^2})v_{cm}^2$$

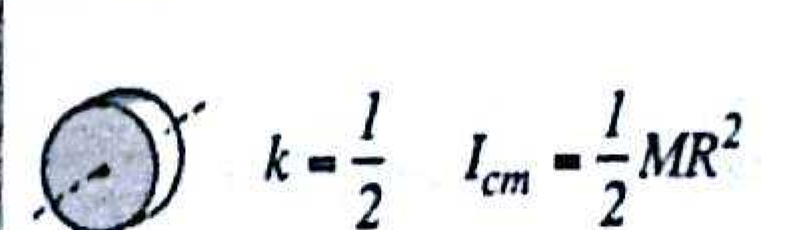
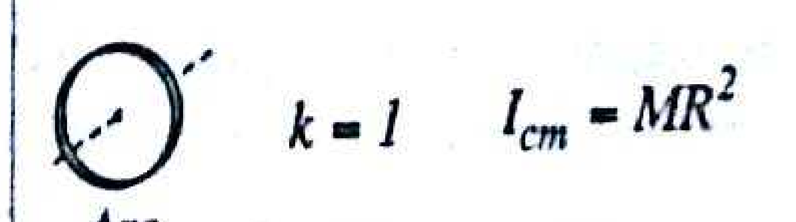
Despejando, encontramos la velocidad del centro de masa:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2MgH}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gH}{1 + k}}$$

Siendo la constante k, el llamado radio de giro:

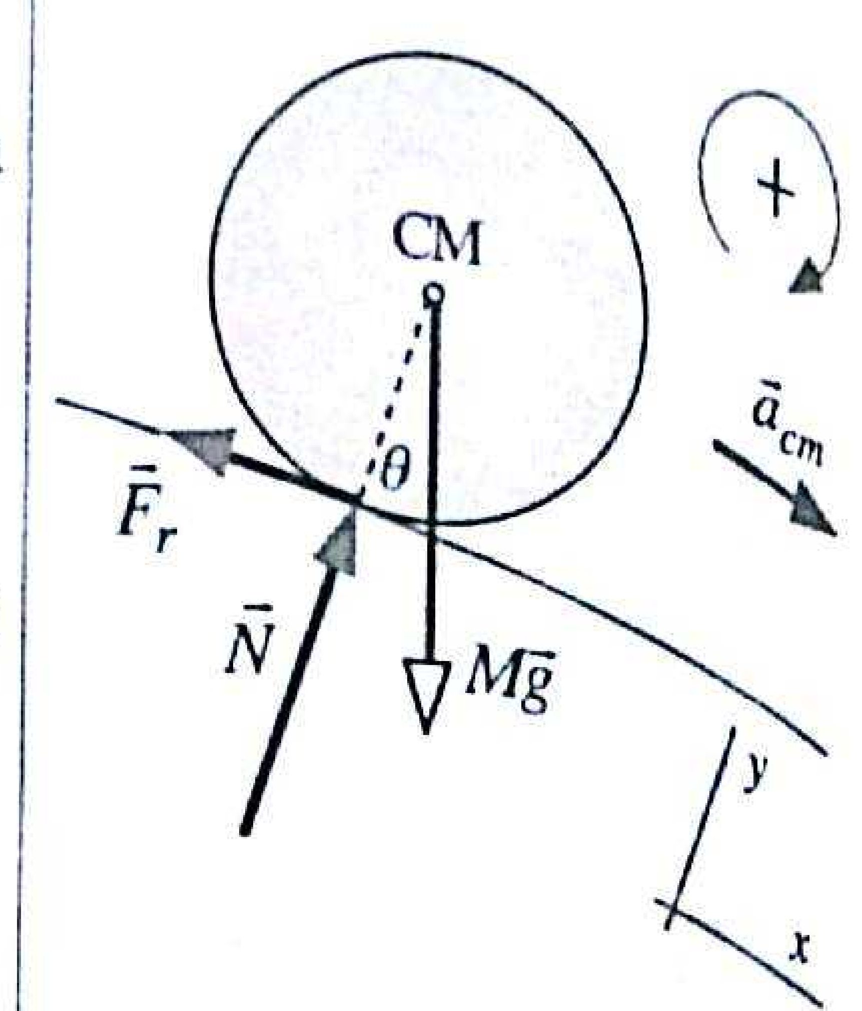
$$k = \frac{I_{cm}}{MR^2} = \text{Radio de giro.}$$

Según este resultado, la velocidad será mayor en la medida en que sea menor el valor de la constante k. De acuerdo a la tabla mostrada a la derecha, significa que v_{cm} será mayor para la esfera ($k = 2/5$), seguida del disco ($k = 1/2$) y menor para el aro ($k = 1$). Esta secuencia de velocidades no depende de la altura inicial.

Objeto	Radio de giro	Momento de inercia
Esfera	$k = \frac{2}{5}$	$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$
 *Disco*	$k = \frac{1}{2}$	$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$
 *Aro*	$k = 1$	$I_{cm} = MR^2$

b) Método dinámico: Tomando torques respecto al centro de masa, podemos escribir:

$$\sum \tau_{cm} = F_r R = I_{cm}\alpha \qquad (3)$$



Por la condición de rodadura: $\alpha = a_{cm}/R$, por lo tanto la fuerza de rozamiento es:

$$F_r = \frac{I_{cm}\alpha}{R} = \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm}$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la traslación del CM:

$$\sum F_x = Mgsen\theta - F_r = Ma_{cm}$$

Sustituyendo en esta expresión la fuerza de rozamiento:

$$Mgsen\theta - \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm} = Ma_{cm}$$

Por lo tanto, la aceleración del centro de masa es:

$$a_{cm} = \frac{gsen\theta}{1+\frac{I_{cm}}{MR^2}} = \frac{gsen\theta}{1+k}$$

El resultado para las aceleraciones predice lo mismo que lo hallado en la parte (a) para las velocidades del centro de masa. La secuencia de llegada es: Primero llega la esfera ($k = 2/5$), seguida del disco ($k = 1/2$) y en último lugar, el aro ($k = 1$).

Respuesta:

a) $v_{cm} = \sqrt{\frac{2gH}{1+k}}$

b) $a_{cm} = \frac{gsen\theta}{1+k}$

Primero llega cualquier esfera, segundo cualquier disco y último cualquier aro. La secuencia de llegada no depende de la masa ni del radio de los cuerpos.

PR-3.26. *Fricción mínima para rodar sin deslizamiento*

Tres objetos redondos uniformes: una esfera sólida, un disco y un aro, se colocan en la parte superior de un plano inclinado a un ángulo θ. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática para que los cuerpos rueden sin deslizamiento?

Solución: Utilizando los resultados del Problema anterior determinamos la fuerza de rozamiento:

$$F_r = \frac{I_{cm}\alpha}{R} = \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm}$$

$$F_r = \frac{I_{cm}}{R^2}\left(\frac{gsen\theta}{1+k}\right) = \left(\frac{k}{1+k}\right)gsen\theta$$

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es:

$$F_r(max) = \mu_e N = \mu_e Mgcos\theta$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{k}{1+k}\right)gsen\theta \le \mu_e Mgcos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_e \ge \left(\frac{k}{1+k}\right)tg\theta$$

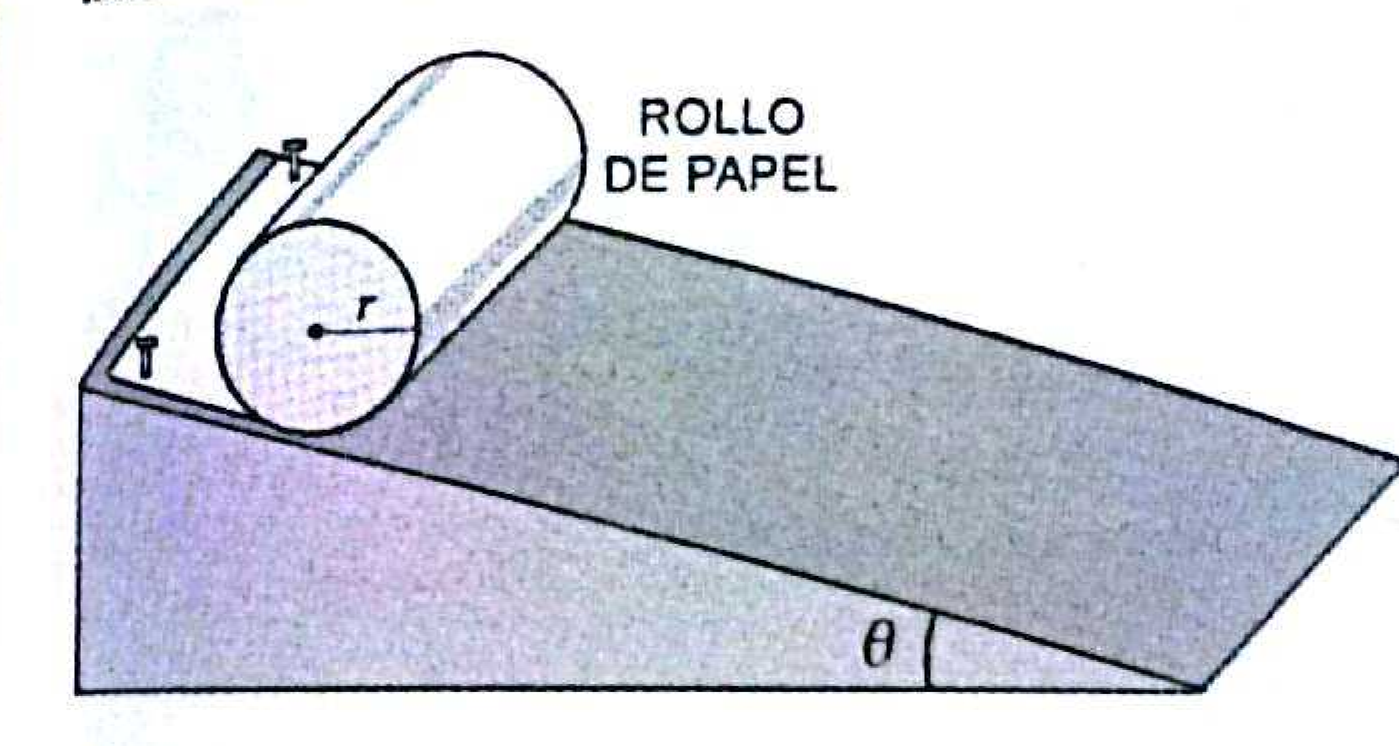
Para el anillo:	$k = 1$	$\mu_e \ge \frac{1}{2}tg\theta$
Para el cilindro:	$k = 1/2$	$\mu_e \ge \frac{1}{3}tg\theta$
Para la esfera:	$k = 2/5$	$\mu_e \ge \frac{2}{7}tg\theta$

Respuesta:

$\mu_e \ge \left(\frac{k}{1+k}\right)tg\theta$

PR-3.27. *Rollo que se desenrolla en un plano inclinado*

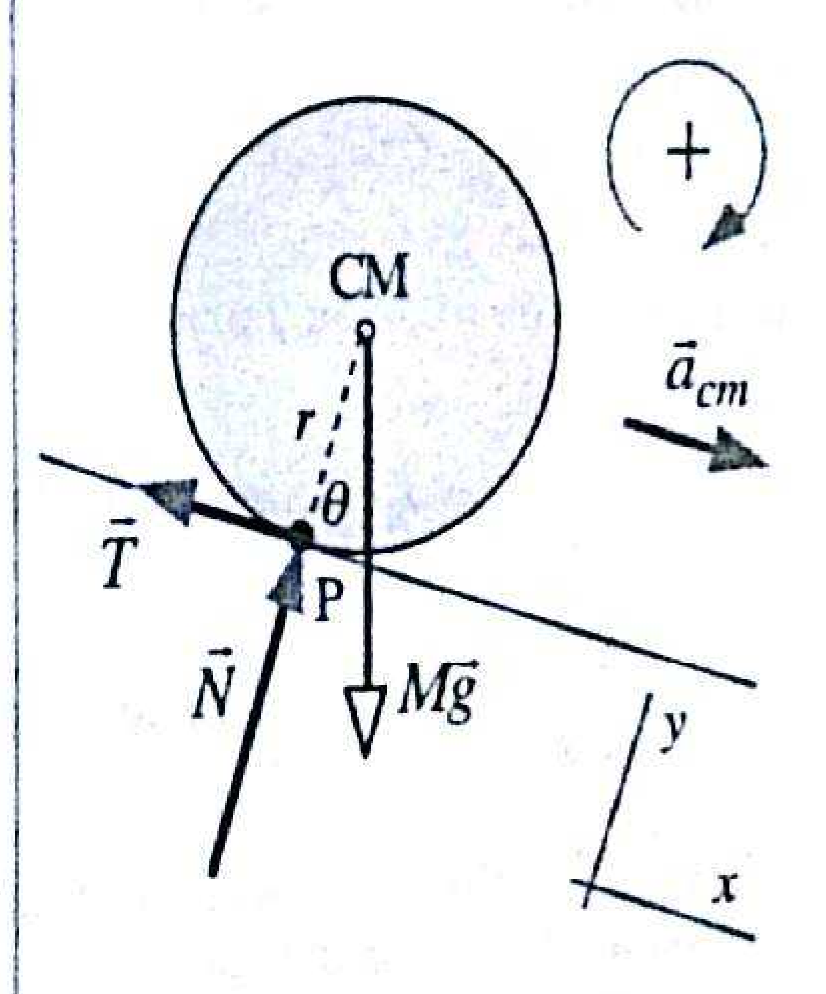
Un rollo de papel de longitud total L está sobre un plano inclinado de ángulo θ.



Un extremo del rollo se sujeta al plano mediante clavos y luego se le deja rodar de modo que pueda desenrollarse a medida que desciende por el plano, ¿cuánto tiempo tardará en desenrollarse completamente?

Solución: Mientras el rollo desciende por el plano, puede considerarse como un cilindro de radio r decreciente. Las fuerzas aplicadas son: el peso $M\vec{g}$, la tensión $\vec{T}$ que ejerce la cinta ya desenvuelta y la normal $\vec{N}$ que ejerce el plano. Analicemos la rotación alrededor del eje P de contacto con el plano. La única fuerza que ejerce torque respecto a este eje es el peso $M\vec{g}$:

$$\tau_P = Mg(rsen\theta)$$



Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia del cilindro de masa M y radio r respecto al eje P es:

$$I_P = I_{cm} + Mr^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

Reemplazando I_P y τ_P en la ecuación de rotación:

$$\sum \tau_P = I_P\alpha \quad \Rightarrow \quad Mgrsen\theta = (\frac{3}{2}Mr^2)\alpha$$

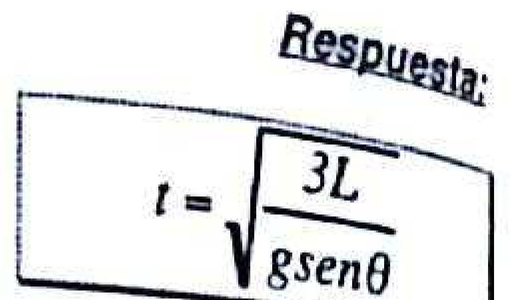
La aceleración del centro de masa del rollo está dada por la condición de rodadura:

$$a_{cm} = \alpha r = (\frac{2}{3}\frac{gsen\theta}{r})r = \frac{2}{3}gsen\theta$$

Como la aceleración es constante (independiente del radio instantáneo r), el tiempo que tarda en desenrollarse es:

$$L = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{3L}{gsen\theta}}$$

Respuesta:



$$t = \sqrt{\frac{3L}{gsen\theta}}$$

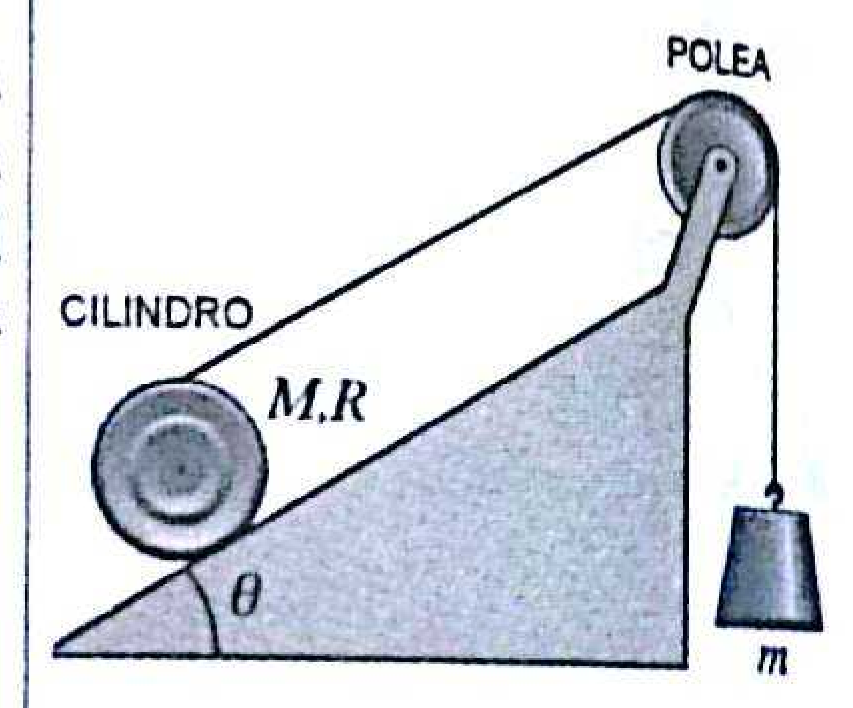
PR-3.28. *Cilindro y pesa acoplados en plano inclinado*

Un cilindro macizo de masa M y radio R tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor. La cinta pasa por una polea ligera sin fricción hasta una pesa de masa m. El cilindro está sobre un plano inclinado a un ángulo θ con la horizontal.

Si el cilindro rueda sin deslizar, halle:

a) La aceleración del centro de masa del cilindro.

b) La tensión de la cuerda.



Solución: a) Supongamos que el movimiento ocurre en forma tal que la pesa baja y el cilindro sube por el plano inclinado. Como la polea es de masa despreciable, la tensión T será la misma a lo largo de toda la cuerda. Las ecuaciones de rotación y traslación del cilindro:

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad F_r R + TR = \frac{MR^2}{2}\frac{a_{cm}}{R}$$

$$\sum F_x = T - F_r - Mgsen\theta = Ma_{cm}$$

Dividiendo entre R la primera relación y sumándola a la segunda relación, se obtiene:

$$T = \frac{3}{4}Ma_{cm} + \frac{1}{2}Mgsen\theta$$

Por otra parte, la ecuación de movimiento de la pesa es:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

La aceleración a de caída de la pesa es igual a la de un punto de la periferia del cilindro y está relacionada con la aceleración lineal del centro de masa de éste, a_{cm}:

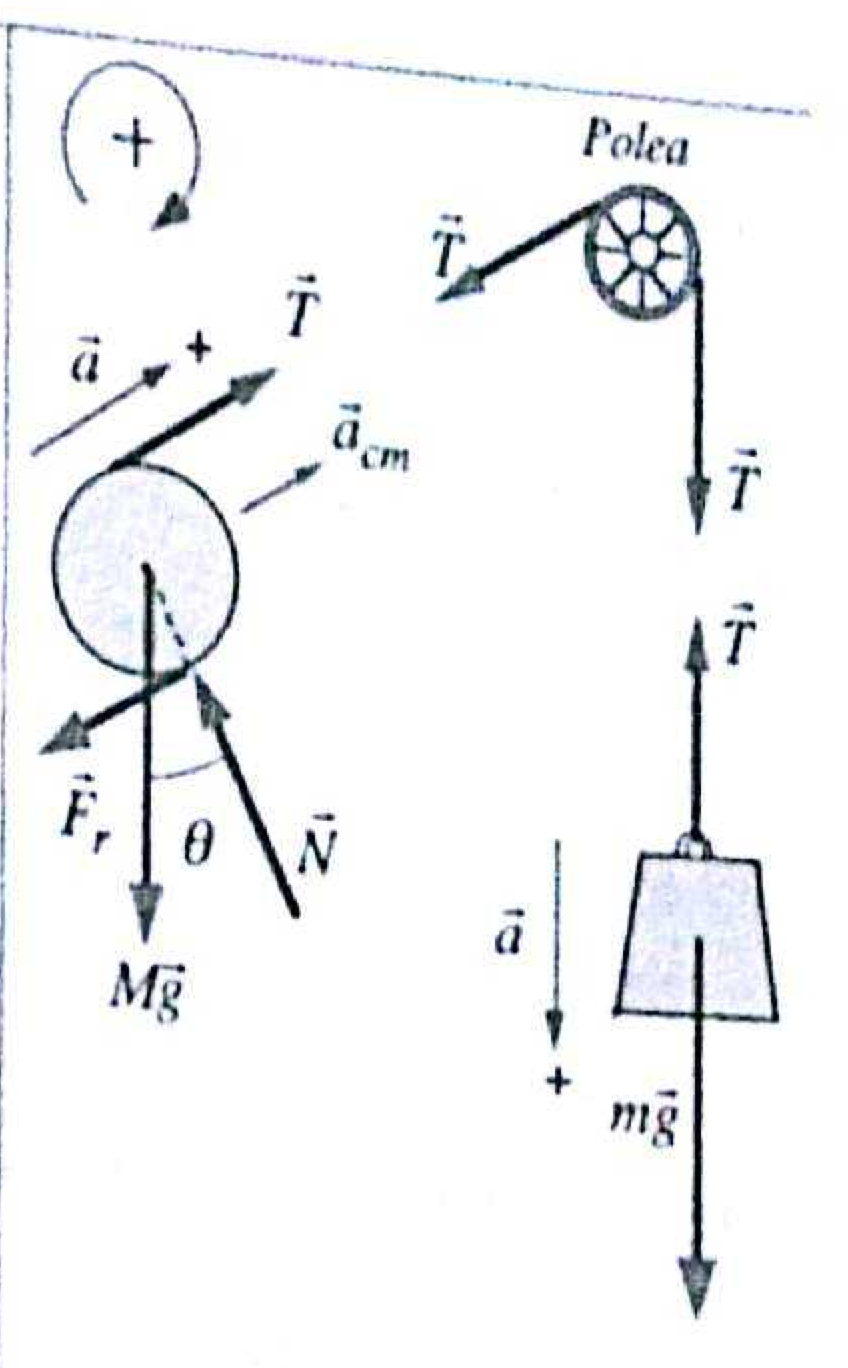
$$a = a_{cm} + \alpha R = a_{cm} + a_{cm} = 2a_{cm}$$

Reemplazando a y T en la ecuación anterior, hallamos:

$$a_{cm} = (\frac{4m - 2Msen\theta}{8m + 3M})g$$

b) Similarmente al reemplazar ésta expresión de a_{cm}, en la de la tensión, encontramos:

$$T = (\frac{3M + 4Msen\theta}{8m + 3M})mg$$



Respuesta:

a) $a_{cm} = (\frac{4m - 2Msen\theta}{8m + 3M})g$

b) $T = (\frac{3M + 4Msen\theta}{8m + 3M})mg$

PR-3.29. *¿Cómo funciona un yo-yo?*

Un yoyo consiste de un disco de madera u otro material cuyo borde tiene una ranura profunda alrededor de la cual se enrolla un cordón que, anudado a un dedo y mediante sacudidas, hace subir y bajar el disco alternativamente.

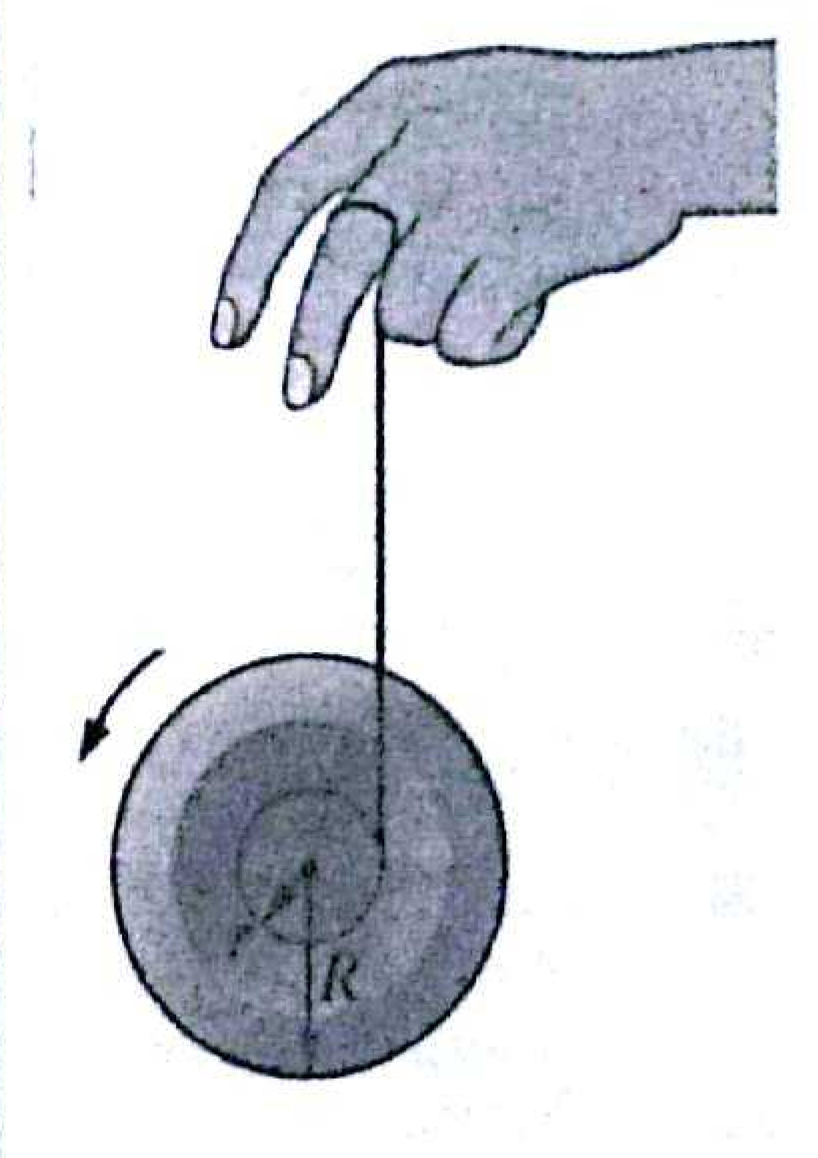
a) ¿Cómo funciona el yo-yo?

Considere un yo-yo formado por dos discos sólidos de radio R y masa combinada M, unidos entre sí por una barra de radio menor, r y masa despreciable. Se enrolla con una cuerda ligera de longitud L y luego se libera estando el extremo de la cuerda fijo. Determine:

b) La aceleración del centro de masa del yo-yo.

c) La tensión de la cuerda en el descenso y el ascenso.

d) El tiempo que tarda en regresar a la mano del jugador.

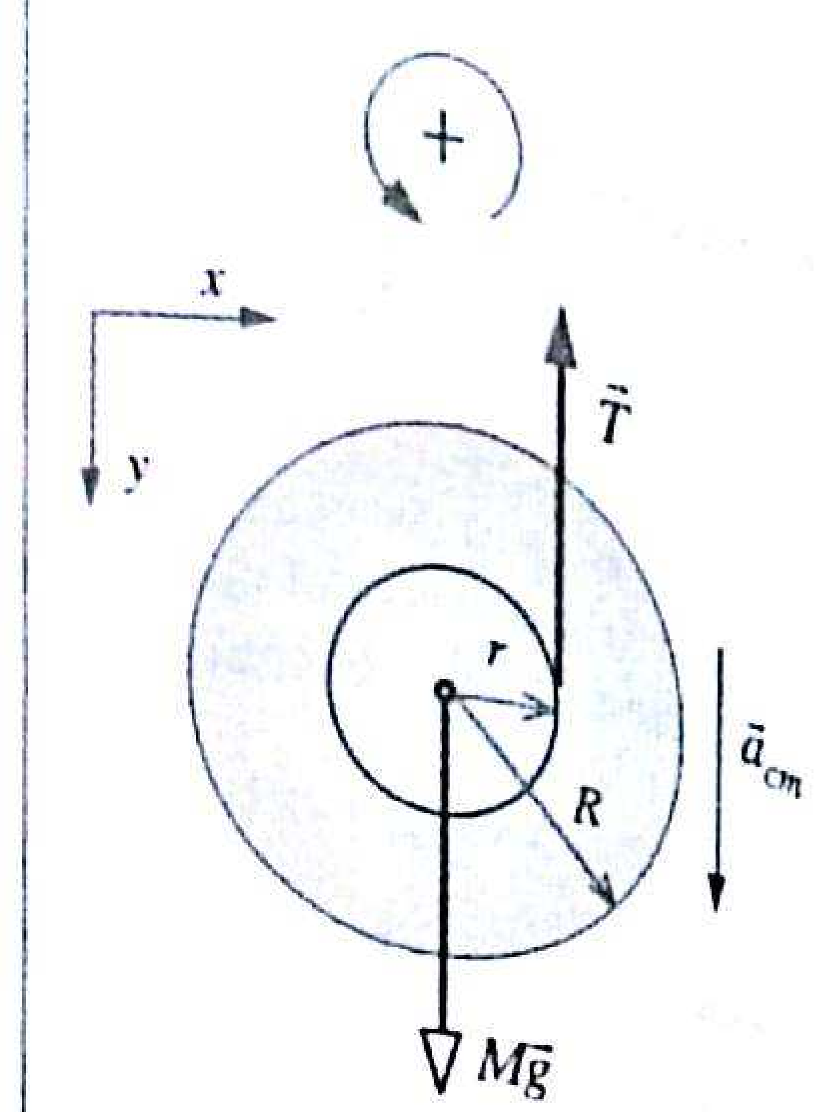


Solución: a) El yo-yo desciende bajo la acción de la gravedad, perdiendo energía potencial y adquiriendo energía cinética de rotación. Al llegar al punto mas bajo, se detiene momentáneamente pero, debido a la energía cinética de rotación el hilo empieza a enrollarse de nuevo, y sube por la cuerda con un movimiento retardado.

b) Como el eje del yo-yo tiene aceleración, debemos aplicar la ecuación de rotación respecto al eje que pasa por el centro de masa:

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad Tr = (\frac{MR^2}{2})(\frac{a_{cm}}{r})$$

$$T = (\frac{MR^2}{2})(\frac{a_{cm}}{r^2})$$



La ecuación de traslación vertical del centro de masa es:

$$\sum F_y = Mg - T = Ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad T = Mg - Ma_{cm}$$

Igualando las dos expresiones encontramos la aceleración:

$$Mg - Ma_{cm} = (\frac{MR^2}{2})(\frac{a_{cm}}{r^2})$$

$$a_{cm} = (\frac{2r^2}{2r^2 + R^2})g$$

La aceleración a_{cm} de subida y de bajadas son iguales.

c) Sustituyendo a_{cm}, hallamos la tensión T:

$$T = Mg - M(\frac{2r^2}{2r^2 + R^2})g = \frac{R^2}{2r^2 + R^2}Mg$$

d) y el tiempo que le toma al yo-yo regresar a la mano es:

$$t = 2\sqrt{\frac{2L}{a_{cm}}} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L(2r^2 + R^2)}{g}}$$

Respuesta:

b) $a_{cm} = (\frac{2r^2}{2r^2 + R^2})g$

c) $T = (\frac{R^2}{2r^2 + R^2})Mg$

d) $t = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L(2r^2 + R^2)}{g}}$

PR-3.30. *Pelota de bowling que desliza antes de rodar*

Se lanza una pelota de masa M y radio R por una pista horizontal con una velocidad inicial, v_o, y sin rotación inicial La pelota desliza durante un cierto tiempo antes de empezar su rodamiento puro.



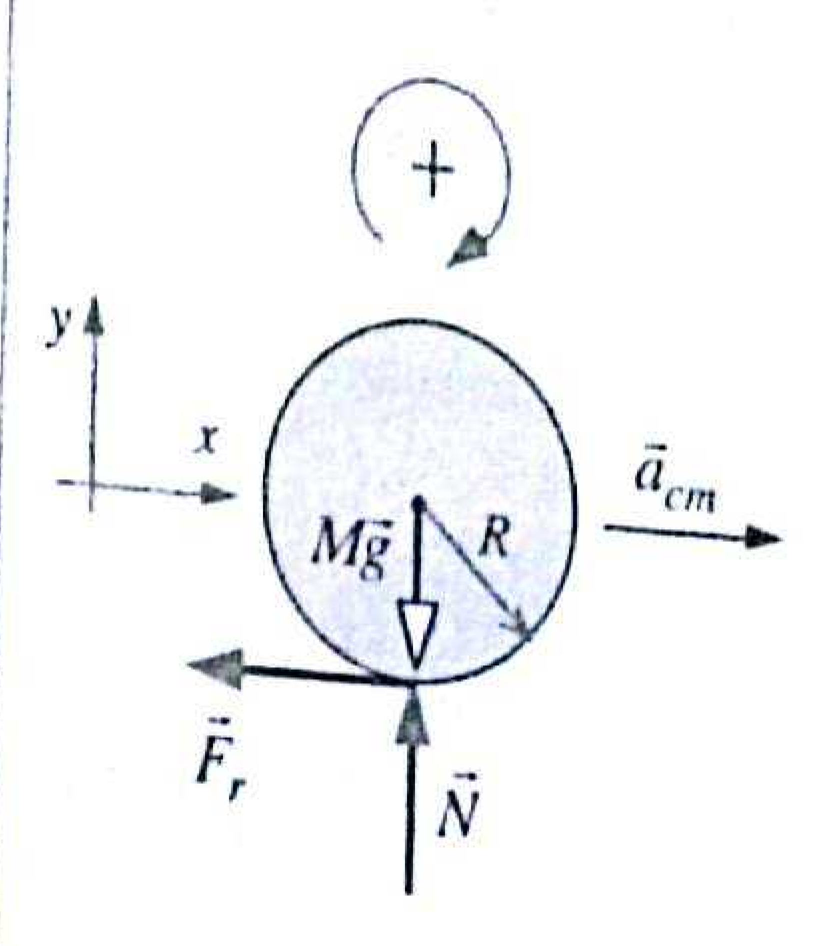
Si el coeficiente de fricción cinética entre la pelota y la superficie es μ_c, determine:

a) El instante t_1 a partir del cual la bola cesa de patinar.

b) La velocidad final del centro de masa de la pelota.

c) La distancia que habrá viajado cuando empieza a rodar.

Solución: a) La fuerza de rozamiento ejercida por el suelo, $F_r = \mu_c N = \mu_c Mg$, reduce la velocidad del centro de masa mientras que el torque que ejerce va incrementando la velocidad angular hasta que se alcanza la condición de rodadura. La aceleración angular es:



$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{F_r R}{2MR^2/5} = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}$$

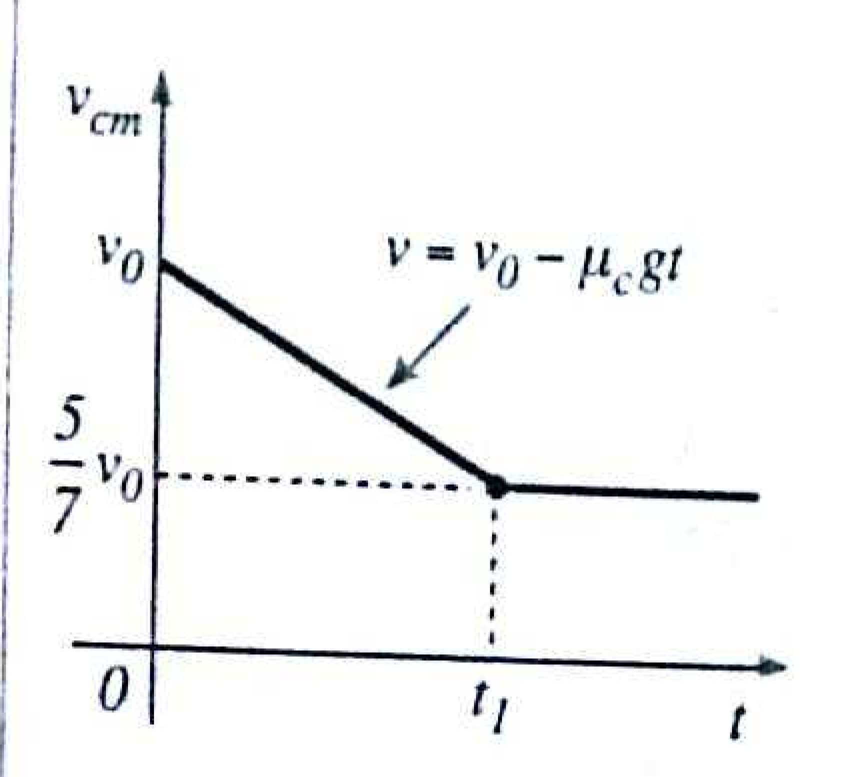
La velocidad angular va aumentando de acuerdo a la relación:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha dt = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t$$

La aceleración (negativa) del centro de masa es:

$$\sum F_x = -F_r = Ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = -\frac{\mu_c Mg}{M} = -\mu_c g$$

La velocidad lineal del centro de masa decrece en el tiempo linealmente:



$$v(t) = v_0 - a_{cm}t = v_0 - \mu_c g t$$

a) La condición de rodamiento puro se alcanza en el instante en que se cumple:

$$v(t_1) = R\omega(t_1)$$

$$v_0 - \mu_c g t_1 = (\frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t_1)R$$

$$t_1 = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}$$

b) La velocidad del centro de masa en ese instante es:

$$v_{cm} = v_0 - \mu_c g(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}) = \frac{5}{7}v_0$$

c) La distancia que habrá recorrido la pelota hasta ese momento es:

$$d = \int_0^{t_1} v dt = v_0 t_1 - \mu_c g\frac{t_1^2}{2}$$

$$d = v_0(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}) - \mu_c g\frac{1}{2}(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g})^2 = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_c g}$$

Respuesta:

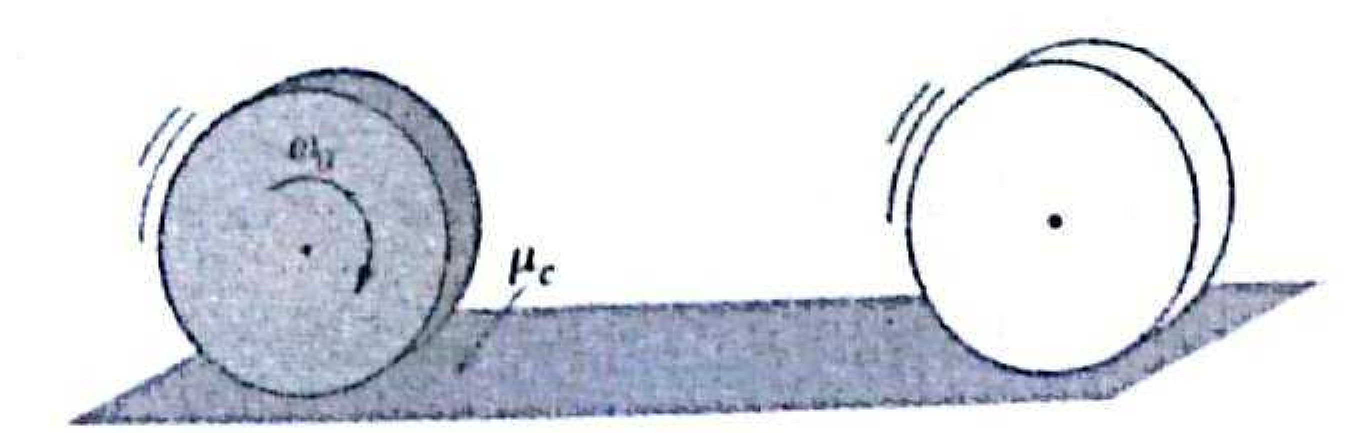
a) $t_1 = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}$

b) $v_{cm} = \frac{5}{7}v_0$

c) $d = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_c g}$

PR-3.31. *Disco girando que se coloca sobre el suelo*

Un disco sólido de masa M y radio R se pone en rotación con una velocidad angular ω_0. El disco se coloca suavemente en contacto con una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción es μ_c, y luego se suelta.



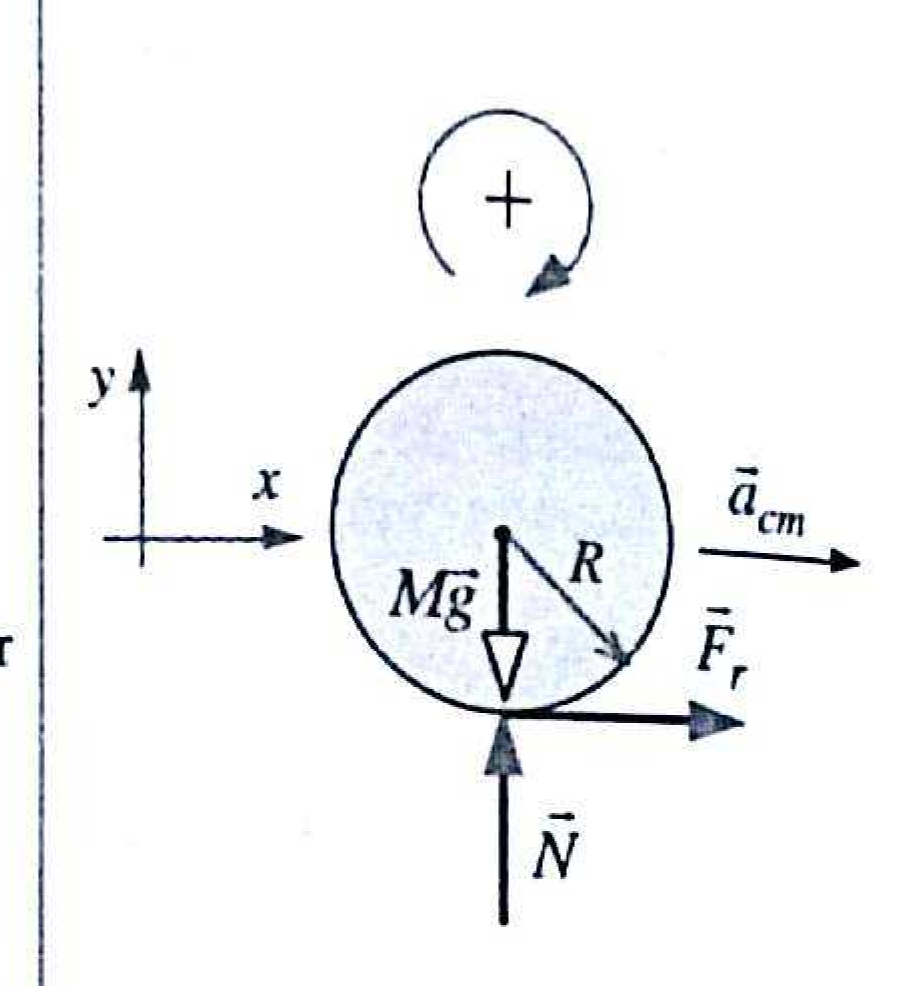
Determine:
a) El tiempo que tarda el disco para empezar el rodamiento puro.
b) La velocidad angular del disco en ese momento.
c) La distancia que habrá recorrido hasta ese momento.
d) La energía perdida en el proceso de deslizamiento.

Solución: a) La fuerza de rozamiento, $F_r = \mu_c N = \mu_c Mg$ hace que el cilindro empuje el piso hacia atrás y el piso empuje al cilindro hacia delante:

$$\sum F_x = F_r = Ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \frac{\mu_c Mg}{M} = \mu_c g$$

La aceleración angular es negativa y su módulo es:

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{F_r R}{1MR^2/2} = 2\frac{\mu_c g}{R}$$



En el transcurso del tiempo la velocidad angular disminuye mientras que la velocidad lineal aumenta:

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - 2\frac{\mu_c g}{R}t$$

$$v(t) = a_{cm}t = (\mu_c g)t$$

La condición de rodamiento puro se alcanza en el instante en que se cumple: $v(t_1) = R\omega(t_1)$, es decir:

$$\mu_c g t_1 = R(\omega_0 - 2\frac{\mu_c g}{R}t_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\omega_0 R}{3\mu_c g}$$

La velocidad angular de rotación en ese instante será:

$$\omega_1 = \omega_0 - 2\frac{\mu_c g}{R}(\frac{\omega_0 R}{3\mu_c g}) = \frac{1}{3}\omega_0$$

c) La distancia que habrá recorrido el cilindro en ese instante es:

$$d = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 = \frac{1}{2}(\mu_c g)(\frac{\omega_0 R}{3\mu_c g})^2 = \frac{1}{18}\frac{\omega_0^2 R^2}{\mu_c g}$$

d) Las energías cinéticas inicial y final son, respectivamente:

$$K_0 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{\omega_0}{3})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{\omega_0}{3}R)^2$$

$$K_1 = \frac{1}{12}MR^2\omega_0^2$$

La pérdida de energía cinética es:

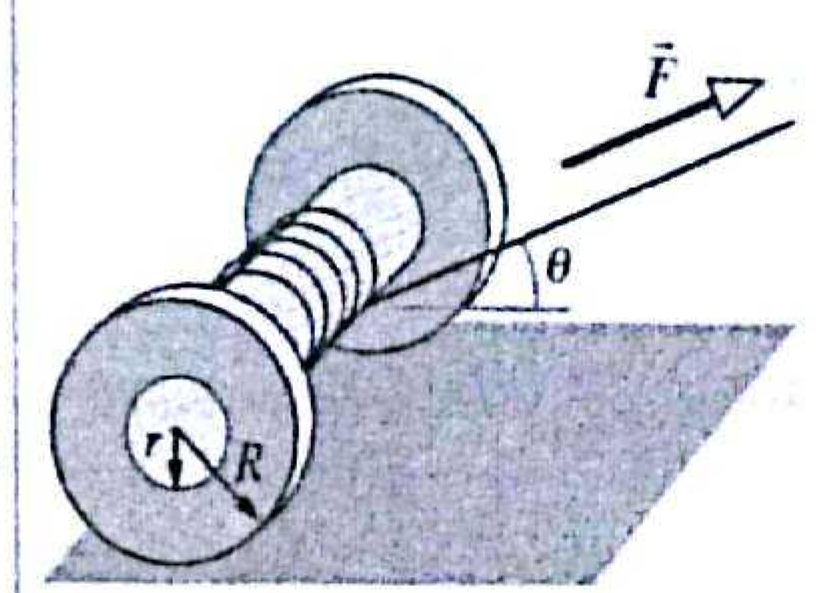
$$\Delta K = K_1 - K_0 = -\frac{1}{6}MR^2\omega_0^2 = -\frac{2}{3}K_0$$

Respuesta:

a) $t_1 = \frac{\omega_0 R}{3\mu_c g}$
b) $\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_0$
c) $d = \frac{1}{18}\frac{\omega_0^2 R^2}{\mu_c g}$
d) $\Delta K = -\frac{1}{6}MR^2\omega_0^2$
Se pierden dos tercios de la energía inicial.

PR-3.32. *¿Hacia qué lado se moverá el carrete?*

Un carrete está constituido por dos discos cilíndricos de radio R montados en los extremos de un cilindro central de radio r. El momento de inercia del carrete respecto de su eje central es I_{cm}. El carrete está sobre una superficie horizontal con una cuerda enrollada de forma tal que emerge por debajo del cilindro. Se jala por la cuerda con una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con la horizontal, sin que el carrete deslice.
a) Determine la aceleración del carrete.
b) ¿Hacia dónde se moverá el carrete?



Solución: a) Las ecuaciones para la traslación del centro de masa y la rotación en torno al centro de masa son:

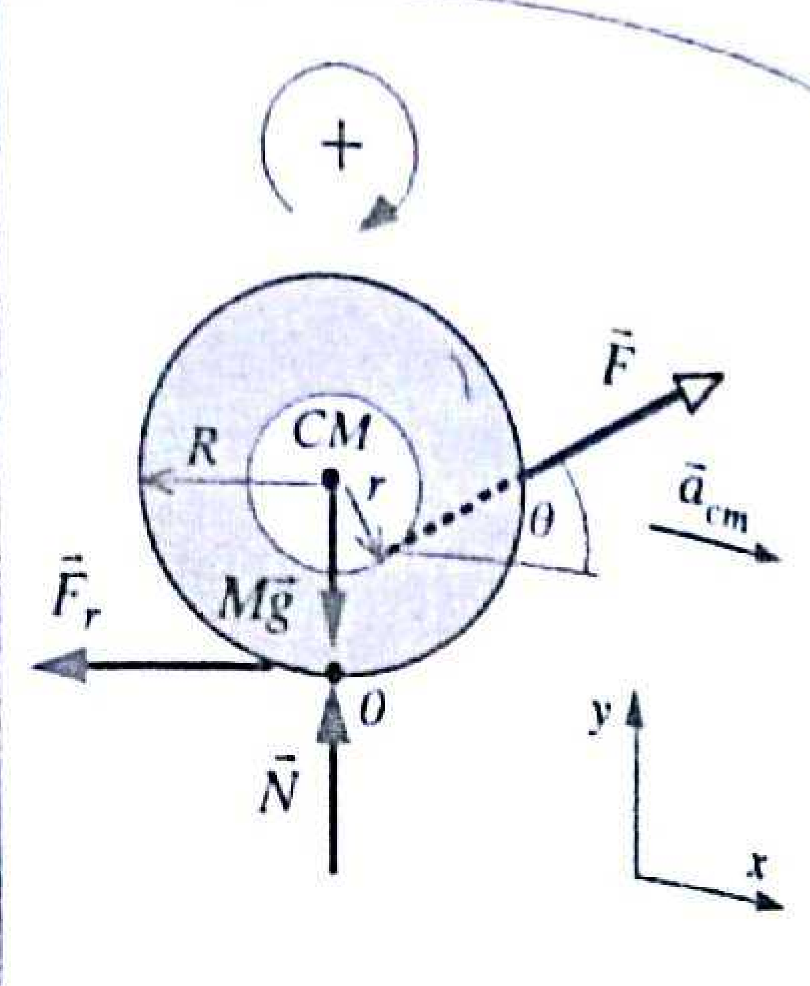
$$\sum F_x = F\cos\theta - F_r = Ma_{cm}$$

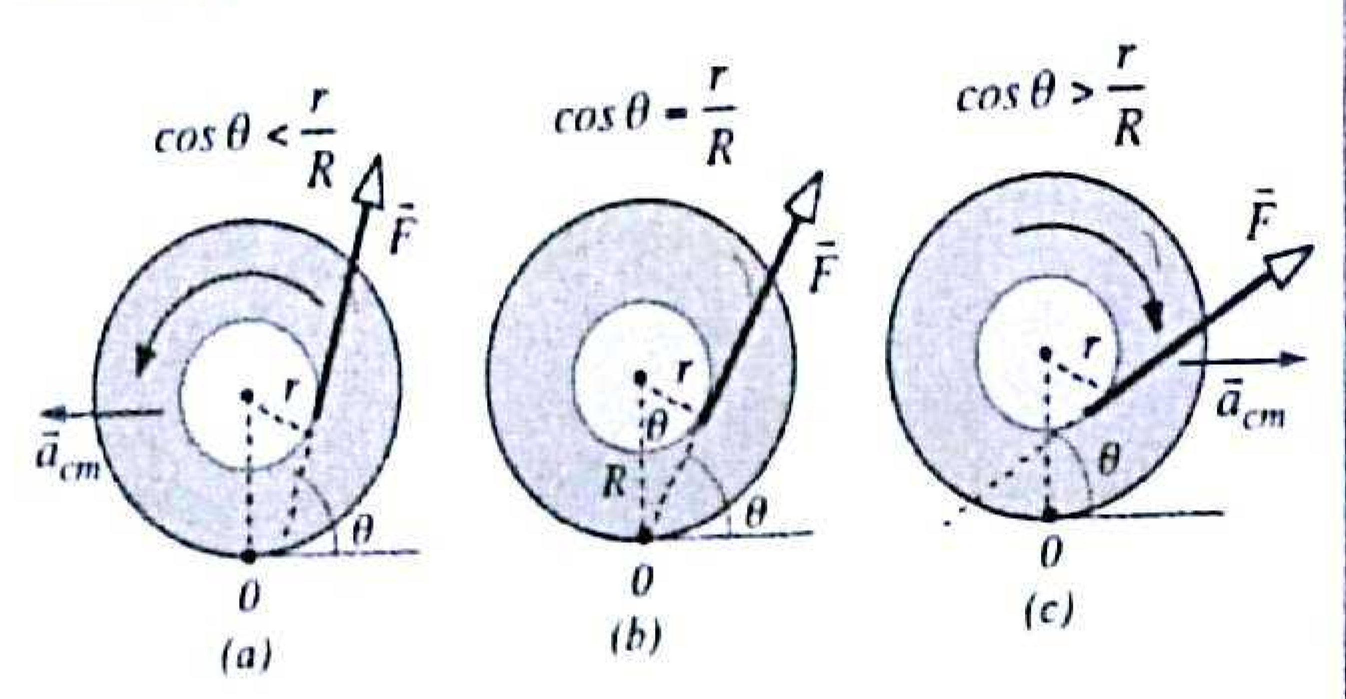
$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \quad F_r R - Fr = I_{cm}\frac{a_{cm}}{R}$$

Si despejamos F_r de esta última ecuación y lo sustituimos en la primera, obtenemos la aceleración del centro de masa del carrete en función del ángulo θ de orientación de la cuerda:

$$a_{cm} = \frac{F}{M}\left(\frac{\cos\theta - r/R}{1 + I_{cm}/MR^2}\right)$$

b) El signo del numerador de esta expresión determina cuál sería el sentido de la aceleración del carrete. Así por ejemplo, si $\cos\theta = r/R$, entonces $a_{cm} = 0$. Esto sucede cuando la línea de acción de la tensión de la cuerda pasa por el punto O de contacto con el piso (Fig. b), ya que el torque respecto a ese punto de $\vec{F}$ (y de las demás fuerzas) es cero y por lo tanto el carrete no debe rotar.





Si la línea de acción de $\vec{F}$ pasa a la derecha del punto O, el carrete rodará a la izquierda y la cuerda se desenrollará (Fig. a). Por otra parte, si la línea de acción pasa a la izquierda del punto O, el carrete rodará a la derecha y la cuerda se enrollará (Fig. c).

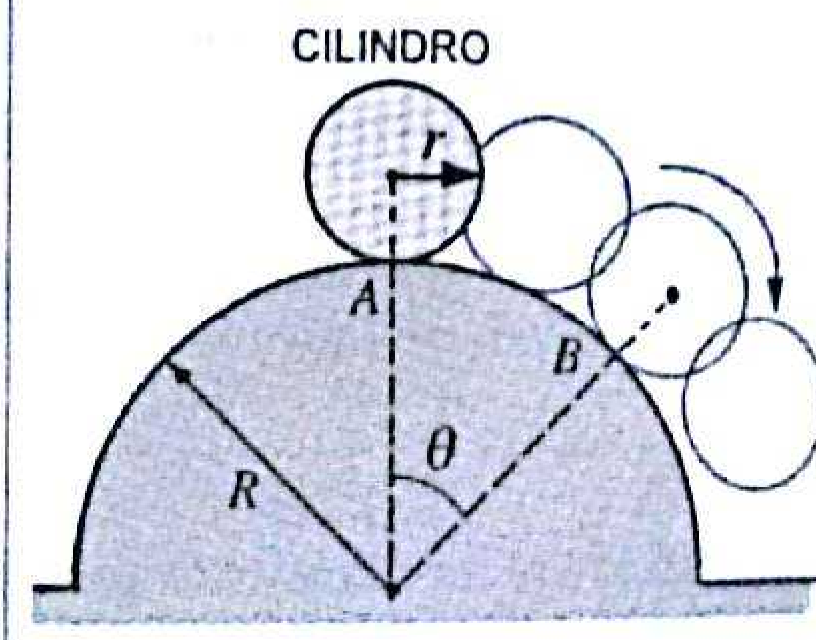
Respuesta:

a) $a_{cm} = \frac{F}{M}\left(\frac{\cos\theta - r/R}{1 + I_{cm}/MR^2}\right)$

b) Si $\cos\theta > r/R$, el carrete rueda hacia adelante.
Si $\cos\theta < r/R$, el carrete rueda hacia atrás.
Si $\cos\theta = r/R$, no se mueve.

PR-3.33. *¿Dónde se desprenderá el cilindro?*

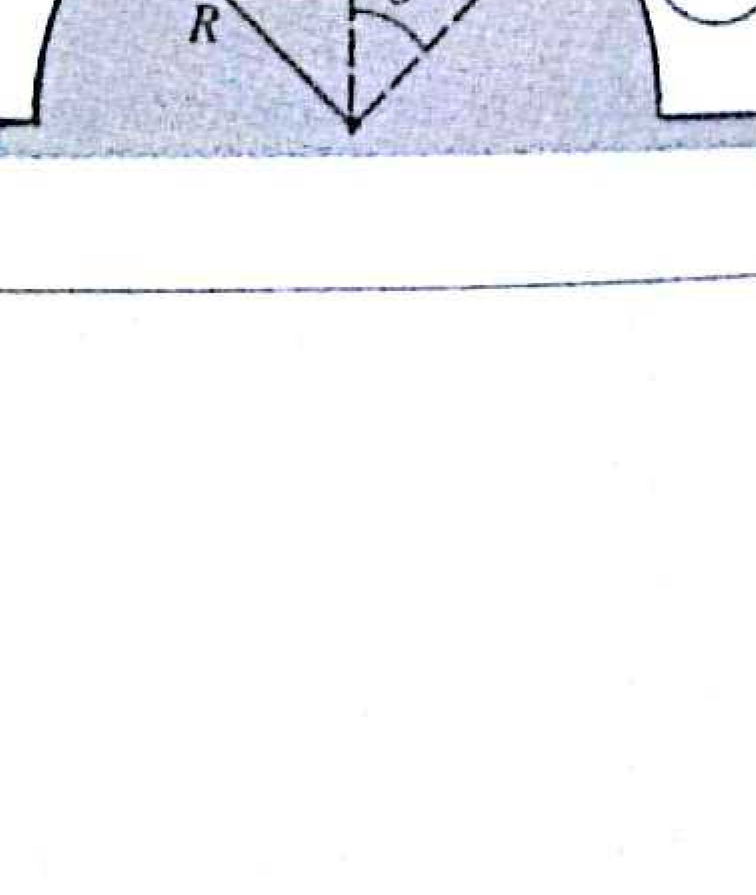
Un cilindro sólido homogéneo de radio r se coloca, en una posición de equilibrio inestable, en la cima de una superficie cilíndrica de radio R que es suficiente rugosa para evitar deslizamiento. El cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar. ¿Cuál será la posición angular, θ, donde el cilindro pierde contacto con la superficie?



Solución: Aplicando la conservación de la energía entre las posiciones A y B del cilindro, escribimos:

$$mg(R+r) - mg(R+r)\cos\theta = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

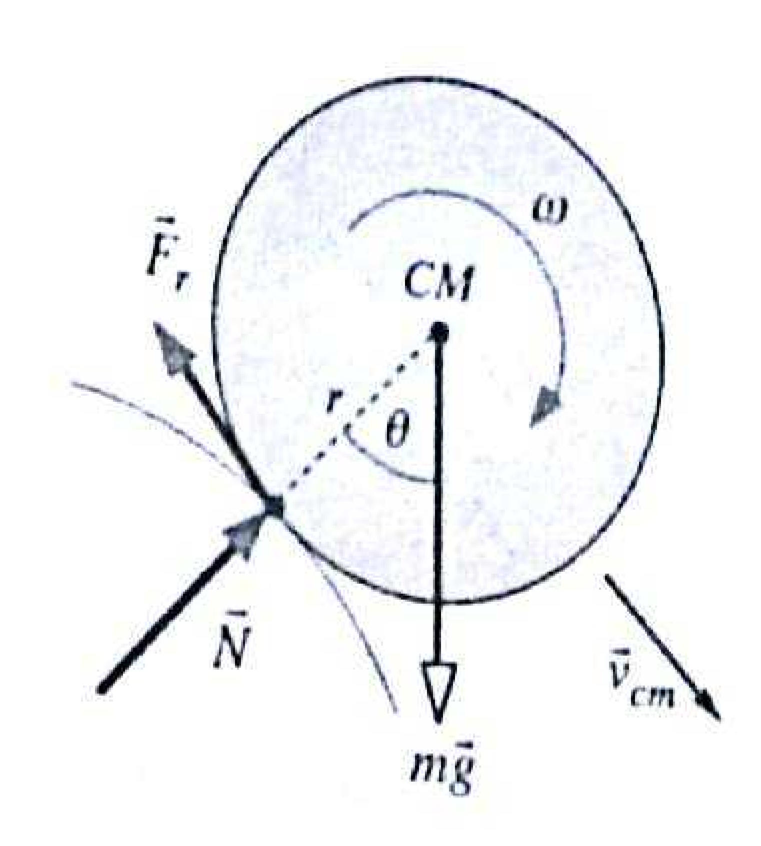
Si sustituimos: $I_{cm} = Mr^2/2$ y aplicamos la condición de rodadura sin deslizamiento: $\omega = v_{cm}/r$, se obtiene:



$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3}(R+r)(1-\cos\theta)g$$

Aplicamos ahora la segunda ley de Newton en la dirección normal a la superficie de contacto:

$$\sum F_n = mg\cos\theta - N = m\left(\frac{v_{cm}^2}{R+r}\right)$$



Sustituyendo v_{cm}^2 en esta expresión, hallamos la fuerza de contacto normal:

$$N = mg\cos\theta - \left(\frac{m}{R+r}\right)\frac{4}{3}(R+r)(1-\cos\theta)g$$

Para que el cilindro pierda contacto se debe cumplir la condición $N = 0$. Luego el ángulo buscado es:

$$\cos\theta = \frac{4}{3}(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4}{7} \qquad \theta = 55.2°$$

Respuesta

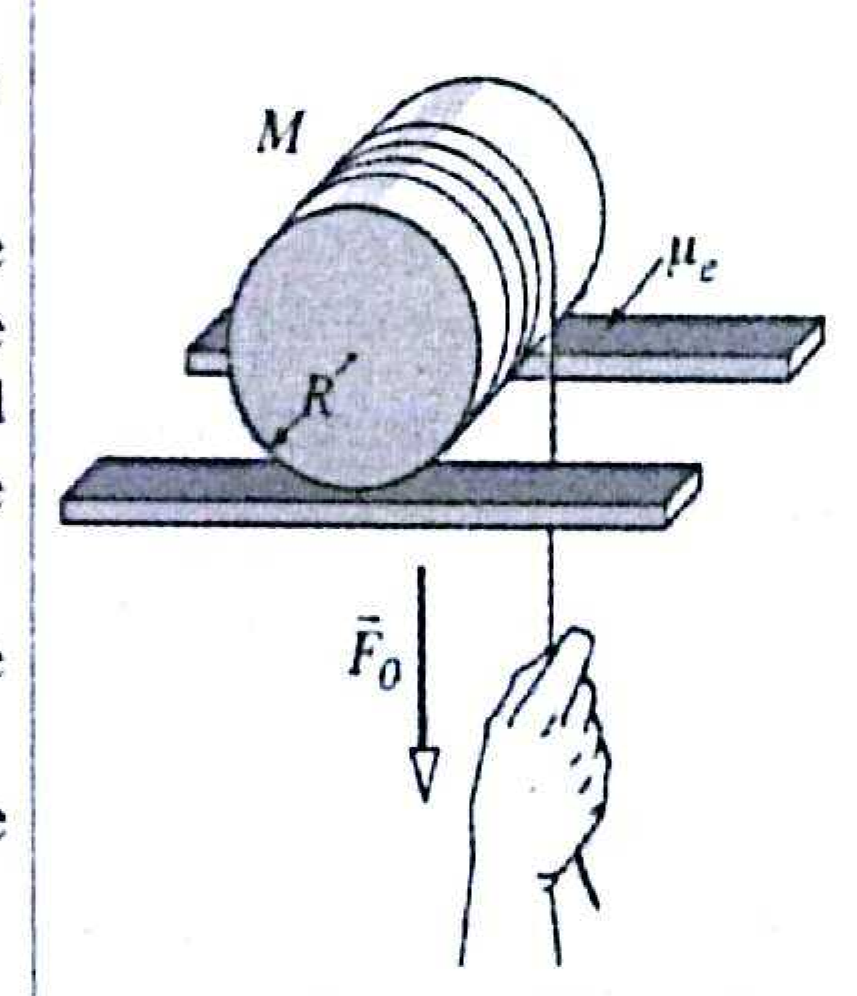
$\theta = \arccos(4/7) = 55.2°$

PR-3.34. *Fuerza vertical para un movimiento horizontal*

Un cilindro sólido de masa M y radio R descansa sobre dos tablas horizontales paralelas. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y las tablas es μ_e. El cilindro tiene enrollado una cuerda mediante la cual se aplica una fuerza $\vec{F}_0$ dirigida verticalmente hacia abajo.

a) ¿Cuál es el módulo de la fuerza máxima que se puede aplicar para que el cilindro ruede sin deslizar?

b) ¿Cuál es la aceleración horizontal del cilindro para este valor de $\vec{F}_0$?



Solución: La ecuación de rotación en torno al centro de masa es:

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{F_0R - F_rR}{MR^2/2} = \frac{2}{MR}(F_0 - F_r)$$

Aplicando la condición de rodadura sin deslizamiento:

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{MR}(F_0 - F_r) \quad \Rightarrow \quad F_r = F_0 - \frac{1}{2}Ma_{cm}$$

La ecuación de traslación horizontal es:

$$\sum F_x = F_r = Ma_{cm}$$

Igualando las dos expresiones de F_r:

$$F_0 - \frac{1}{2}Ma_{cm} = Ma_{cm}$$

$$F_0 = \frac{3}{2}Ma_{cm} = \frac{3}{2}F_r$$

Para que no haya deslizamiento, la fuerza de rozamiento no puede exceder el valor máximo: $F_r \le \mu_e N$ y la fuerza normal N está determinada por la ecuación de traslación vertical:

$$\sum F_y = N - Mg - F_0 = 0$$

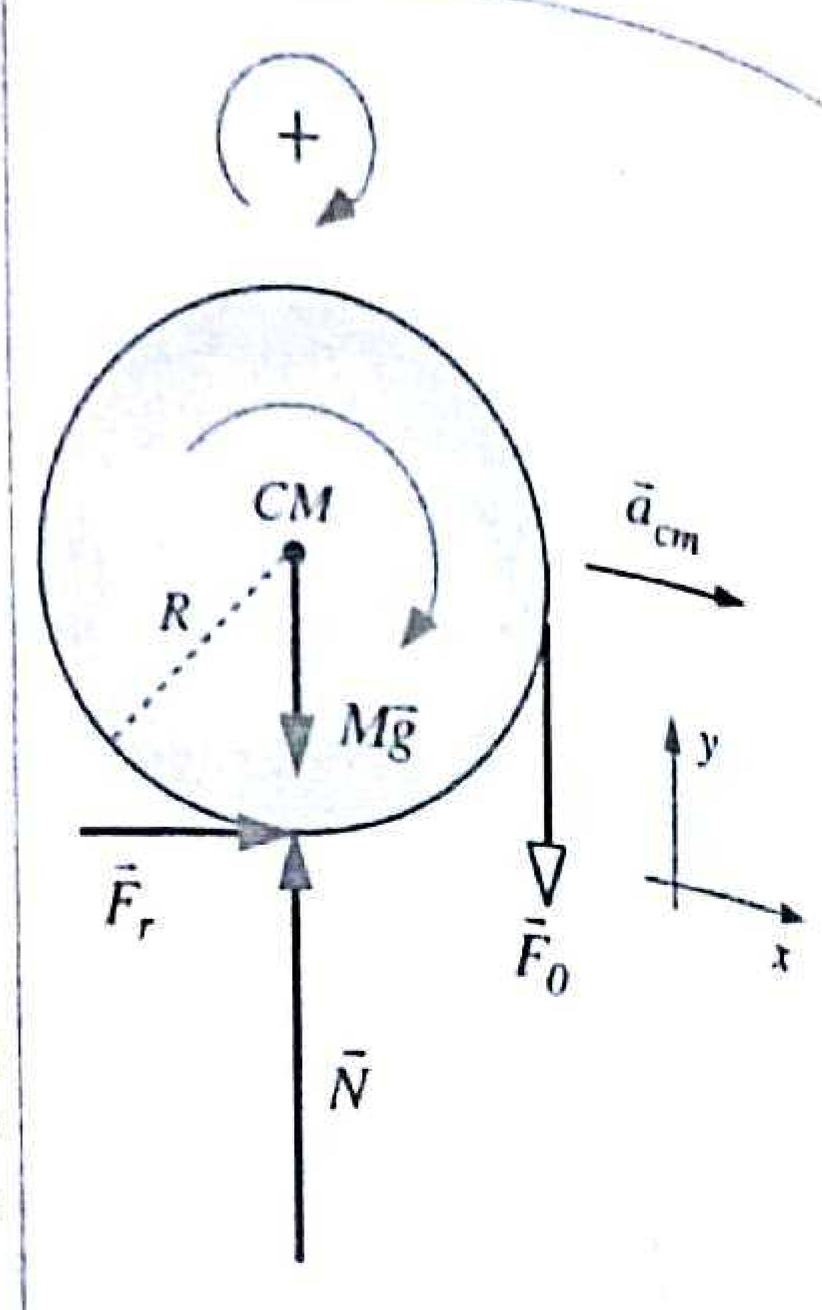
$$F_r \le \mu_e N = \mu_e(Mg + F_0)$$

Por lo tanto, el valor máximo de F_0 será:

$$\frac{2}{3}F_0 \le \mu_e(Mg + F_0) \quad \Rightarrow \quad F_0 \le (\frac{3\mu_e}{2-3\mu_e})Mg$$

b) Para este valor de F_0, la aceleración del centro de masa es:

$$a_{cm} = \frac{2}{3M}(\frac{3\mu_e}{2-3\mu_e})Mg = (\frac{2\mu_e}{2-3\mu_e})g$$



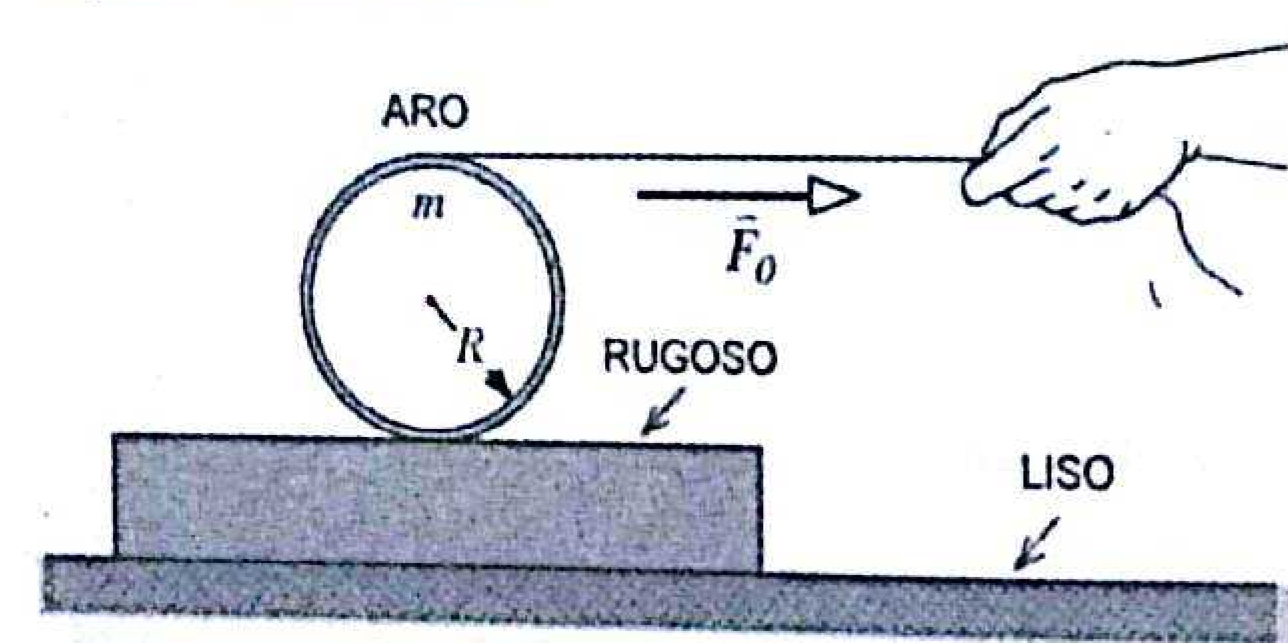
Respuesta:

a) $F_0 \le (\frac{3\mu_e}{2-3\mu_e})Mg$

b) $a_{cm} = (\frac{2\mu_e}{2-3\mu_e})g$

PR-3.35. *Resulta imposible mover ese bloque*

Un aro de pared delgada, de masa m y radio R está sobre un bloque de masa M, el cual a su vez se encuentra sobre un plano horizontal liso.



Mediante una cuerda enrollada al aro, se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}_0$, hacia la derecha. Si la superficie de contacto entre el bloque y el aro es lo suficiente rugosa para que no haya deslizamiento, determine las aceleraciones del aro y del bloque.

Solución: Supongamos que al aplicar la fuerza $\vec{F}_0$, el aro se mueve hacia la derecha con aceleración a_{cm} y el bloque hacia la izquierda con aceleración a_b. Las ecuaciones de movimiento del aro son:

$$\sum F_x = F_0 + F_r = ma_{cm} \qquad (1)$$

$$\sum \tau_{cm} = RF_0 - RF_r = I_{cm}\alpha \qquad (2)$$

El momento de inercia del aro es $I_{cm} = MR^2$ y la condición de rodamiento es:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{a_{cm} + a_b}{R}$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$2F_0 = \frac{I_{cm}}{R^2}(a_{cm} + a_b) + ma_{cm} = (M+m)a_{cm} + Ma_b$$

Sustituyendo en esta expresión la aceleración del bloque:

$$a_b = \frac{F_r}{M} = \frac{ma_{cm} - F_0}{M}$$

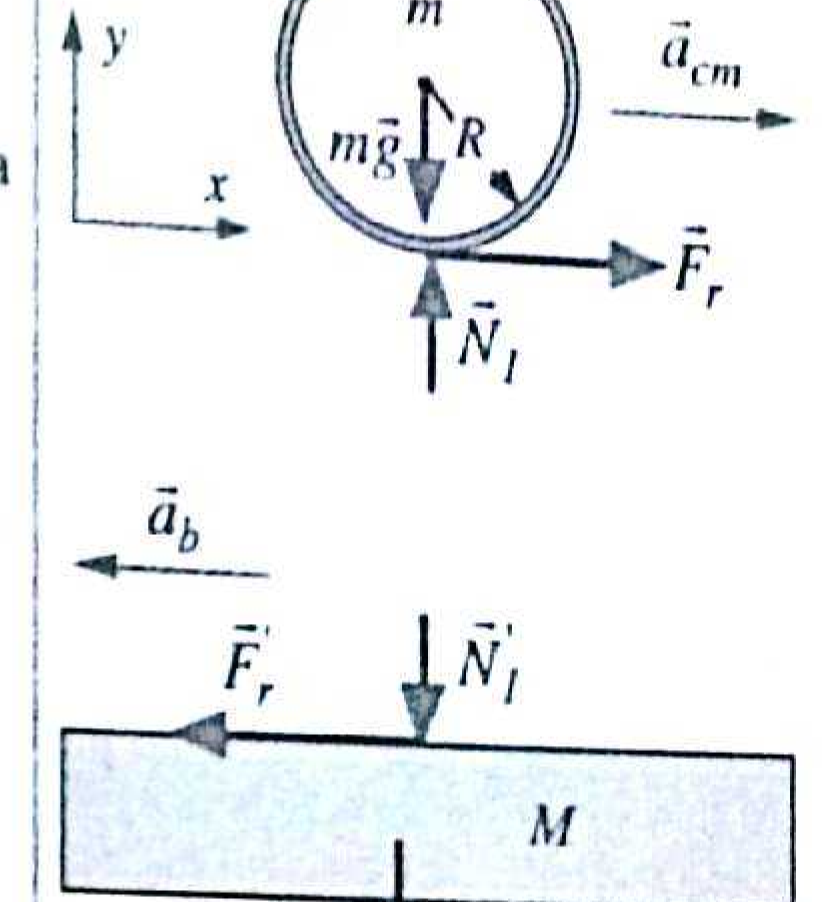
Encontramos así la aceleración del aro:

$$a_{cm} = F_0 / m$$

Usando esta expresión, la aceleración del bloque es:

$$a_b = \frac{F_r}{M} = \frac{ma_{cm} - F_0}{M} = \frac{F_0 - F_0}{M} = 0$$

Concluimos que el bloque no se mueve y el aro rueda sobre el bloque como si se estuviera suspendido en el aire.

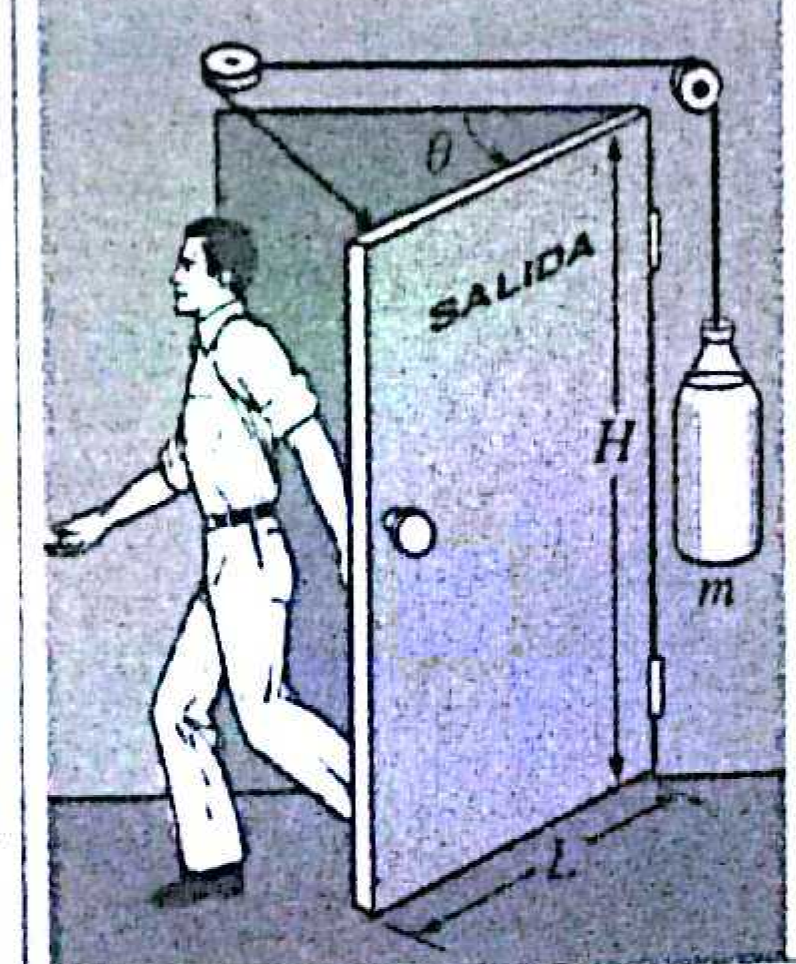


Respuesta:

Aro: $a_{cm} = F_0 / m$
Bloque: $a_b = 0$
El bloque no se mueve

PR-3.36. *Un mecanismo sencillo y barato*

En la sala de cine del pueblo se instaló un mecanismo sencillo y barato para hacer que la puerta de salida se cierre automáticamente cada vez que la dejan abierta. Al extremo superior de la puerta se amarra un hilo que pasa por dos pequeñas poleas fijas a la pared y de fricción despreciable. Del otro extremo del hilo se suspende una botella con agua y masa total m. La puerta es de ancho L, altura H y masa M. ¿Si la puerta se abre hasta un ángulo $\theta = 90°$ y luego se libera, cuál será la velocidad de la botella en el momento en que la puerta queda cerrada?



Solución: Aplicamos la ley de conservación de la energía en los instantes en que la puerta está abierta perpendicular a la pared, y luego justo antes de cerrarse. Suponiendo que las bisagras no ofrecen rozamiento, la pérdida de energía potencial de la botella se traduce en energía cinética de traslación de la botella y de rotación de la puerta:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

El valor de I_0 se obtiene considerando la puerta como una serie de barras de masa m_i y longitud L, que giran alrededor del extremo ubicado en el eje de las bisagras y cuyo momento de inercia es conocido: $I_i = m_iL^2/3$. El momento de inercia total de la puerta rectangular será la suma de los momentos de inercia de todas las barras:

$$I_0 = \frac{1}{3}m_1L^2 + \frac{1}{3}m_2L^2 + ... = \frac{1}{3}(\sum_i m_i)L^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

El descenso Δh de la botella es justamente la longitud de hilo que se desliza por las poleas durante la rotación de la puerta: $\Delta h = \sqrt{2}L$. Además, como la cuerda no se estira, la velocidad de la botella es igual a la velocidad del borde de la puerta que gira: $v_b = \omega L$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la energía, hallamos:

$$\sqrt{2}Lmg = \frac{1}{2}m(\omega L)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\omega^2$$

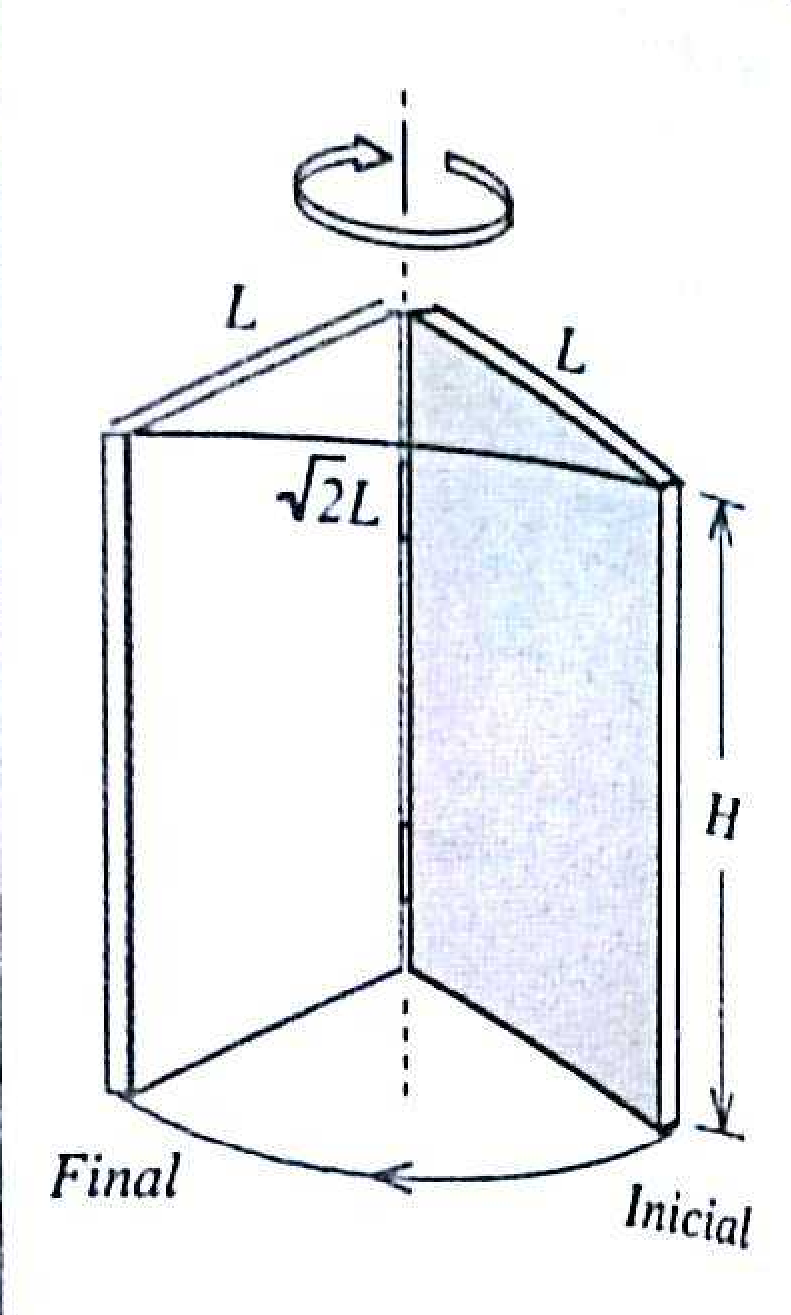
$$\sqrt{2}mg = \frac{1}{2}L\omega^2(m + \frac{1}{3}M)$$

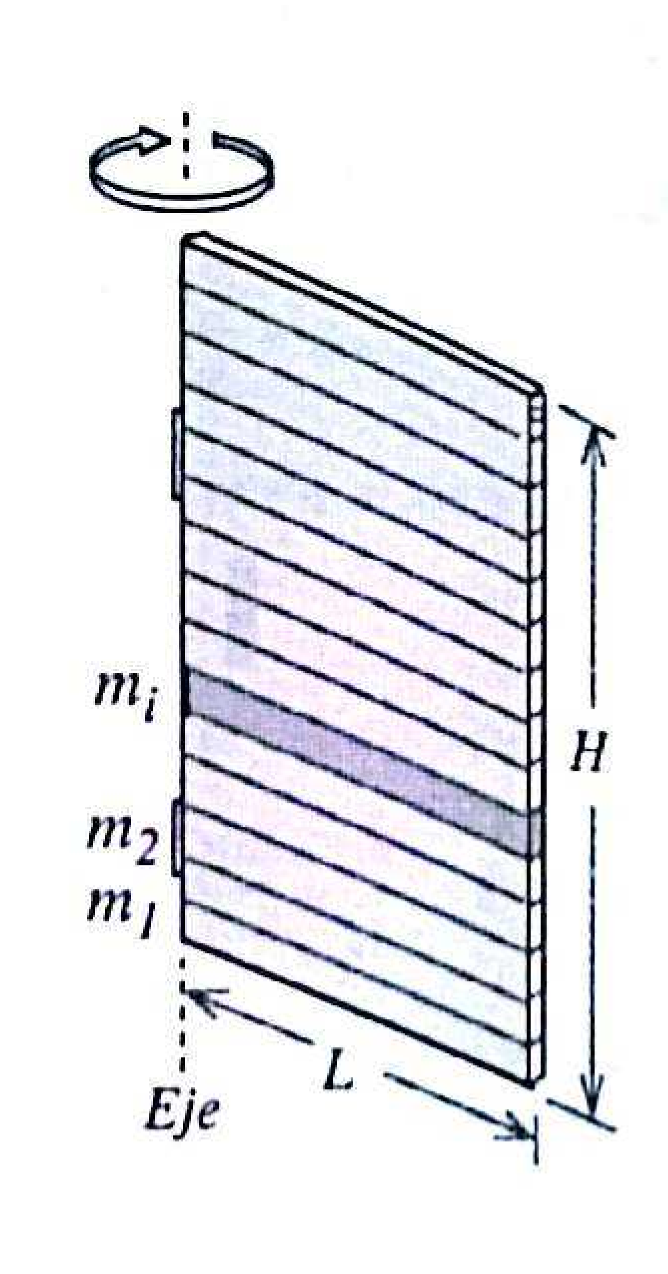
Despejando, obtenemos la velocidad angular de rotación que tiene la puerta justo en el momento en que se cierra la puerta:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}mg}{L(m+\frac{1}{3}M)}}$$

Por lo tanto la velocidad de la botella en ese instante será:

$$v_b = \omega L = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}mgL}{(m+\frac{1}{3}M)}}$$



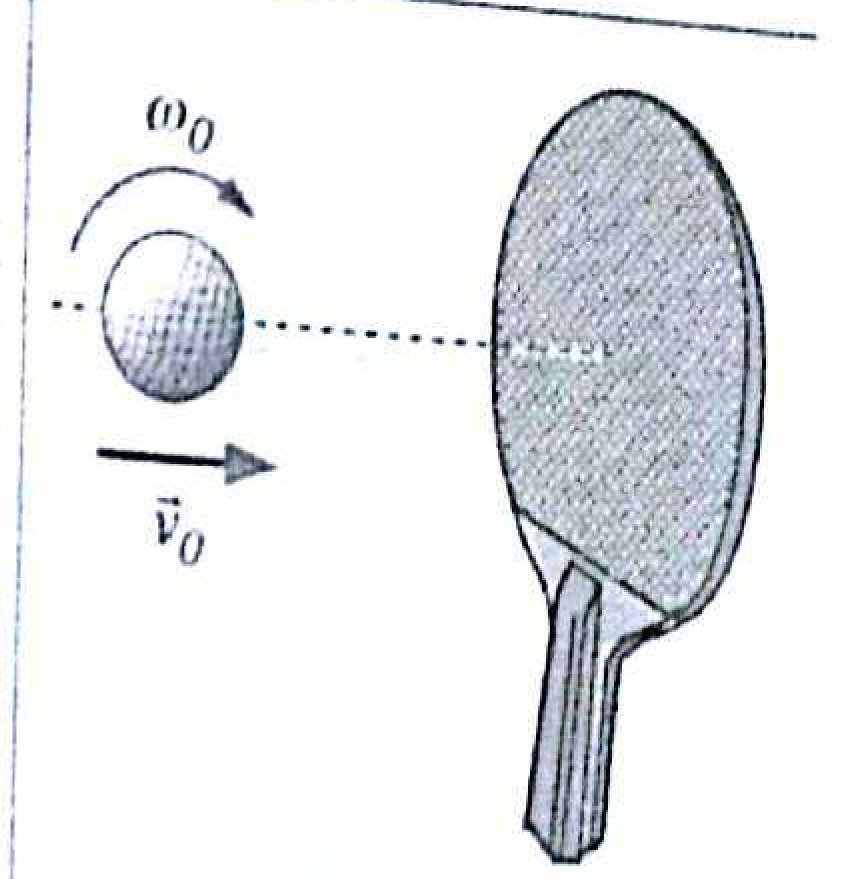


Respuesta:

$$v_b = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}mgL}{(m+\frac{1}{3}M)}}$$

PR-3.37. *Rebote oblicuo de una pelota de ping-pong*

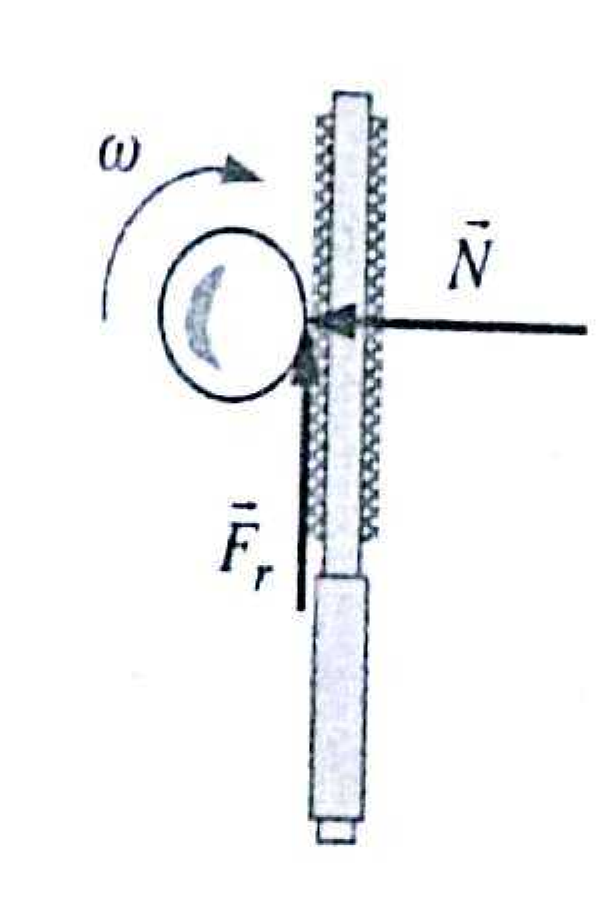
Una pelota de ping-pong, de radio r posee una velocidad horizontal $\vec{v}_0$ y una rapidez angular ω_0, cuando se aproxima a una raqueta que está sostenida en forma rígida verticalmente. La pelota choca con la raqueta de tal forma que no ocurre deslizamiento ni tampoco pérdida de energía. Determine la velocidad (magnitud y dirección) de la pelota al abandonar la raqueta.



Solución: La fuerza de contacto que ejerce la raqueta sobre la pelota consiste de dos componentes: La fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento estático, $\vec{F}_r$. Durante el breve contacto, la pelota no desliza y $\vec{F}_r$ no realiza trabajo, su efecto es disminuir la velocidad de rotación y acelerar su centro de masa hacia arriba. El choque es elástico y se conserva la energía cinética total, $K_0 = K_f$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

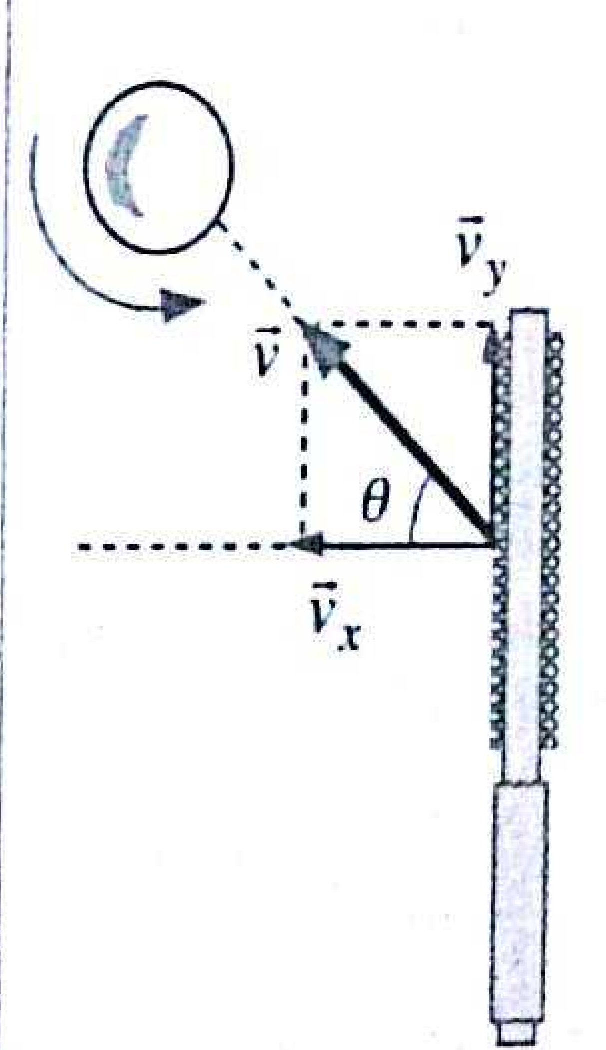
$$mv_0^2 + I_{cm}\omega_0^2 = m(v_x^2 + v_y^2) + I_{cm}\omega^2$$



El movimiento de la pelota en la dirección x corresponde a un choque elástico con un cuerpo masivo: $v_x = -v_0$.

$$mv_0^2 + I_{cm}\omega_0^2 = m(-v_0)^2 + mv_y^2 + I_{cm}\omega^2$$

$$I_{cm}\omega_0^2 = mv_y^2 + I_{cm}\omega^2$$



El momento de inercia de la pelota, considerada como una esfera hueca, es: $I_{cm} = 2mr^2/3$. Tomando en cuenta que la pelota no resbala, se cumple la relación $v_y = \omega r$:

$$(\frac{2}{3}mr^2)\omega_0^2 = mv_y^2 + (\frac{2}{3}mr^2)(\frac{v_y}{r})^2$$

Despejando, obtenemos la velocidad vertical:

$$v_y = \sqrt{\frac{2}{5}}\omega_0 r$$

Por lo tanto, el módulo de la velocidad final es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{5}\omega_0^2 r^2}$$

El ángulo que forma con la horizontal es:

$$\theta = arctg(\frac{v_y}{v_x}) = arctg(\frac{\sqrt{2/5}\omega_0 r}{v_0})$$

Respuesta:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{5}\omega_0^2 r^2}$$

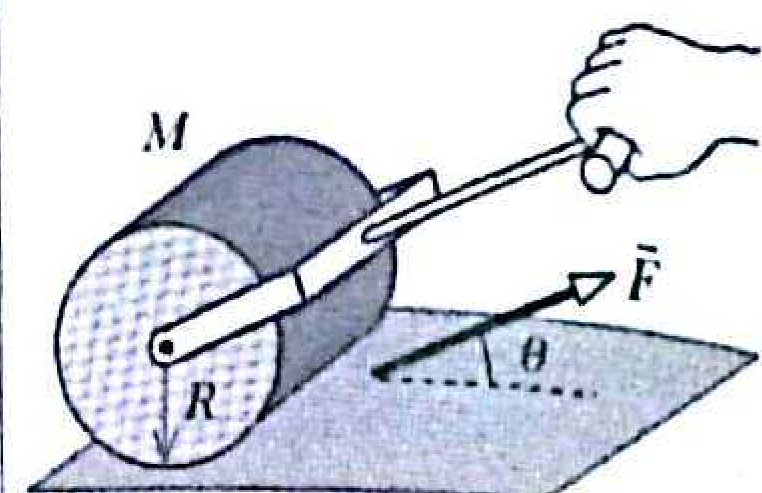
$$\theta = arctg(\frac{\sqrt{2/5}\omega_0 r}{v_0})$$

PR-3.38. *Pasando el rodillo sin que resbale*

A un rodillo que tiene la forma de un cilindro sólido uniforme de radio R y masa M, se aplica sobre su eje una fuerza $\vec{F}$ constante, a un ángulo θ con la horizontal. El rodillo rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción estática es μ_e.

a) Determine la aceleración del centro de masa del rodillo.

b) ¿Cuál será la máxima fuerza que se puede aplicar sin que el rodillo resbale?



Solución: a) Aplicamos la segunda ley de Newton para la rotación del cilindro respecto a su centro de masa:

$$\sum \tau_{cm} = F_r R = I_{cm}\alpha$$

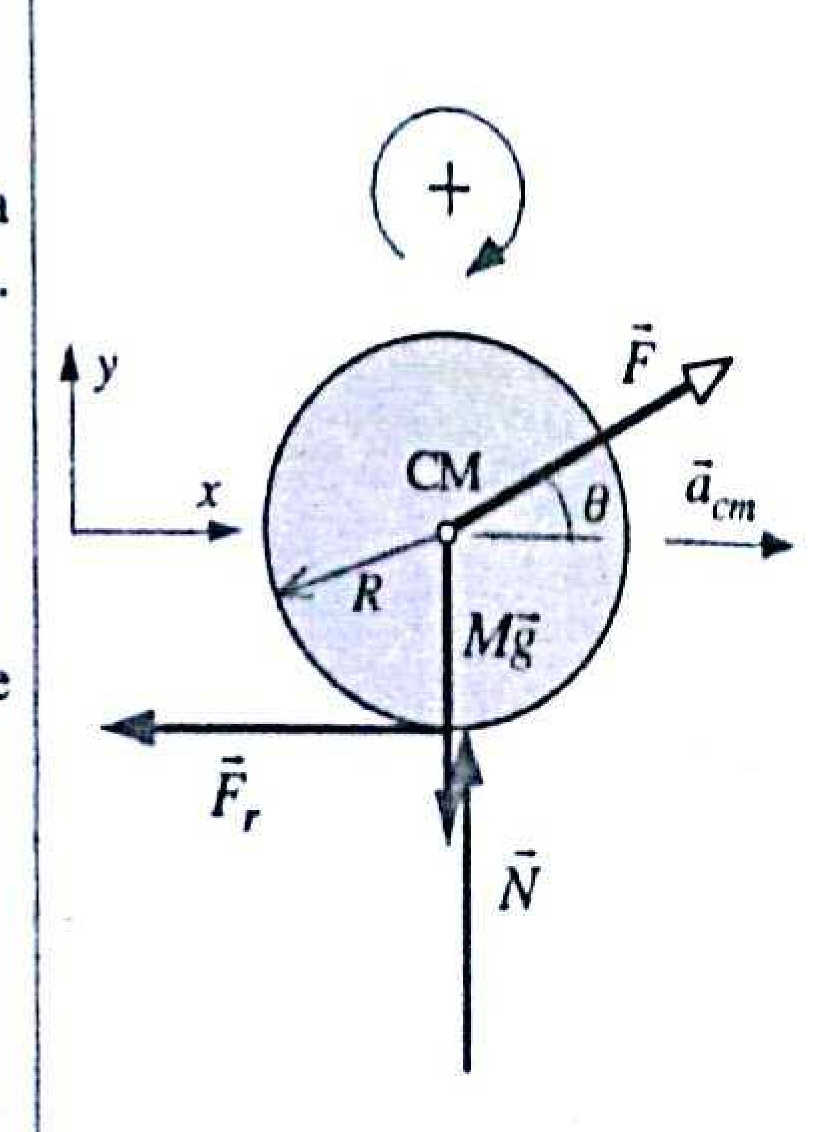
El momento de inercia del cilindro es: $I_{cm} = MR^2/2$, y la condición de rodadura sin deslizamiento: $\alpha = a_{cm}/R$. Sustituyendo estas expresiones:

$$F_r = I_{cm}\frac{\alpha}{R} = (\frac{1}{2}MR^2)\frac{\alpha}{R} = \frac{1}{2}Ma_{cm}$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación de movimiento de traslación horizontal, encontramos:

$$\sum F_x = F\cos\theta - F_r = Ma_{cm}$$

$$F\cos\theta - \frac{1}{2}Ma_{cm} = Ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{F\cos\theta}{M}$$



b) Usando este resultado, la fuerza de fricción estática es:

$$F_r = \frac{1}{2}Ma_{cm} = \frac{1}{2}M(\frac{2}{3}\frac{F\cos\theta}{M}) = \frac{1}{3}F\cos\theta.$$

Para evitar deslizamiento se debe cumplir: $F_r \le \mu_e N$.

Donde la fuerza normal está dada por:

$$\sum F_y = F sen\theta + N - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg - F sen\theta$$

$$\frac{1}{3}F\cos\theta \le \mu_e(Mg - F sen\theta)$$

Por lo tanto, la fuerza que se puede aplicar sin que el rodillo resbale debe ser:

$$F \le \frac{\mu_e Mg}{\cos\theta/3 + \mu_e sen\theta}$$

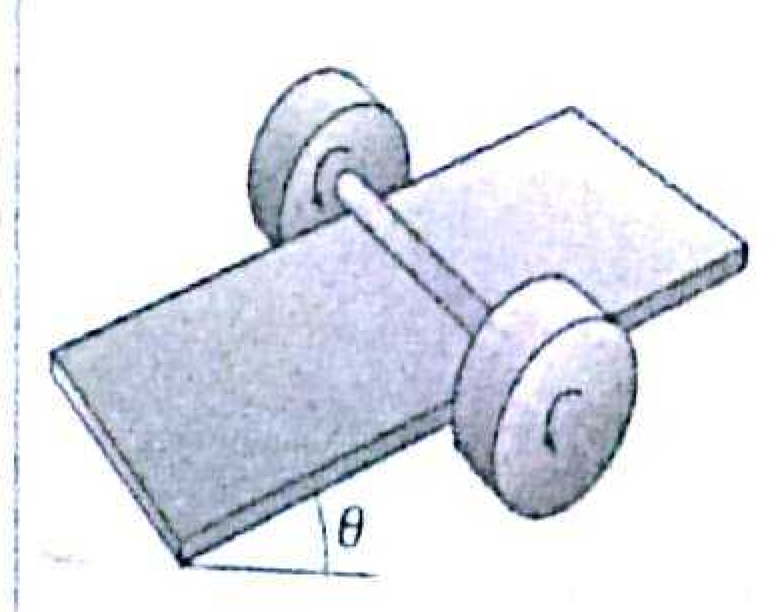
Respuesta:

a) $a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{F\cos\theta}{M}$

b) $F \le \frac{\mu_e Mg}{\cos\theta/3 + \mu_e sen\theta}$

PR-3.39. *Descenso de un carrete en un plano inclinado*

Dos discos pesados de masa M y de radio R están unidos por una barra ligera de radio mucho menor, r. El carrete está situado sobre una rampa inclinada a un ángulo θ y apoyado sobre la barra ligera de modo que los dos discos cuelgan por ambos lados. Si el carrete se suelta y rueda cuesta abajo sin resbalar, determine la aceleración.

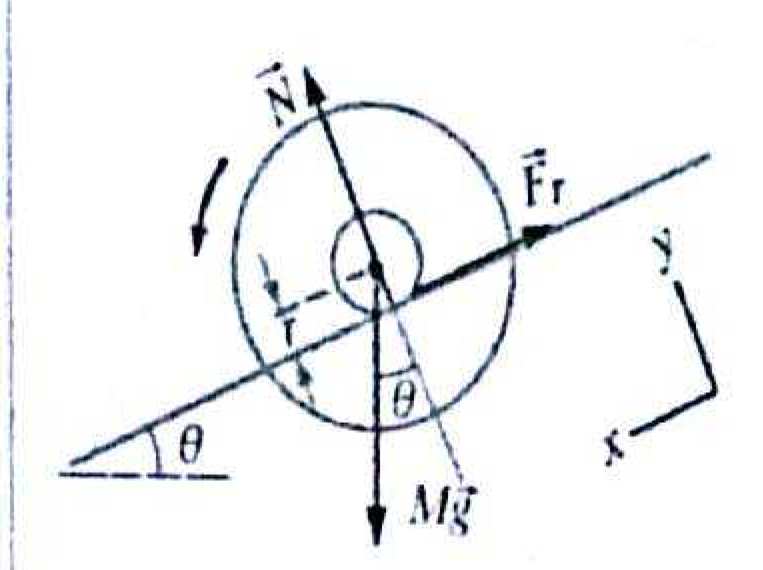


Solución: Según el diagrama de cuerpo libre, la ecuación de movimiento para la traslación en el plano inclinado es:

$$\sum F_x = (2M)g sen\theta - F_r = (2M)a_{cm} \qquad (1)$$

La ecuación para el movimiento de rotación es:

$$\sum \tau_{cm} = F_r r = I_{cm}\alpha \qquad (2)$$



Usando en esta ecuación el momento de inercia de los dos cilindros:

$$I_{cm} = 2(\frac{1}{2})MR^2 = MR^2$$

se tiene para la fuerza de roce:

$$F_r r = (MR^2)(\frac{a_{cm}}{r}) \quad \Rightarrow \quad F_r = (\frac{R^2}{r^2})Ma_{cm}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene la aceleración:

$$2Mg\,sen\theta - (\frac{R^2}{r^2})Ma_{cm} = (2M)a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g\,sen\theta}{(1 + R^2/2r^2)}$$

Respuesta:

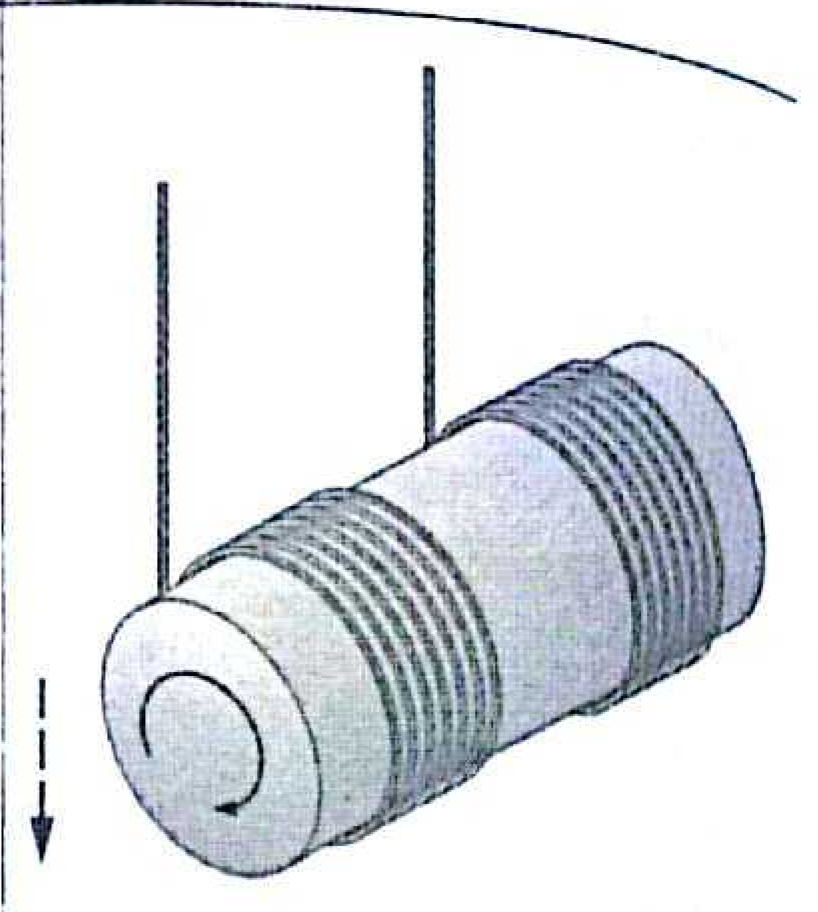
$$a_{cm} = \frac{g\,sen\theta}{(1 + R^2/2r^2)}$$

PR-3.40. *Descenso de cilindro enrollado en dos hilos*

Un cilindro sólido de masa M, longitud L y radio R tiene dos cuerdas largas enrolladas cerca de cada extremo. Los extremos de las cuerdas están fijos en el techo de manera tal que el cilindro se sostiene horizontalmente y las cuerdas están (casi) verticales. Si se suelta el cilindro, determine:

a) La aceleración lineal del cilindro al ir cayendo.

b) La tensión de la cuerdas al desenrollarse.



Solución: a) El movimiento de descenso vertical del cilindro está dado por la ecuación:

$$\sum F_y = Mg - 2T = Ma_{cm} \qquad (1)$$

y para el movimiento de rotación en torno al centro de masa:

$$\sum \tau_{cm} = 2TR = I_{cm}\alpha$$

$$2TR = (\frac{1}{2}MR^2)\frac{a_{cm}}{R} \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la aceleración del cilindro:

$$Mg - (\frac{1}{2}MR^2)\frac{a_{cm}}{R^2} = Ma_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad a_{cm} = \frac{2}{3}g$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene la expresión de la tensión en cada cuerda:

$$T = \frac{Mg - Ma_{cm}}{2} = \frac{Mg - M(2g/3)}{2} = \frac{1}{6}Mg$$

Respuesta:

a) $a_{cm} = \frac{2}{3}g$

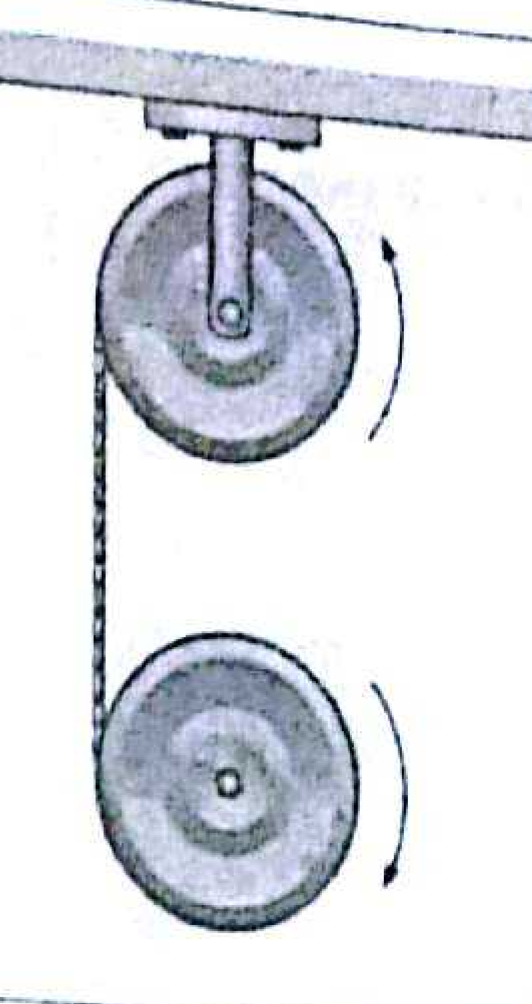
b) $T = \frac{1}{6}Mg$

PR-3.41. *Descenso de un disco enrollado con otro*

Dos discos homogéneos de masas y radios iguales M y R respectivamente están enrolladas de manera simétrica por una cuerda ligera e inextensible . El disco superior puede girar sin rozamiento alrededor de su eje que está fijo. Si se deja caer el disco inferior, determine:

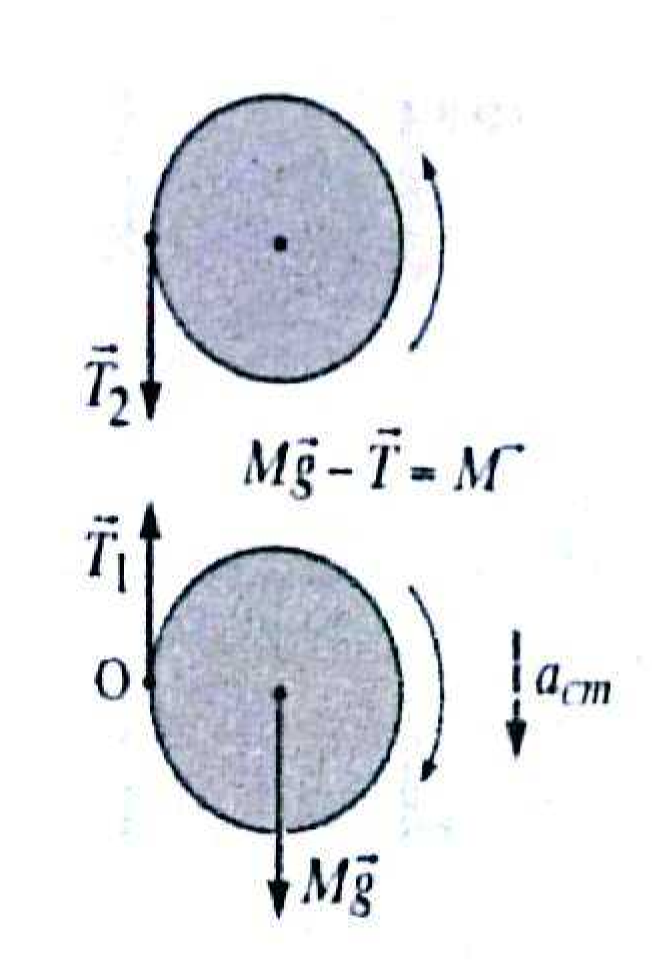
a) La tensión de la cuerda.

b) La aceleración del eje del disco inferior durante su caída.



Solución: a) Las fuerzas que actúan sobre los dos discos están mostradas en la figura. Para el movimiento de traslación del disco inferior con aceleración a_{cm}, la segunda ley de Newton tiene la forma:

$$\sum F_y = Mg - T_1 = Ma_{cm} \qquad (1)$$



Para el movimiento de rotación de los dos discos respecto a sus centros de masas, las ecuaciones respectivas son:

$$\sum \tau_{cm} = T_1R = I_{cm}\alpha_1 \qquad (2)$$

$$\sum \tau_{cm} = T_2R = I_{cm}\alpha_2 \qquad (3)$$

Donde las tensiones tienen el mismo valor: $T_1 = T_2 = T$ y se considera que los discos son cilindros homogéneos con momentos de inercia: $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

La aceleración del centro de masa del disco inferior es igual a la aceleración del centro de masa respecto al punto O, más la aceleración de éste respecto al eje fijo:

$$a_{cm} = a_1 + a_2 = \alpha_1 R + \alpha_2 R$$

Por lo tanto:

$$a_{cm} = (\frac{T_1R}{I_{cm}} + \frac{T_2R}{I_{cm}})R = 2\frac{TR^2}{I_{cm}} = 2\frac{TR^2}{MR^2/2} = 4\frac{T}{M}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), encontramos la tensión de la cuerda:

$$Mg - T = M(4\frac{T}{M}) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{5}Mg$$

b) El eje del disco inferior desciende con una aceleración:

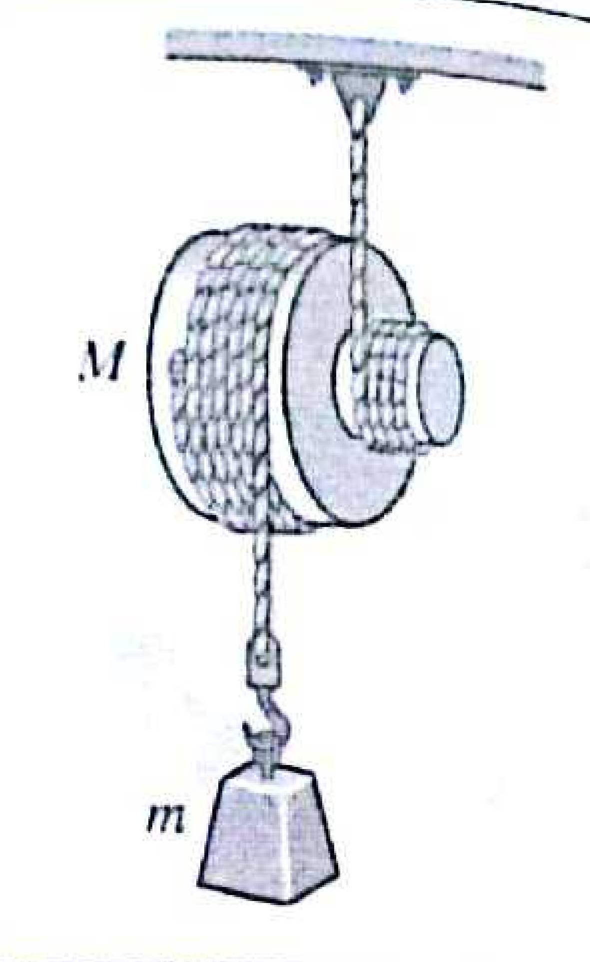
$$a_{cm} = 4\frac{(Mg/5)}{M} = \frac{4}{5}g$$

Respuesta:

a) $T = \frac{1}{5}Mg$

b) $a_{cm} = \frac{4}{5}g$

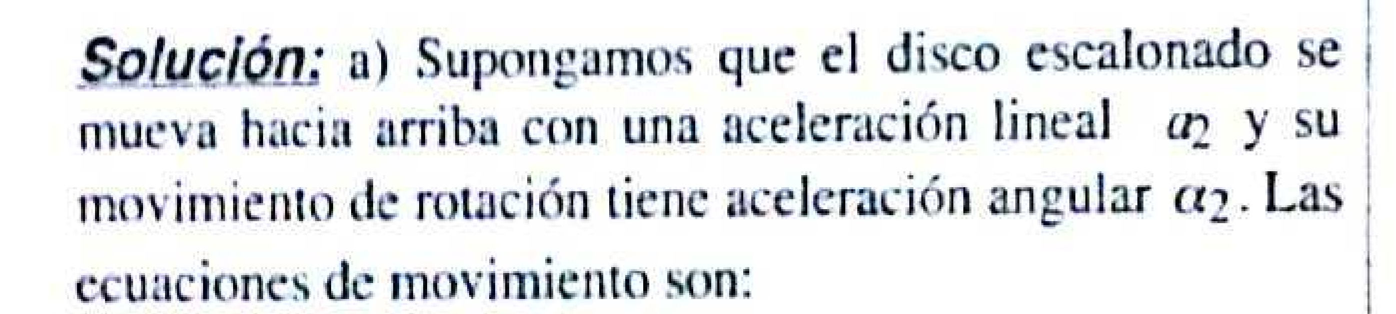
PR-3.42. *¿Ascenderá o descenderá la pesa?*



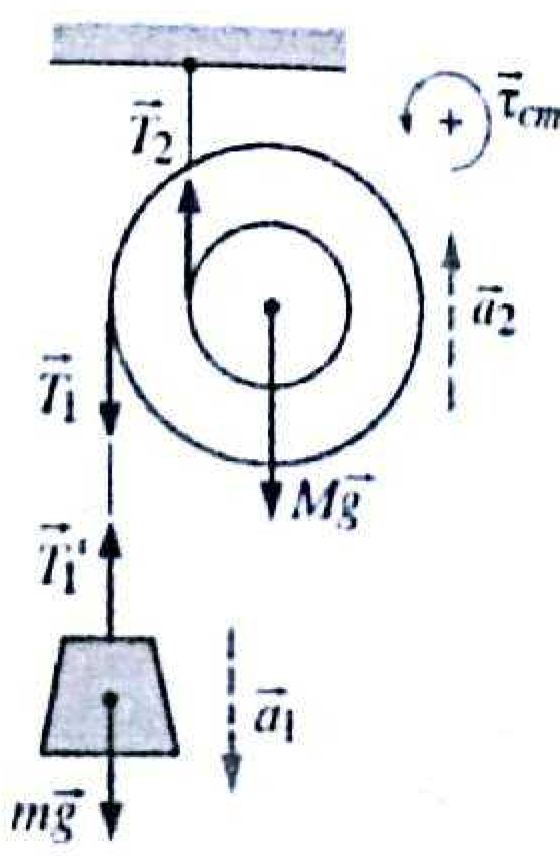
Dos discos de radios respectivos R y $2R$ se encuentran unidos con el eje común y tienen un masa total M y un momento de inercia I_{cm}. El sistema se encuentra suspendido mediante una cuerda ligera por el escalón de menor diámetro y una pesa de masa m se suspende del escalón de mayor diámetro. Si se deja caer la pesa:

a) Determine su aceleración.

b) ¿Ascenderá o descenderá la pesa?



Solución: a) Supongamos que el disco escalonado se mueva hacia arriba con una aceleración lineal a_2 y su movimiento de rotación tiene aceleración angular α_2. Las ecuaciones de movimiento son:



$$\sum F_y = T_2 - Mg - T_1 = Ma_2 \qquad (1)$$

$$\sum \tau_{cm} = T_1(2R) - T_2R = I_{cm}\alpha_2 \qquad (2)$$

Supongamos que la pesa se mueva hacia abajo con una aceleración lineal a_1. La ecuación de movimiento es:

$$\sum F_y = mg - T_1' = ma_1 \qquad (3)$$

Aquí los valores de las tensiones T_1' y T_1 son iguales. Las aceleraciones lineales están relacionadas por las expresiones:

$$a_1 = \alpha_2(2R) - \alpha_2(R) = \alpha_2 R \quad \text{y} \quad a_2 = \alpha_2 R$$

Tomando en cuenta estas relaciones y combinando las ecuaciones (1) , (2) y (3) para eliminar las tensiones, se obtiene:

$$-Mg + mg - ma_1 = Ma_1 + \frac{I_{cm}}{R^2}a_1$$

Por lo tanto, la aceleración de la pesa es:

$$a_1 = \frac{(m - M)g}{(M + m + \frac{I_{cm}}{R^2})}$$

Respuesta:

$$a_1 = \frac{(m - M)g}{(M + m + \frac{I_{cm}}{R^2})}$$

b) Observamos en esta expresión que, si $m > M$, entonces $a_1 > 0$, la pesa se moverá hacia abajo. Por otra parte, si $m < M$, entonces $a_1 < 0$ y la pesa se moverá hacia arriba.

PR-3.43. *¿Por qué la bola aterriza en el vaso?*

Una de las demos de física que hacemos en clase en la universidad consiste de una tabla de longitud L articulada en un extremo mediante una bisagra, de modo que pueda inclinarse a un ángulo θ variable. Se coloca una bola de acero en una pequeña depresión sobre el extremo superior de la tabla y se fija un vaso de plástico en la tabla, a cierta distancia de la bola (Fig. a). Cuando la soltamos, la tabla y la bola caen y la bola aterriza dentro del vaso (Fig. b).

a) Demuestre que esto sucede solamente cuando el ángulo θ tiene un valor menor de 35,3°.

b) Si la tabla articulada tiene 1,0 m de largo y se apuntala en un ángulo de 35°, ¿dónde debemos ubicar el vaso sobre la tabla?

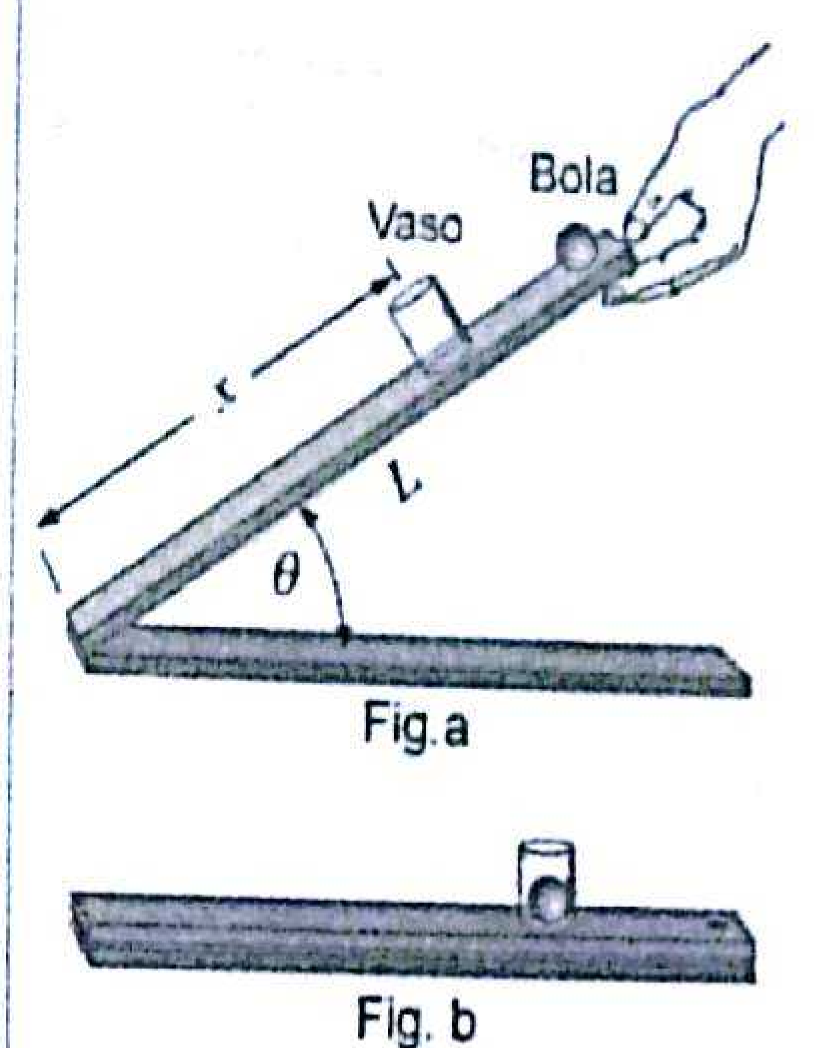


Fig.a

Fig. b

Solución: a) Para el movimiento rotacional de la barra de masa M y longitud L, escribimos:

$$\sum \tau_0 = I_0\alpha \quad \Rightarrow \quad Mg(\frac{1}{2}L\cos\theta) = (\frac{1}{3}ML^2)\alpha$$

La velocidad angular de la barra es:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$$

La aceleración tangencial del extremo de la barra es:

$$a_t = \alpha L = \frac{3}{2}g\cos\theta$$

La componente vertical de la aceleración es:

$$a_y = a_t \cos\theta = \alpha L = \frac{3}{2} g \cos^2\theta$$

Si esta aceleración es mayor que g, entonces la punta de la barra estará adelantada a la pelota en la caída:

$$\frac{3}{2} g \cos^2\theta \geq g \qquad \cos^2\theta \geq \frac{2}{3} \qquad \cos\theta \geq \sqrt{2/3} = 0{,}816$$

Por lo tanto el ángulo inicial para que esto ocurra debe ser:

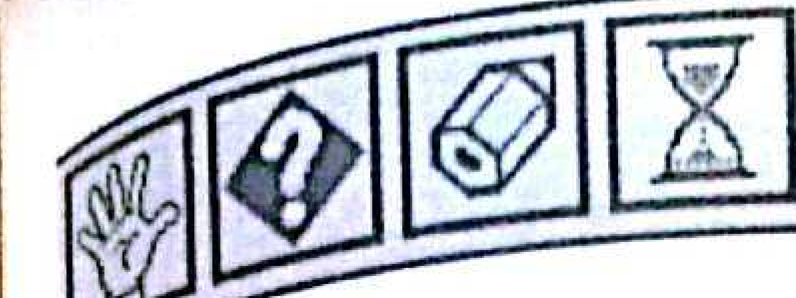
$$\theta \leq 35{,}3^{\circ}$$

b) Para que el vaso quede en la vertical por debajo de la bola, debe estar en la tabla a una distancia del extremo articulado:

$$x = L\cos\theta = (1{,}0\text{m})\sqrt{2/3} = (1{,}0\text{m})\sqrt{2/3} = 0{,}816\text{m}$$

Respuesta:

a) $\theta \leq 35{,}3^{\circ}$
b) $x = 0{,}816\text{m}$, distancia desde el extremo fijo.



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-3.01. ***El momento de inercia de un cuerpo...***

a) Es una propiedad única que es intrínseca del cuerpo al igual que su masa.

b) Depende de su masa, su forma y su velocidad angular.

c) Es proporcional al torque que se le aplica al cuerpo.

d) Depende del eje en torno al cual está girando y de la manera en que está distribuida su masa respecto a ese eje.

e) Se puede determinar suponiendo que toda su masa está concentrada en su centro de masa.

PE-3.02. ***El torque neto sobre un cuerpo rígido...***

a) Es cero si la fuerza neta sobre el cuerpo es cero.

b) Es diferente de cero si el cuerpo se encuentra rotando.

c) Solamente depende del módulo y dirección de las fuerzas aplicadas.

d) Incrementa siempre su energía rotacional.

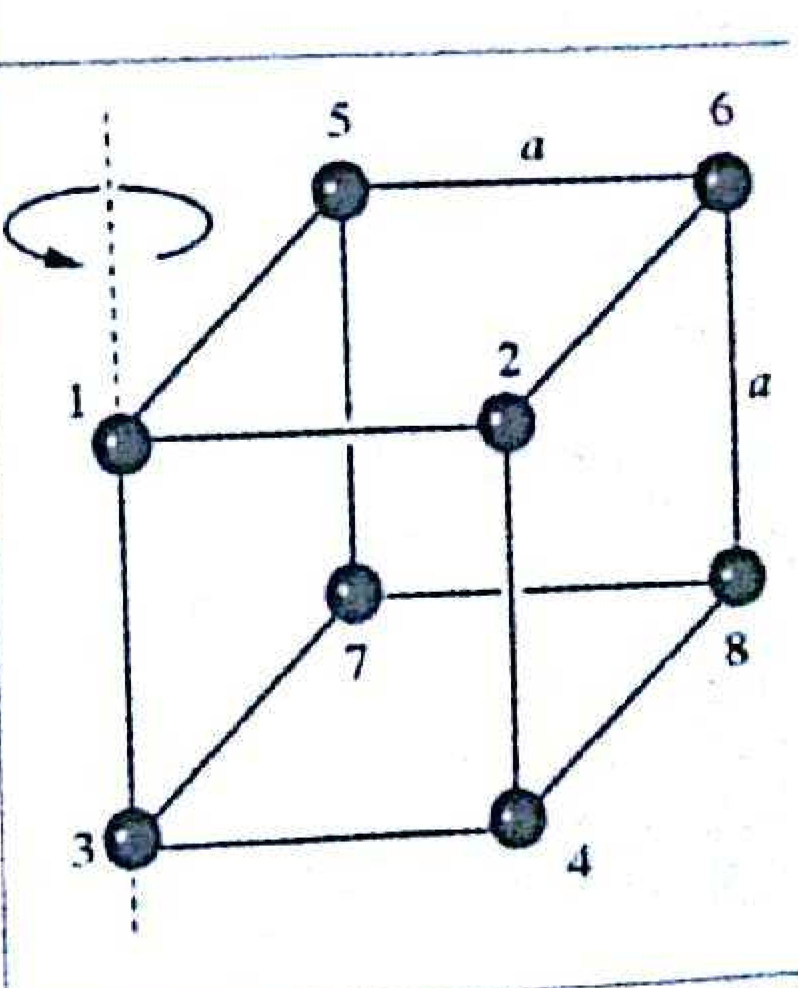
e) Debido a un conjunto de fuerzas, no es igual al torque que ejercería la fuerza resultante.

PE-3.03. ***Momento de inercia de 8 esferitas en un cubo***

Ocho esferitas de masa m se encuentran situadas en los vértices de un cubo de arista a. Considerando un eje que pasa por un arista, el momento de inercia del cubo es:

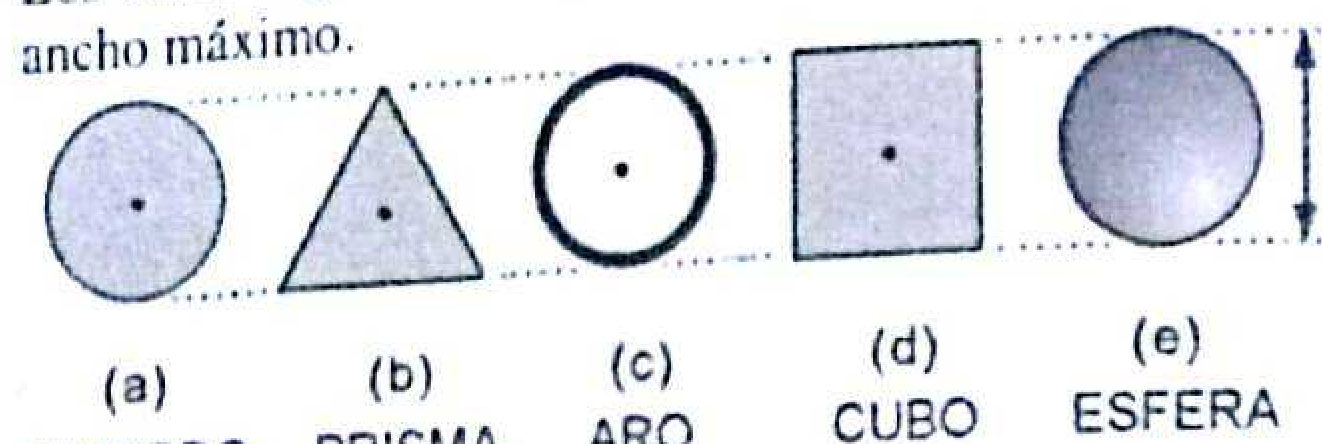
a) $I = 4ma^2$, b) $I = 6ma^2$, c) $I = 12ma^2$

d) $I = 10ma^2$ e) $I = 8ma^2$



PE-3.04. *¿Cuál de estos cuerpos tendrá más inercia?*

Los cinco objetos mostrados tienen igual masa, altura y ancho máximo.

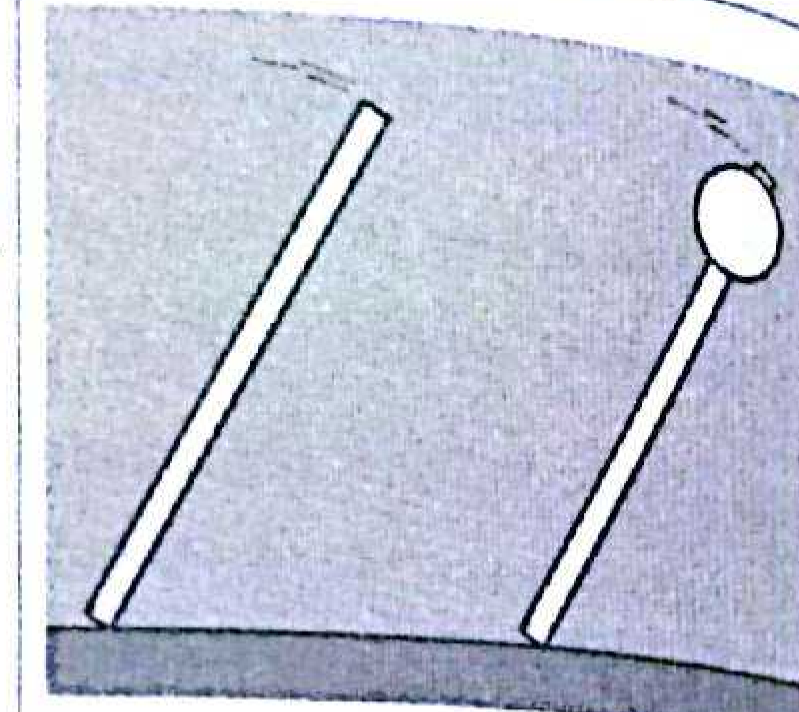


Sin realizar ningún cálculo, ¿cuál de estos objetos tendrá el *mayor* momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro?

PE-3.05. *¿Cuál barra llegará primero al piso?*

Se tienen dos barras idénticas, una de las cuales tiene una masa amarrada en un extremo. Las barras se apoyan por un extremo al piso y la pared para que no deslicen, y se sueltan simultáneamente. ¿Cuál llegará al piso primero?

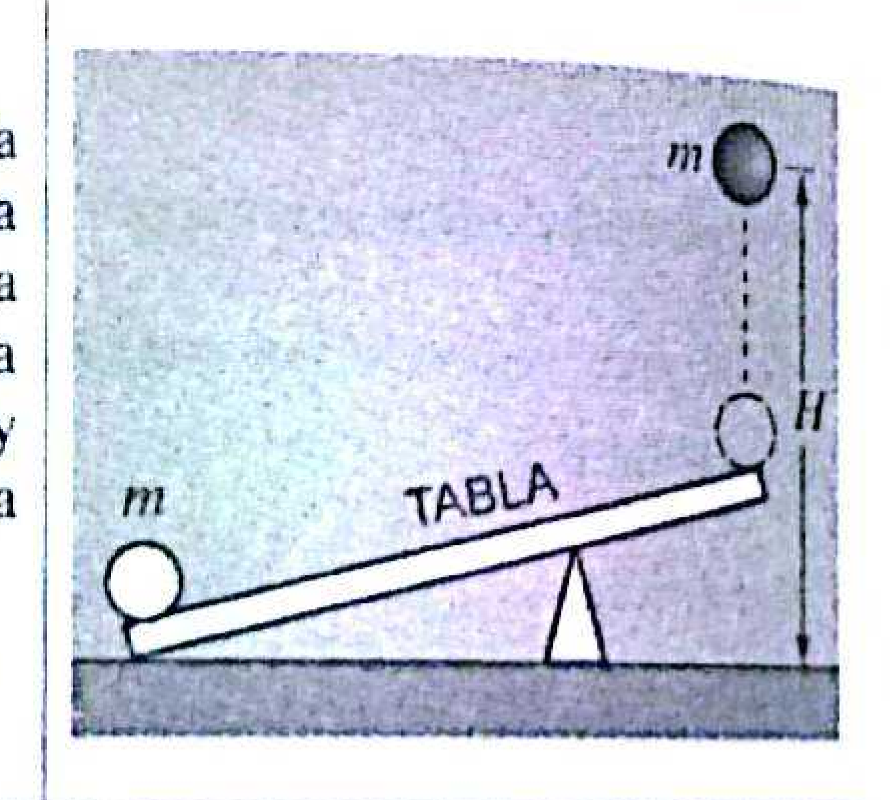
a) La barra sola.
b) La barra que tiene la bola.
c) Las dos barras llegan simultáneamente.



PE-3.06. *¿Hasta dónde se elevará la bola blanca?*

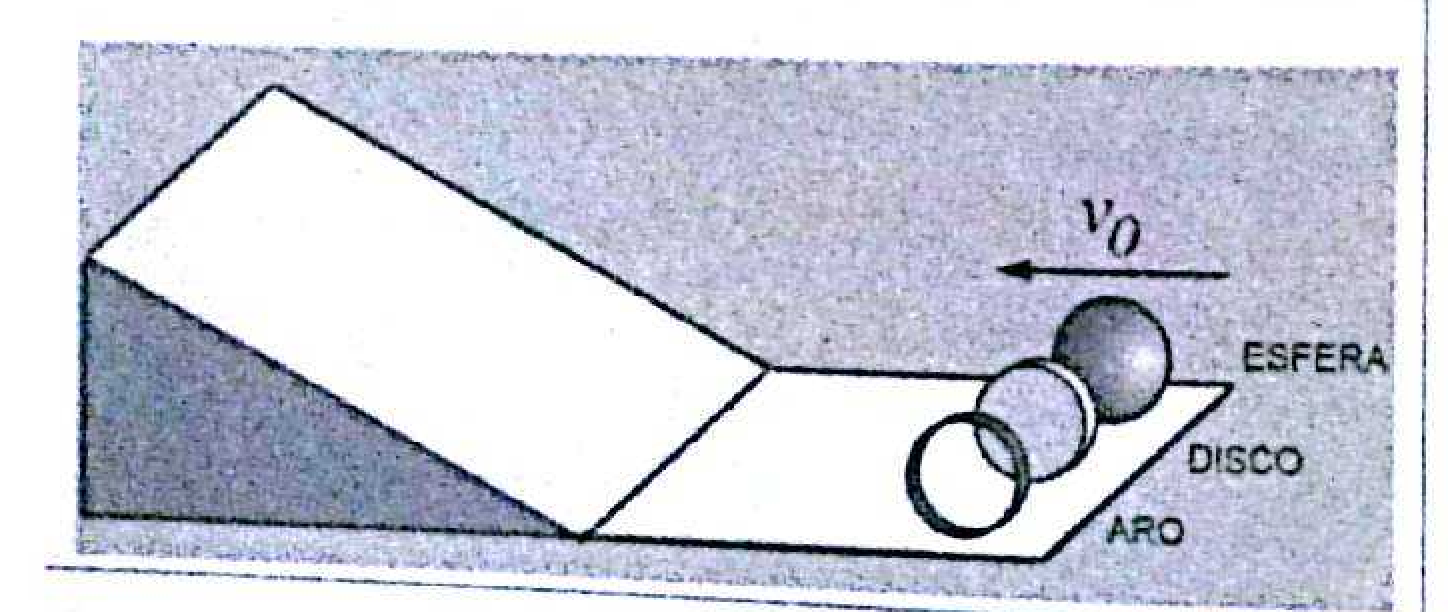
Una tabla ligera de longitud L se apoya en un soporte a la distancia $L/3$ de un extremo. Hay dos bolas de igual masa m, una blanca que está sobre el extremo inferior y una negra que se deja caer sobre el otro extremo desde una altura H. El choque es tal que no hay pérdidas por calor y cuando la bola negra alcanza su mínima altura, la blanca alcanza una altura máxima que será….

a) Igual a H b) Menor que H c) Mayor que H



PE-3.07. *Esfera, disco o aro: ¿Cuál subirá más arriba?*

Una esfera, un disco y un aro, de igual masa y radio, ruedan alineados, sin deslizar con igual velocidad sobre un plano horizontal y luego suben por un plano inclinado.

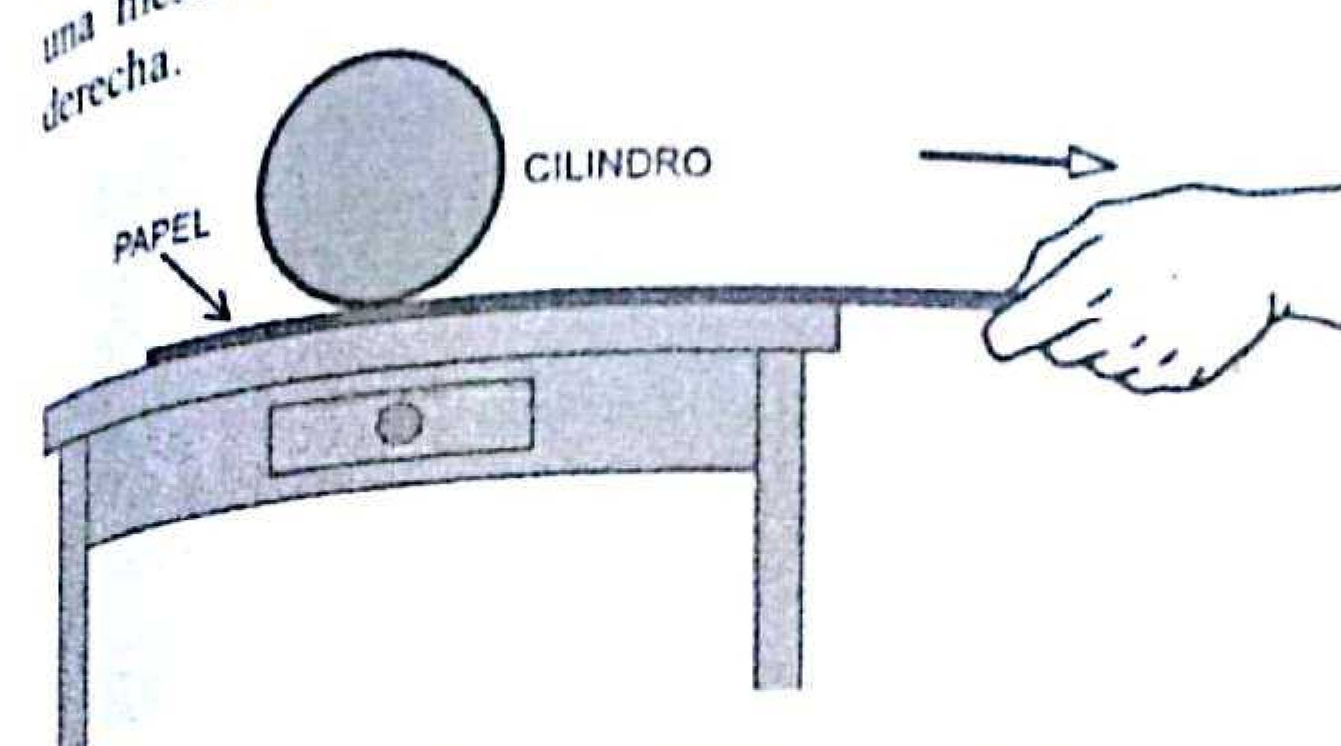


¿Cuál alcanzará mayor altura en el plano inclinado?

a) La esfera
b) El disco
c) El aro
d) Alcanzan igual altura.

PE-3.08. *Jalando un papel debajo de un cilindro*

Un cilindro descansa sobre una hoja de papel encima de una mesa. El papel se va jalando suavemente hacia la derecha.

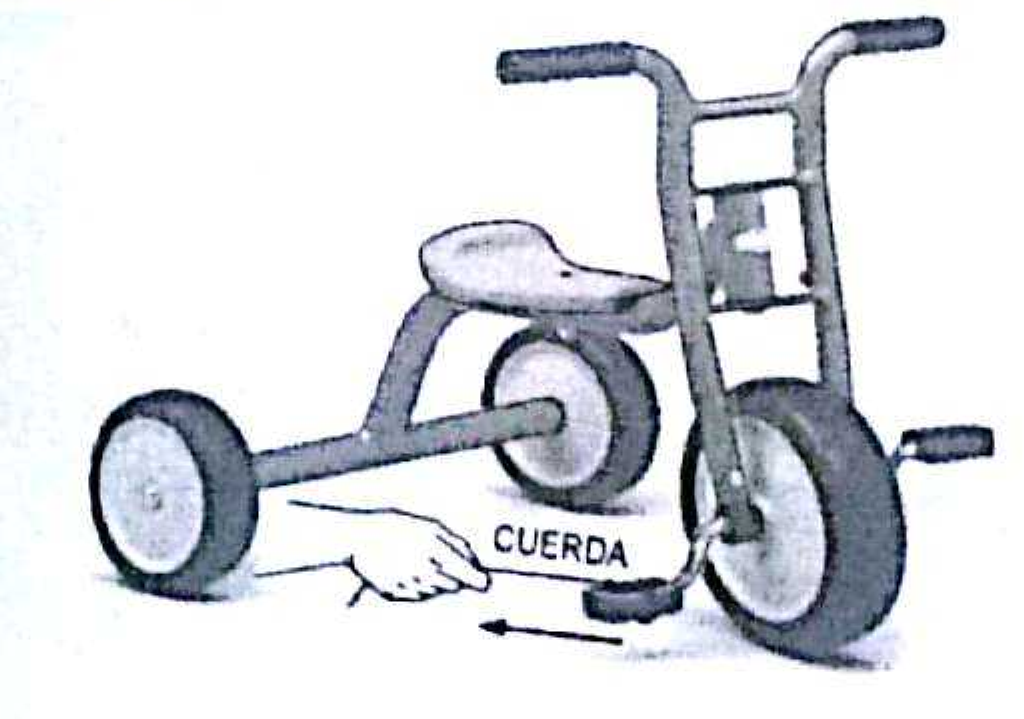


¿Hacia dónde se moverá el centro de masa del cilindro?

a) Hacia la derecha con respecto a la mesa y con respecto al papel.
b) Hacia la izquierda con respecto a la mesa y al papel.
c) Hacia la izquierda con respecto a la mesa y hacia la derecha con respecto al papel.
d) Hacia la derecha con respecto a la mesa y hacia la izquierda con respecto al papel.

PE-3.09. *¿Hacia dónde se moverá el triciclo?*

Considere un triciclo para niños al cual se traba el manubrio de modo que solo pueda rodar sin deslizar hacia adelante o hacia atrás.



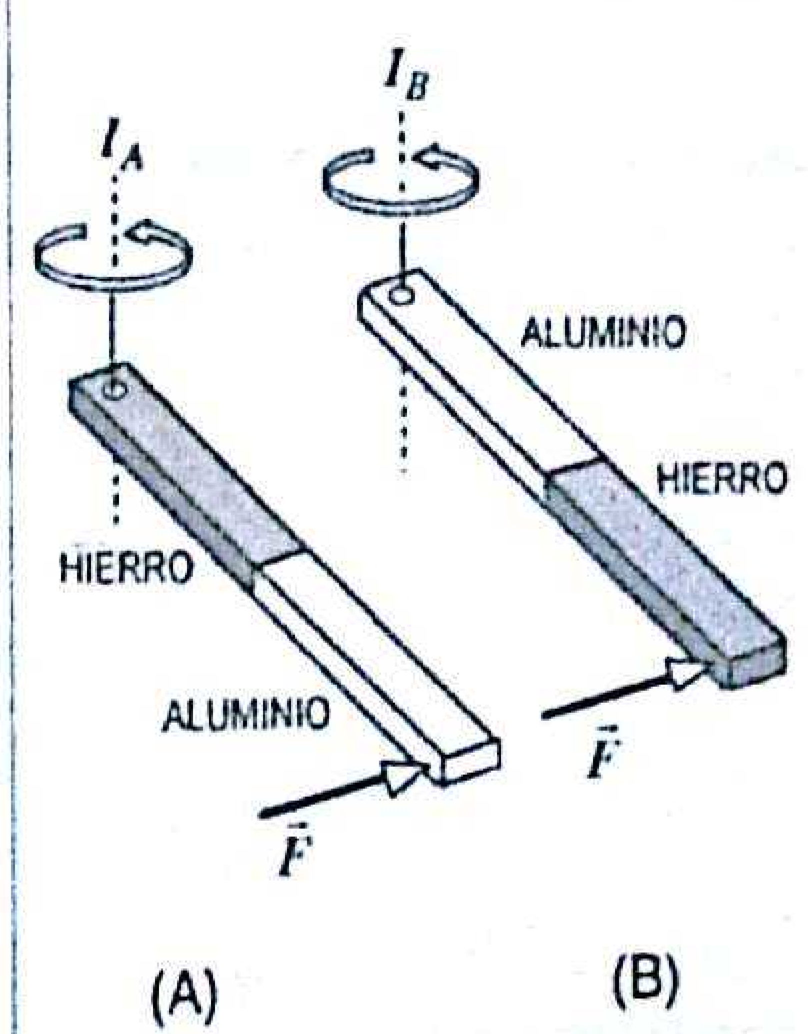
Luego le colocamos los dos pedales en sus posiciones mas alta y mas baja y le amarramos una cuerda al pedal mas bajo, el cual sostenemos hacia atrás en posición horizontal. Cuando se tira de esta cuerda hacia atrás, el triciclo deberá moverse...

a) Hacia adelante.
b) Hacia atrás.
c) Seguir parada.

PE-3.10. *¿En cuál caso resulta mayor la aceleración?*

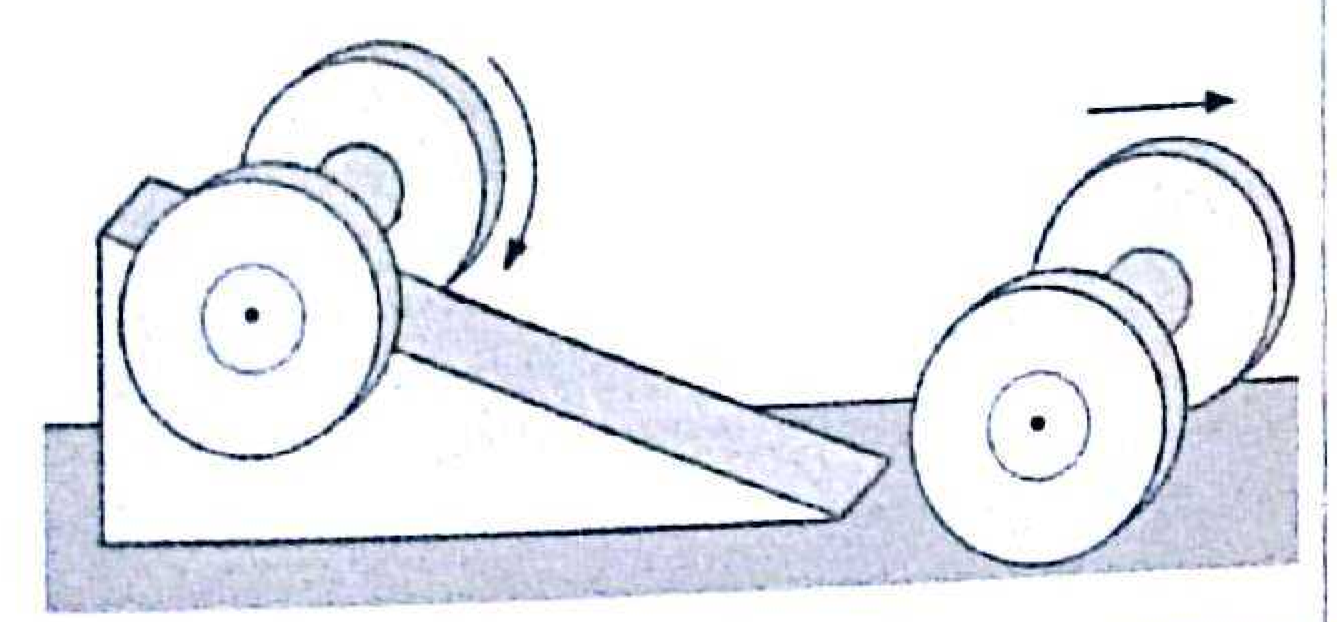
Una barra está compuesta de dos partes de igual tamaño, la mitad de aluminio y la otra mitad de hierro. En el caso (A) se le aplica una fuerza en el extremo de aluminio y la barra gira alrededor de un eje en el extremo de hierro. En el caso (B) se le aplica la misma fuerza pero en el extremo de hierro y la barra gira alrededor de un eje en el extremo de aluminio.¿En cuál de los dos casos resulta mayor la aceleración angular de la barra?

a) Será mayor en el caso A.
b) Será mayor en el caso B.
c) Será igual en los dos casos.



PE-3.11. *Cuando el carrete llega al final de la rampa..*

Un carrete está compuesto por dos discos que están unidos por una barra corta de radio mucho menor. El carrete rueda sin deslizamiento cuesta abajo por una rampa, con su barra apoyada sobre la superficie.

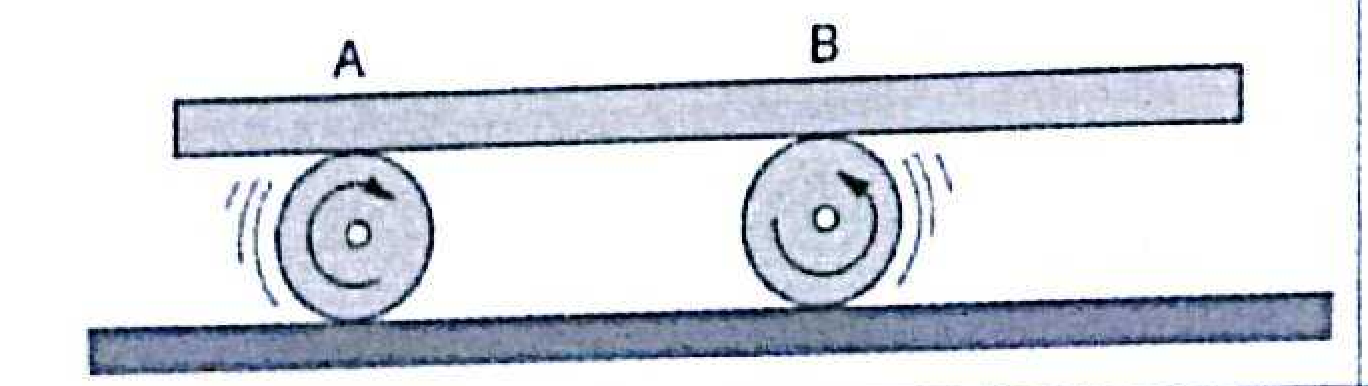


Al llegar al final de la rampa, la barra pierde contacto y los discos entran en contacto con la mesa horizontal. Podemos afirmar que en ese instante, su velocidad de traslación v_{cm}...

a) No cambia.
b) Disminuye
c) Aumenta

PE-3.12. *Una tabla sobre dos rodillos*

Una tabla de masa uniforme descansa sobre dos cilindros A y B, los cuales están girando en sentidos opuestos....

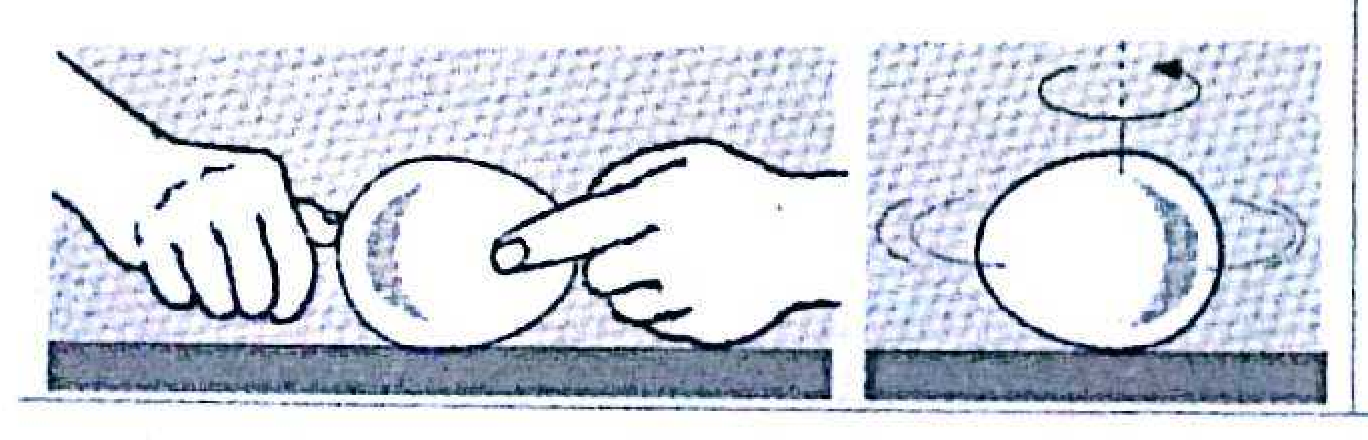


Debido a que los cilindros ejercen fuerzas de rozamiento sobre la tabla, esta se moverá en el transcurso del tiempo....

a) Hacia la derecha.
b) Hacia la izquierda.
c) Oscila hacia adelante y hacia atrás.

PE-3.13. *Cómo distinguir el huevo cocido del crudo*

Una técnica sencilla para saber sin un huevo está crudo o cocido, sin romperlo, consiste en ponerlo a girar como un trompo. El huevo cocido por ser sólido tiene un momento de inercia definido y gira con regularidad durante un tiempo apreciable. Por el contrario, en el huevo crudo el movimiento de la cáscara no se transmite con efectividad al interior que es fluido. La rotación del huevo crudo es irregular y se detiene luego de dar muy pocas vueltas, debido a su asimetría y al rozamiento viscoso.



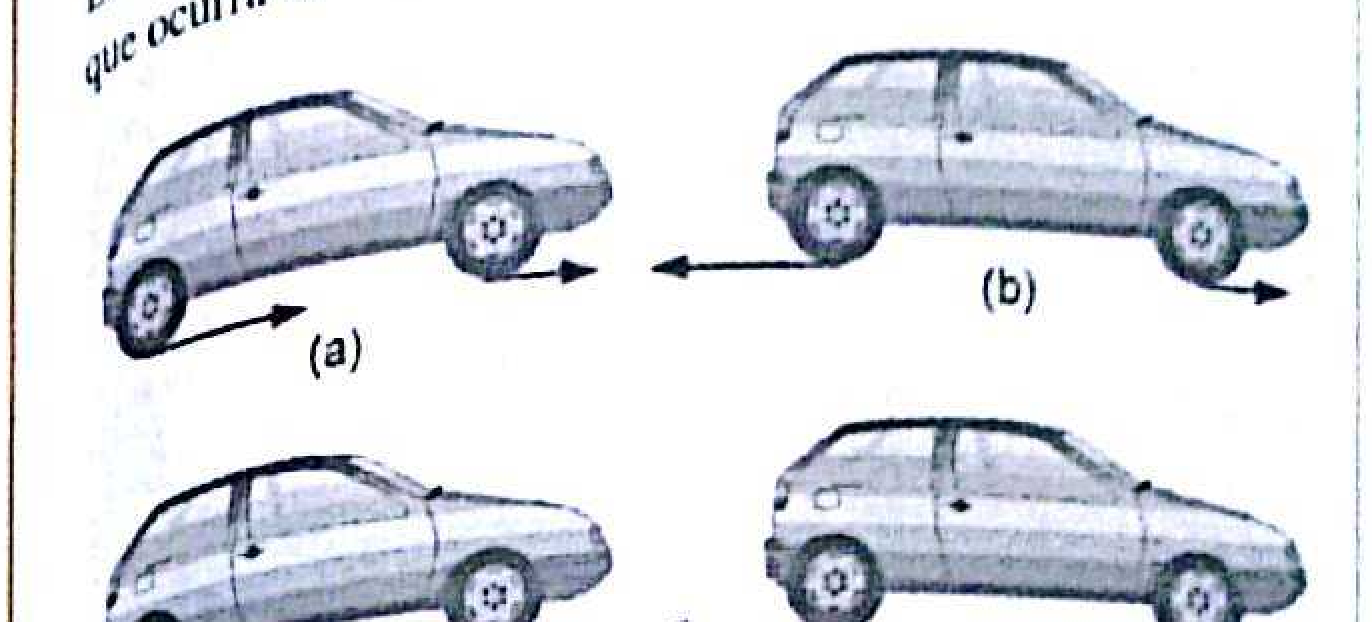
Suponga que tenemos dos huevos, uno crudo y el otro cocido. Ponemos a girar uno de ellos sobre una mesa y luego tratamos de detenerlo, tocándolo por arriba con un dedo momentáneamente. Si al retirar el dedo, se observa que el huevo empieza a girar de nuevo, podemos concluir que...

a) Ese huevo está crudo.

b) Ese huevo está cocido.

PE 3.14. *Rozamiento sobre las ruedas de un automóvil*

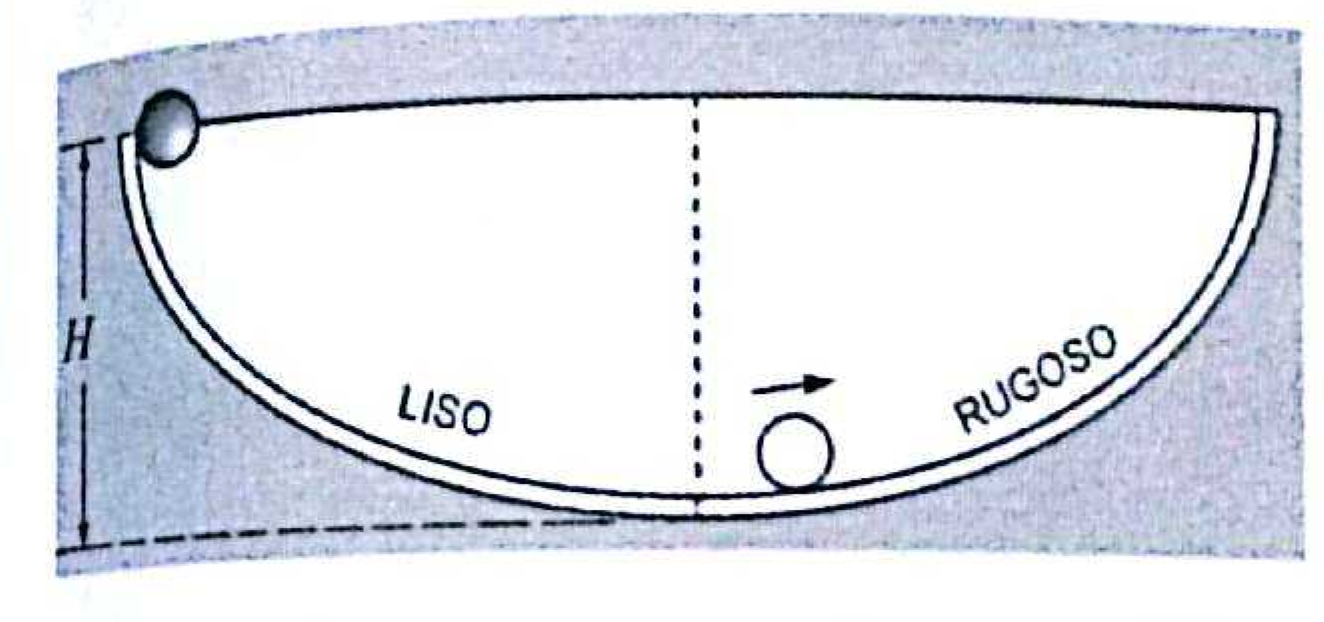
El automóvil mostrado está acelerado hacia la derecha sin que ocurra deslizamiento de sus ruedas con el suelo.



Si la tracción del automóvil la realiza el eje de las ruedas traseras, ¿cuál de las diagramas mostrados podría representar las fuerzas de rozamiento que el suelo ejerce sobre las ruedas?

PE 3.15. *Pelota en un tazón mitad liso y mitad rugoso I*

Por la izquierda se suelta una pelota en reposo desde lo alto de un tazón que tiene una superficie lisa en el lado izquierdo y una superficie rugosa en el lado derecho.

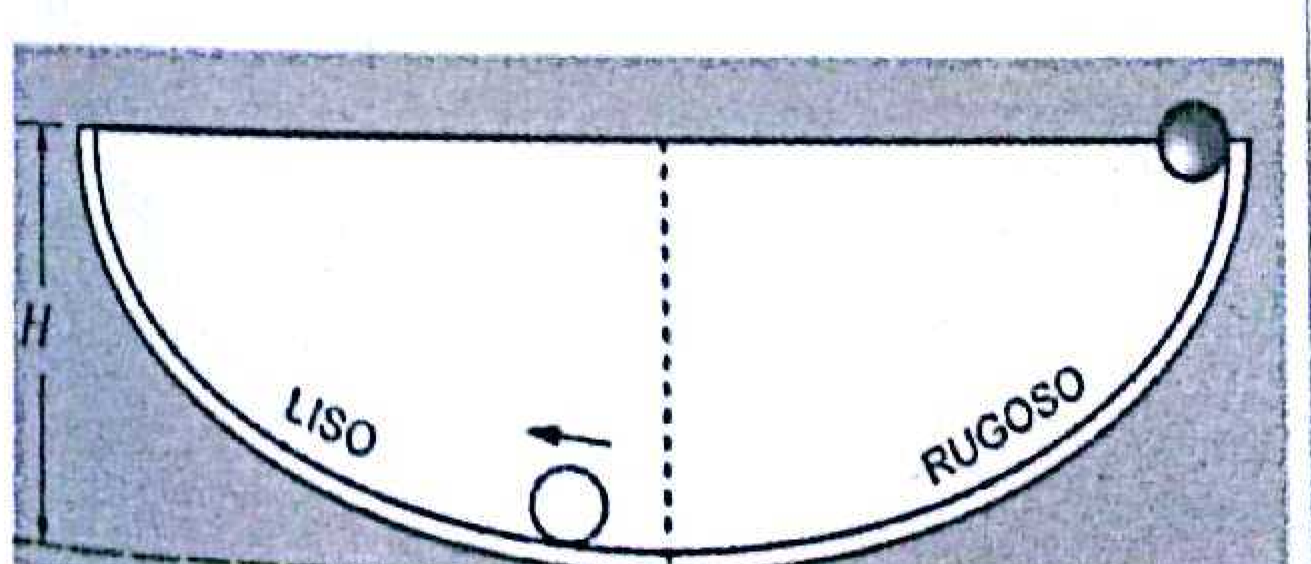


La pelota se suelta desde una altura H en el lado liso y al descender hasta el lado rugoso rueda de inmediato sin resbalar. La altura que subirá en el lado derecho será....

a) Menor que H.
b) Igual a H.
c) Mayor que H.

PE 3.16. *Pelota en un tazón mitad liso y mitad rugoso II*

Por la derecha se suelta una pelota en reposo desde lo alto de un tazón que tiene una superficie lisa en el lado izquierdo y una superficie rugosa en el lado derecho.

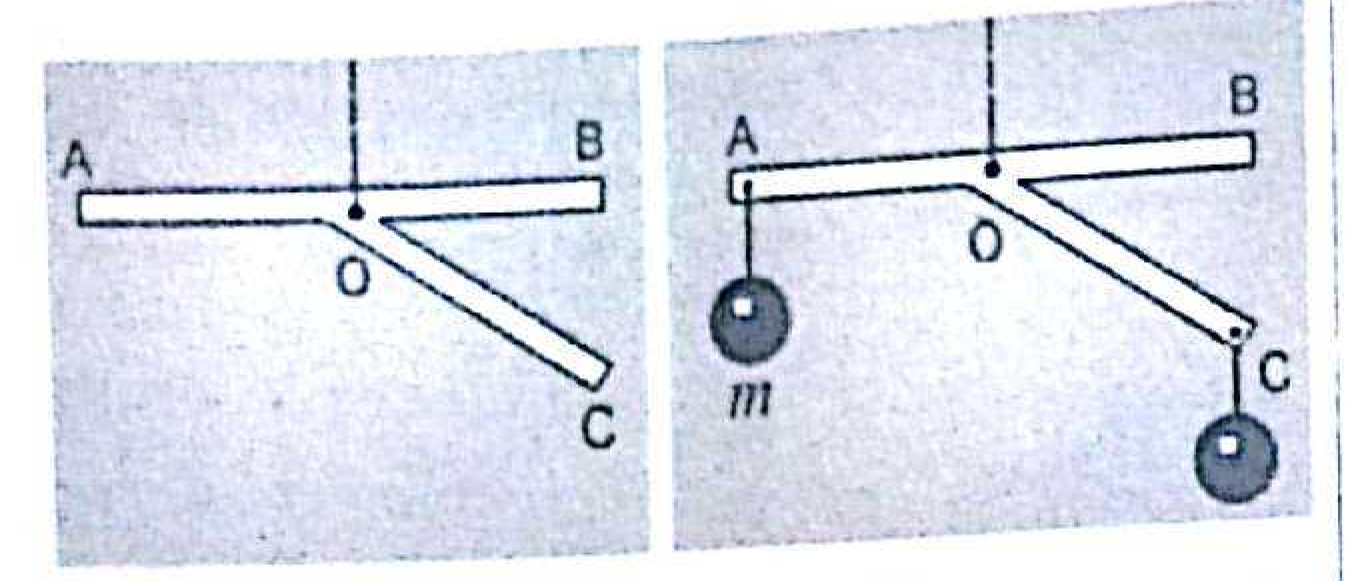


La pelota se suelta desde una altura H en el lado rugoso (lado derecho), donde rueda sin resbalar hasta llegar a la parte lisa donde empieza a resbalar. La altura que subirá en el lado izquierdo será....

a) Menor que H.
b) Igual a H.
c) Mayor que H.

PE-3.17. *¿Gira o no gira la barra?*

Una barra de masa despreciable en la forma indicada, con $\overline{OA} = \overline{OB}$, está suspendida por un hilo en el punto O.



En la posición de equilibrio el tramo $\overline{AB}$ está en posición horizontal. Si colgamos masas iguales en A y en C, podemos afirmar que la barra:

a) gira a la izquierda.
b) gira a la derecha.
c) no gira.

PE 3.18. *Un acto de equilibrio*

Para mantener un palo en posición vertical, en la palma de la mano, es necesario ir ajustando la posición de la mano porque es un equilibrio inestable. La dificultad será menor cuanto menor sea la aceleración angular de caída del palo. Suponga que fijamos una esfera pesada cerca de un extremo del palo. ¿En cual de las situaciones mostradas será mas fácil mantener el equilibrio?

a) En el caso A.
b) En el caso B.
c) Es igual de fácil en ambos casos.

PE 3.19. *¿Cómo funciona un yo-yo?*

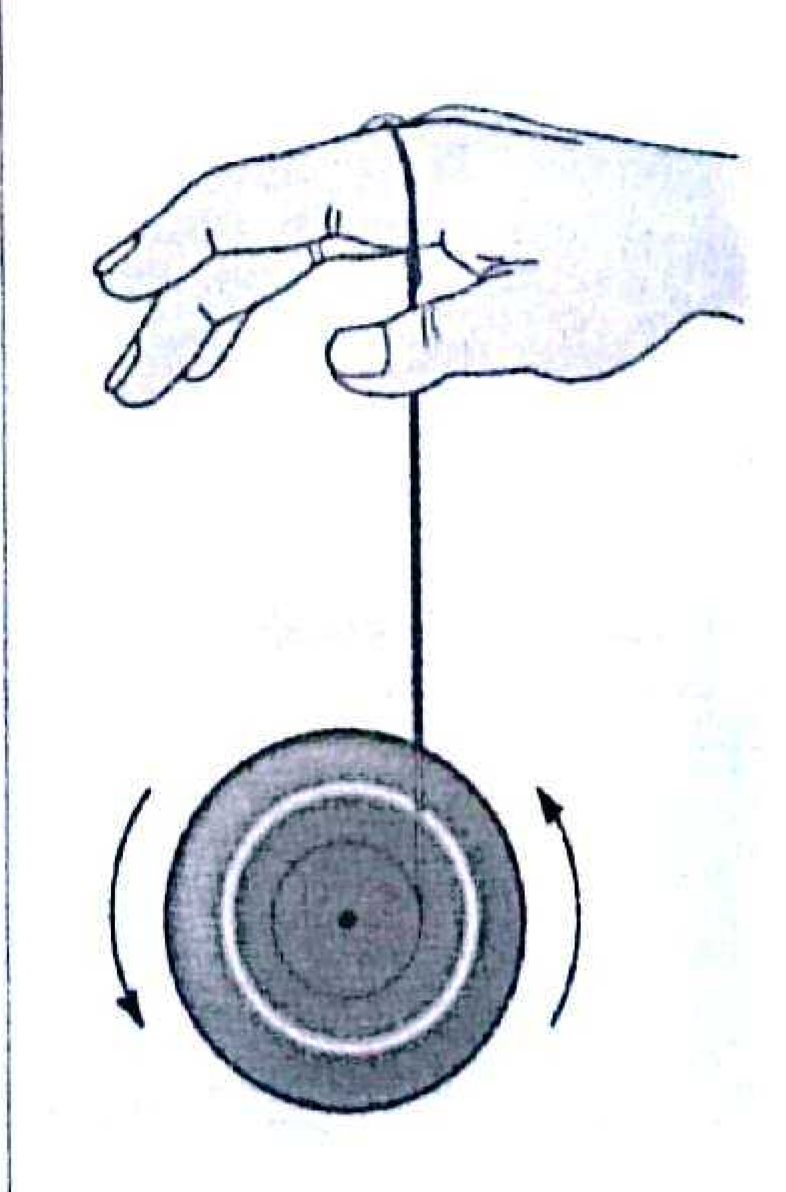
El yo-yo es sostenido por un hilo cuyo extremo superior se mantiene inmóvil. Al desenrollarse, el yo-yo pierde energía potencial adquiriendo energía cinética de rotación. Al llegar al punto mas bajo, el hilo comienza a enrollarse ganando energía potencial. Podemos decir que..

a) La aceleración de caída del yo-yo es igual a la aceleración de la gravedad.

b) La tensión de la cuerda es igual al peso del yo-yo.

c) El yo-yo gira con una velocidad angular constante.

d) Debido a las perdidas por rozamiento, en cada periodo hay que darle un pequeño impulso para que vuelve a subir por si solo a lo largo del hilo hasta la mano.



PE-3.20. *¿Una esfera, un aro, un disco o un cilindro?*

Un objeto redondo desconocido rueda horizontalmente sin deslizamiento con una velocidad v. Luego rueda cuesta arriba por un montículo hasta alcanzar una altura máxima de valor $H = 3v^2/4g$.



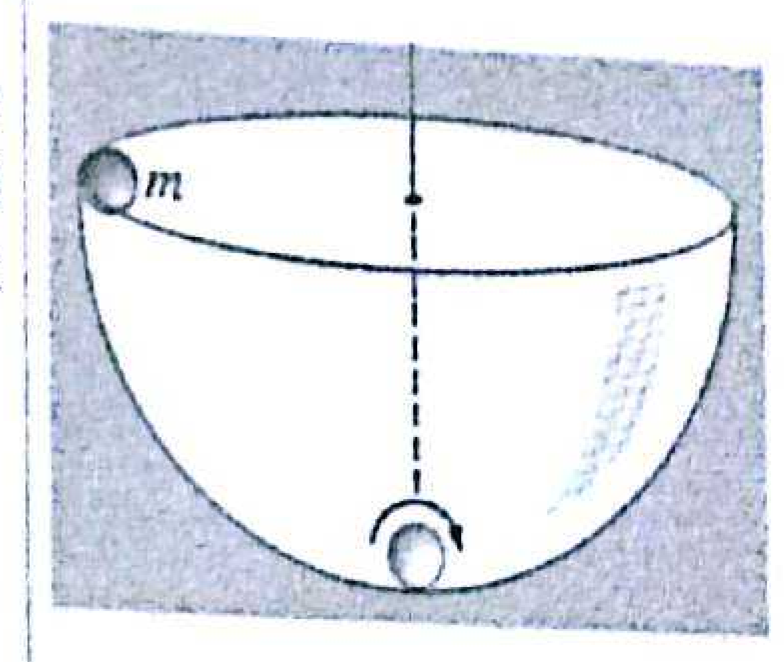
¿Qué cuerpo puede ser?

a) Una esfera
b) Un aro
c) Un disco
d) Un cilindro
e) Un disco o un cilindro

PE-3.21. *Energía de rotación vs. energía de traslación*

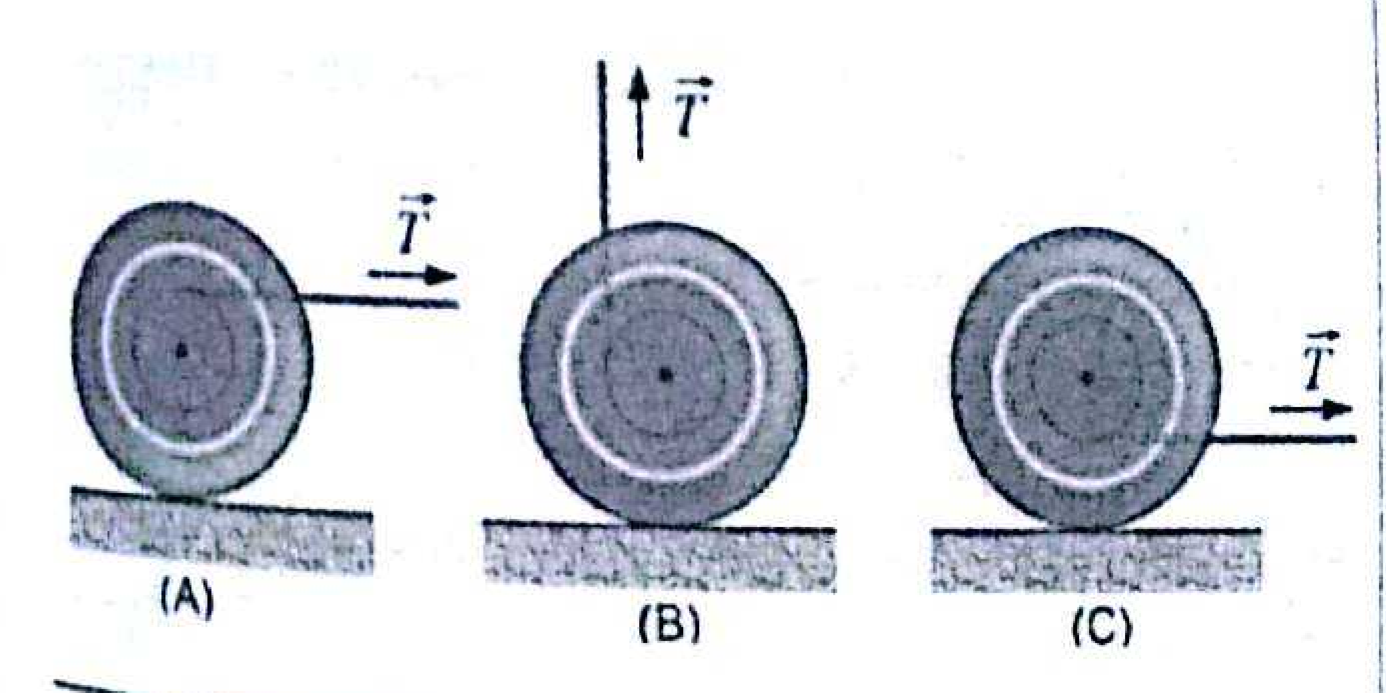
Se suelta una esferita desde la parte superior de un tazón y rueda hacia abajo sin resbalar. Cuando llega al fondo del tazón, ¿que fracción de su energía cinética total será energía de rotación?

a) 75,0%, b) 60,0 %, c) 50,0 %,
d) 40,5 % e) 28,5 %



PE-3.22. *Tirando de un yo-yo por un suelo rugoso*

Un yo-yo está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal la cual presenta suficiente fricción para que el yo-yo ruede sin resbalar. Se tira de la cuerda aplicando una tensión $T < Mg$, en las tres direcciones indicadas:



¿Para cada una de estas situaciones, diga en qué dirección se moverá el yo-yo?

a) A (⇒), B (no se mueve), C (⇐)
b) A (⇒), B (no se mueve), C (⇒)
c) A (⇐), B (⇒), C (⇐)
d) A (⇒), B (⇒), C (⇒)
e) A (⇒), B (⇐), C (⇒)

CAP. 3: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
3.01				√	
3.03					√
3.05	√				
3.07			√		
3.09		√			
3.11			√		
3.13	√				
3.15		√			
3.17			√		
3.19				√	
3.21					√

	a	b	c	d	e
3.02					√
3.04			√		
3.06		√			
3.08				√	
3.10	√				
3.12			√		
3.14			√		
3.16	√				
3.18		√			
3.20					√
3.22				√	

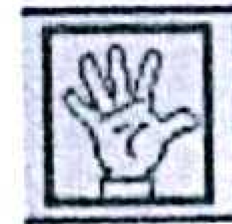
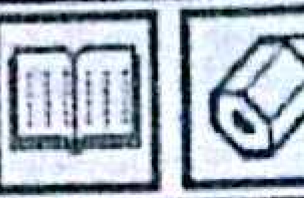
4

MOMENTO ANGULAR

En la dinámica de rotación el análogo del momento lineal es el momento angular, o cantidad de movimiento angular, $\vec{L}$. Esta es una magnitud física que para una partícula se define como el producto vectorial de su vector posición respecto al origen y el momento lineal que posee ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$). Esta definición se generaliza luego para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje, considerado éste como un sistema de muchas partículas. En este capítulo veremos que del mismo modo que el momento lineal $\vec{p}$ se relaciona con la fuerza $\vec{F}$, mediante la forma mas general de la segunda ley de Newton, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, el momento angular se relaciona con el torque mediante la expresión rotacional: $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Esto significa que si el torque neto sobre un sistema es cero, entonces el vector momento angular total permanece constante; este importante resultado se conoce como la ley de conservación del momento angular. Veremos que la ley de conservación del momento angular junto con la ley de conservación de la energía es de gran utilidad para resolver problemas dinámicos de rotación cuerpos rígidos, por comparación de los estados inicial y final del sistema. Esta ley, al igual que la ley de conservación del momento lineal, es una ley fundamental en la física de validez general que se aplica aun en el análisis de los sistemas relativistas y cuánticos.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Momento angular de una partícula
- Torque y momento angular
- Momento angular de un sistema de partículas
- Torque y momento angular para un cuerpo rígido
- Impulso angular
- Conservación del momento angular

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Sea una partícula de masa m y momento lineal $\vec{p}$ localizada por el vector de posición $\vec{r}$ con respecto al origen O en un marco de referencia inercial. El momento angular con respecto al punto O se define por el producto vectorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

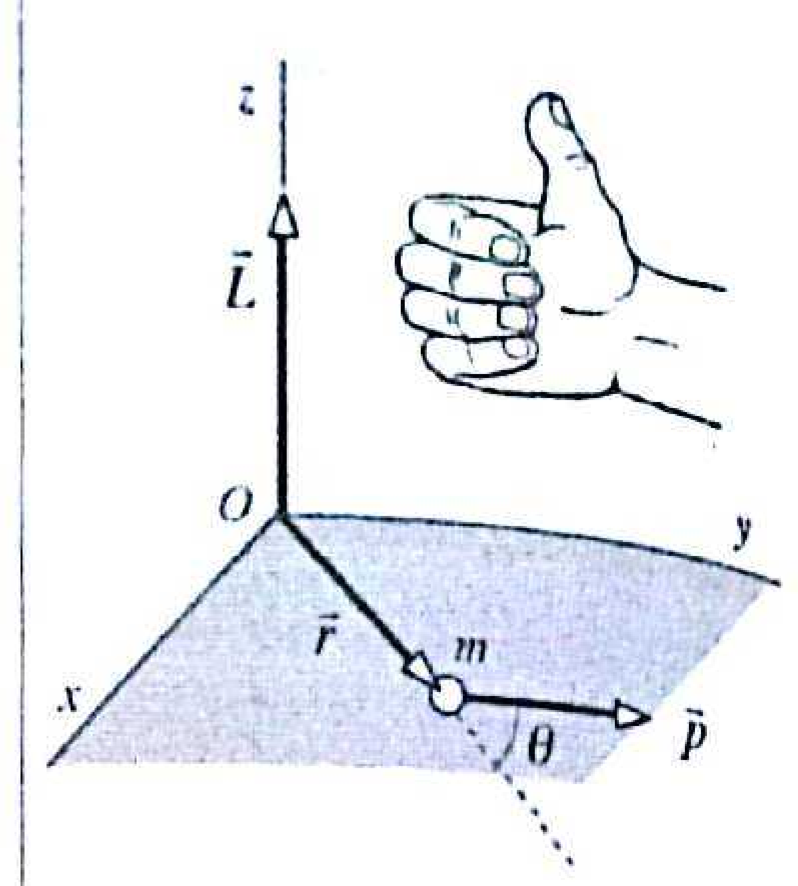
El vector momento angular tiene los siguientes atributos:

Módulo: $|\vec{L}| = rpsen\theta$, (θ ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$)

Dirección: $\vec{L}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{p}$

Sentido: Dado por la regla de la mano derecha.

La unidad *SI* del momento angular $\vec{L}$ es: J·s



Momento angular de una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

DINÁMICA ROTACIONAL DE UNA PARTÍCULA

La variación con respecto al tiempo del momento angular es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En esta expresión el primer término es nulo (ya que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$) y el segundo término es justamente el torque sobre la partícula ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$), luego:

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}$$

Por lo tanto, el torque sobre una partícula es igual a la tasa de cambio de su momento angular. Los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{L}$ deben calcularse con relación al mismo origen en un marco de referencia inercial. Este es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton ($d\vec{p} / dt = \vec{F}$).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

La tasa de cambio del momento angular de una partícula es igual al torque que actúa sobre la partícula

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA

El momento angular de un sistema relativo a un origen dado se determina sumando los momentos angulares de las partículas que lo forman:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = \ldots = \sum_i \vec{L}_i$$

Los momentos angulares de las partículas de un sistema se suman

TORQUE Y MOMENTO ANGULAR

Si para un sistema de partículas derivamos respecto al tiempo la expresión del momento angular total, se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{L}_i = \frac{d}{dt}\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

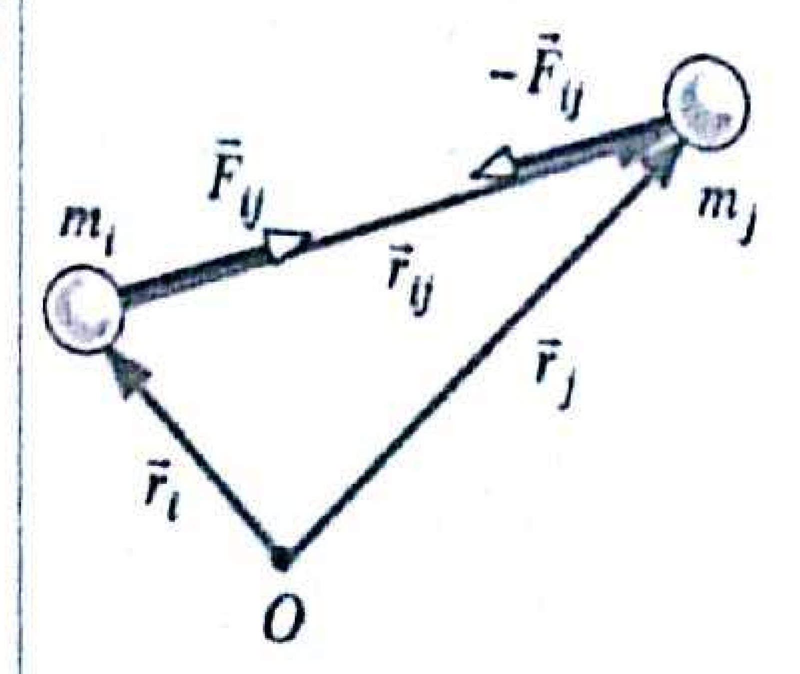
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_i$$

En esta sumatoria, debemos distinguir entre los *torques internos* y los *torques externos* al sistema. Los torques internos se cancelan en pares, ya que las fuerzas internas entre cada par de partículas son iguales y opuestas (Tercera ley de Newton) y quedan a lo largo de la línea de separación de las partículas. Por tanto, solo quedan los torques asociados a fuerzas *externas*. Esto nos permite concluir que:

$$d\vec{L} / dt = \vec{\tau}_{ext}$$

La rapidez de cambio del momento angular de un sistema de partículas es igual al torque externo aplicado.

En esta expresión, tanto $\vec{L}$ como $\vec{\tau}_{ext}$ deben calcularse con respecto al mismo origen en un *marco de referencia inercial*.



$$\vec{\tau}_i + \vec{\tau}_j = -(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

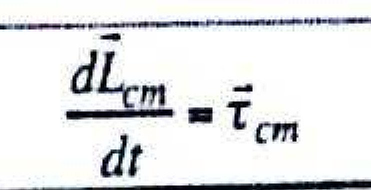
Los torques internos se cancelan en pares

2ª. ley de Newton para la rotación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

Válida en marco inercial

La expresión anterior, no es válida en general si el punto origen está acelerado. Sin embargo, cuando escogemos el centro de masa para calcular tanto el torque como el momento angular del sistema, la expresión anterior es válida aun si el marco de referencia del centro de masas no fuera un marco inercial.



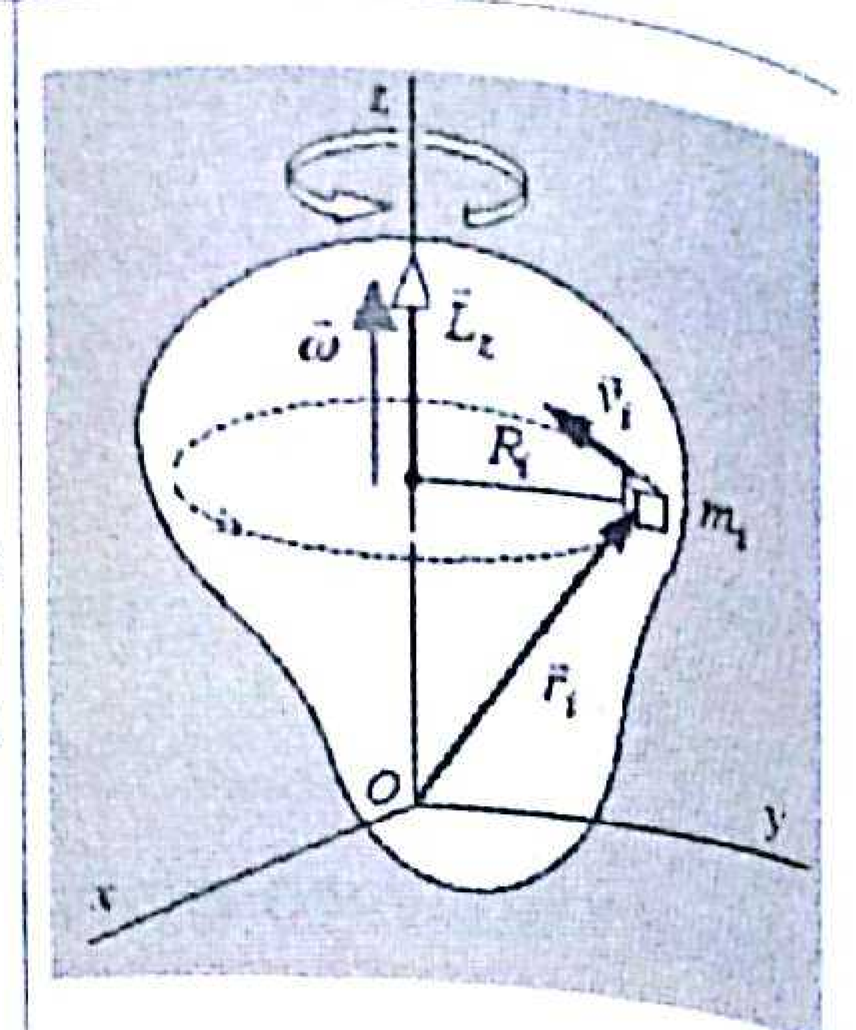
$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}$$

En marco de referencia del CM, (aunque estuviese acelerado)

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS: EJE FIJO

Suponga un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo (que tomamos como eje z) con velocidad angular ω. El origen puede estar en cualquier punto del eje de rotación. Un elemento de masa m_i ubicado por el vector posición $\vec{r}_i$ desde el origen O, tiene un momento angular cuya componente z es: $l_{iz} = m_i R_i^2 \omega$, siendo R_i el radio del circulo que describe la partícula. La componente z del momento angular total del cuerpo rígido es:

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega = (\sum m_i R_i^2)\omega$$



Cuerpos de forma arbitraria que giran en torno a un eje fijo

Aquí la sumatoria es el momento de inercia I del cuerpo respecto del eje de rotación, por lo tanto:

$$L_z = I\omega$$

$$\boxed{L_z = I\omega}$$

Esta relación escalar para la componente del momento angular a lo largo del eje de rotación z, es siempre válida para cualquier cuerpo rígido, simétrico o no, que gira con respecto a un eje fijo.

Si el cuerpo tiene simetría axial con respecto al eje de rotación, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son paralelos y podemos escribir la relación vectorial:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Cuerpos simétricos con relación al eje de rotación

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Para otras situaciones, la relación vectorial no siempre es válida, porque los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ pueden apuntar en direcciones diferentes.

IMPULSO ANGULAR

El impulso angular de un torque es el análogo rotacional del impulso lineal de una fuerza. Si integramos la expresión, $\vec{\tau}_{ext} = d\vec{L}/dt$, se define el impulso angular ejercido sobre un cuerpo entre los instantes t_1 y t_2, por la relación:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{ext} dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1)$$

El impulso angular es igual al cambio del momento angular

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{ext} dt = \Delta\vec{L}}$$

De modo que el impulso angular sobre un cuerpo es igual al cambio en su momento angular.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Partiendo de la relación entre torque neto externo y el momento angular, podemos escribir:

$$\vec{\tau}_{neto} = d\vec{L}/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}$$

Ley de conservación del momento angular

$$\boxed{\begin{array}{c} Si\ \vec{\tau}_{neto} = 0 \\ \vec{L} = constante \end{array}}$$

Es decir, si el torque neto que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total de dicho sistema se conserva. Esta es una relación vectorial, lo que significa que cualquier componente de $\vec{L}$ será constante si la correspondiente componente de $\vec{\tau}$ es nula.

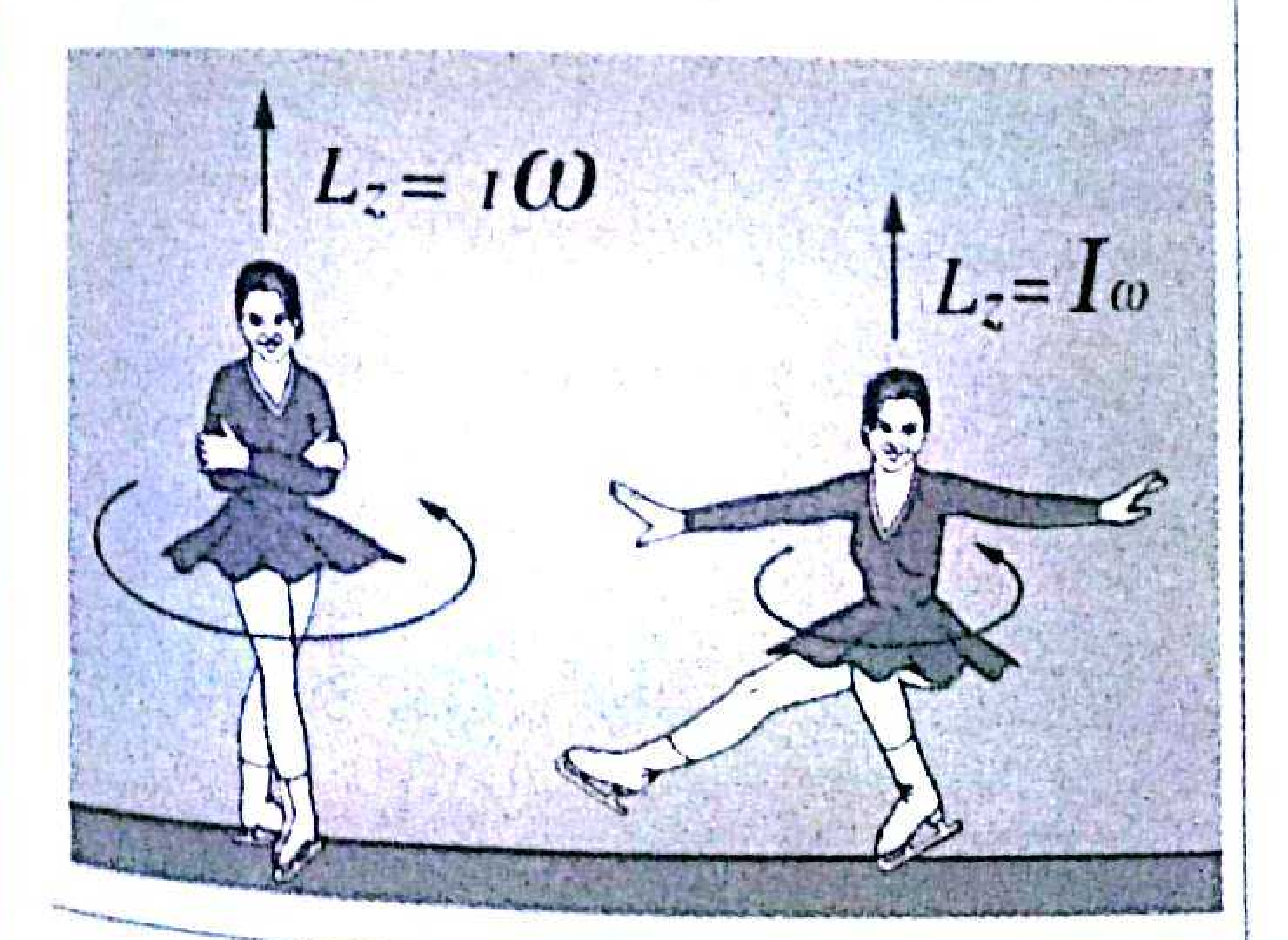
Para un cuerpo rígido que gira con su eje de rotación fijo, si el torque τ_z es nulo, entonces la componente z del momento angular es constante: $L_z = I\omega$. Esto significa que si la inercia de rotación del cuerpo que gira, cambia desde I_1 hasta I_2 por un reacomodo de sus partes, la conservación del momento angular se expresa así:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Si\ \tau_z = 0 \\ I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = Constante \end{array}}$$

La condición anterior implica que si I aumenta (o disminuye) entonces ω debe disminuir (o aumentar).

Por ejemplo, en el caso de una patinadora que ejecuta una rotación sobre una pista de hielo, ella lo que hace es aplicar la relación anterior. Para girar más rápido pega sus manos y pies a su cuerpo (reduciendo su momento de inercia), y para girar mas despacio extiende sus brazos (aumentando su momento de inercia). En ambas situaciones el producto $I\omega$ debe permanecer constante.



Conservación de la componente vertical del momento angular

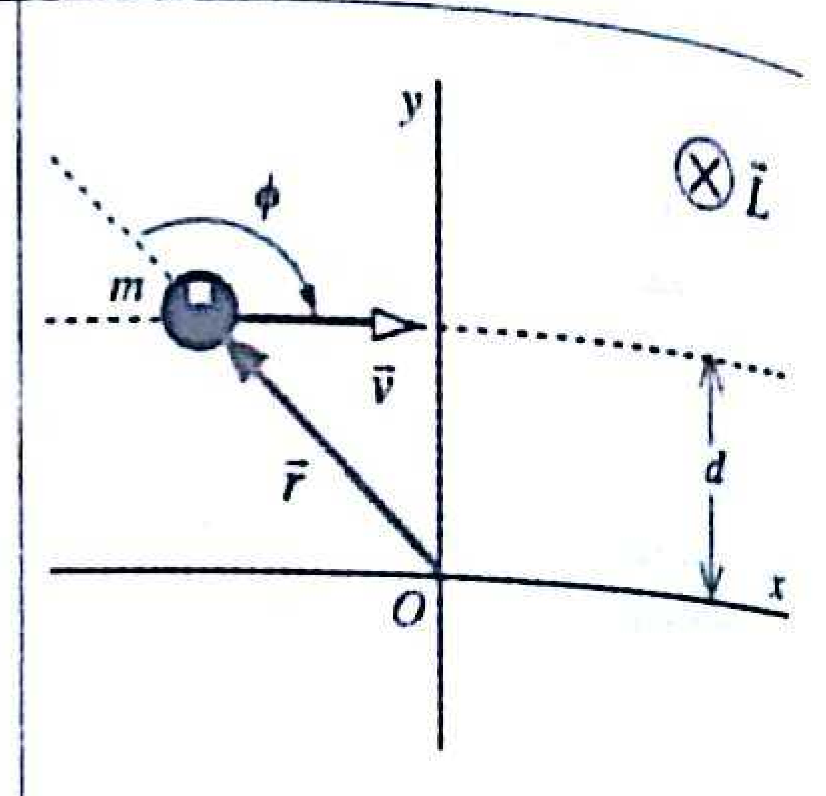
$$I\omega = I\omega = constante$$

PR-4.01. *Va en línea recta y tiene momento angular*

a) Determine el momento angular de una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante v, sobre una línea recta que está a una distancia d del origen.

b) Dos partículas de masa m viajan con igual velocidad v en sentidos opuestos, a lo largo de líneas paralelas separadas por una distancia d. ¿Cuál es el momento angular total con respecto a cualquier origen?

Solución: a) Según se indica en la figura los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo ϕ en un cierto instante de tiempo. El momento angular respecto al origen O es:

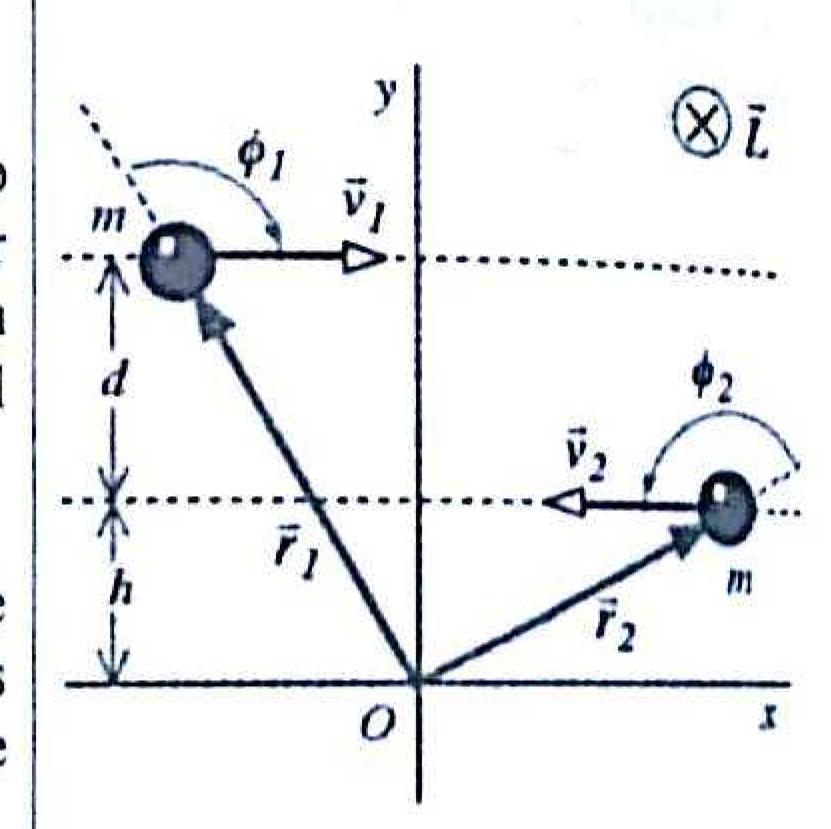


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmvsen\phi(-\hat{z})$$

La distancia $rsen\phi$ es precisamente la distancia perpendicular, d, que hay desde la línea de movimiento al origen. Por lo tanto, el momento angular será constante:

$$\vec{L} = mvd(-\hat{z})$$

De modo que una partícula aun si no está girando, pero moviéndose en línea recta, tiene momento angular respecto a un punto que no esté situado sobre su trayectoria. El momento angular depende del origen del marco de referencia.



b) Si tenemos dos partículas de igual masa, moviéndose en líneas paralelas con velocidades iguales en sentidos opuestos, el momento angular total es la suma vectorial de los momentos angulares individuales:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = mv(d+h)(-\hat{z}) + mvh)(+\hat{z})$$

$$\vec{L} = mvd(-\hat{z})$$

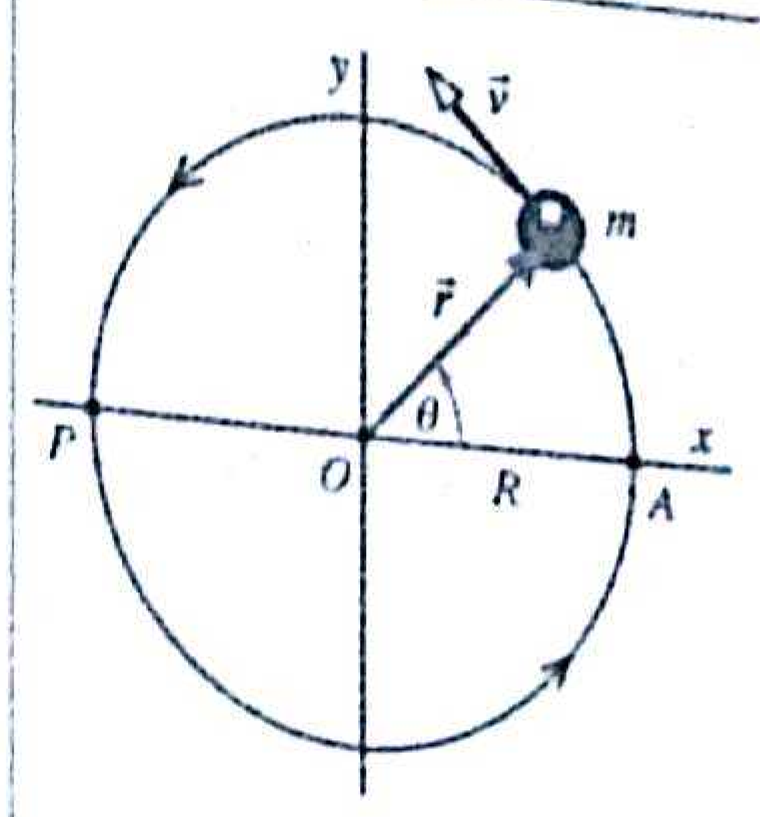
El resultado sería el mismo si el origen de coordenadas estuviese ubicado en un punto entre las líneas de movimiento. Vemos que este resultado no depende de la ubicación del origen.

Respuesta:

a) $\vec{L} = mvd(-\hat{z})$. Es constante en el tiempo. Depende del origen.
b) $\vec{L} = mvd(-\hat{z})$. No depende del origen

PR-4.02. *Momento angular de una partícula en rotación*

Una partícula de masa m parte del punto A y se mueve en el plano x-y en una trayectoria circular de radio R, con una rapidez constante v.



Determine su momento angular:
a) Relativo al punto O en el centro de la circunferencia.
b) Relativo al punto P diametralmente opuesto al punto A.

Solución: a) Con respecto al centro del círculo, el vector posición $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$ son, respectivamente:

$$\vec{r} = R\cos\theta\hat{x} + Rsen\theta\hat{y}$$

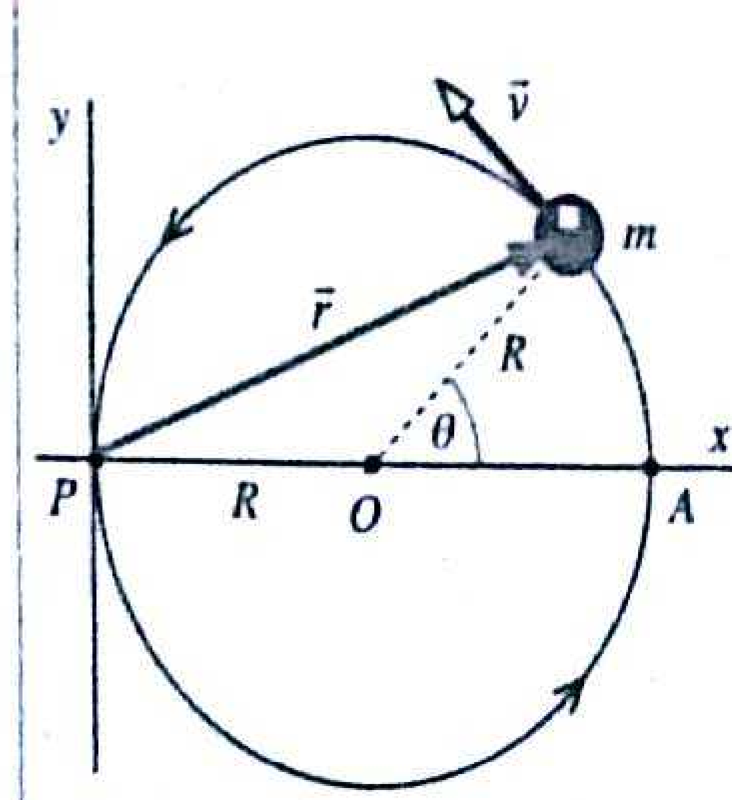
$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -R\omega sen\theta\hat{x} + R\omega\cos\theta\hat{y}$$

Donde $\omega = d\theta/dt$ y $v = \omega R$. El momento angular es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{L} = m(R\cos\theta\hat{x} + Rsen\theta\hat{y}) \times (-R\omega sen\theta\hat{x} + R\omega\cos\theta\hat{y})$$

$$\vec{L} = mR^2\omega(\cos^2\theta + sen^2\theta)\hat{z} = mR^2\omega\hat{z} = mvR\hat{z}$$



b) Respecto al punto P, el vector posición $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$ son, respectivamente:

$$\vec{r} = R\hat{x} + R\cos\theta\hat{x} + Rsen\theta\hat{y}$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -R\omega sen\theta\hat{x} + R\omega\cos\theta\hat{y}$$

Por lo tanto, el momento angular de la partícula es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{L} = mR[(1+\cos\theta)\hat{x} + sen\theta\hat{y}] \times R\omega(-sen\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$$

$$\vec{L} = mR^2\omega[(1+\cos\theta)\cos\theta + sen^2\theta]\hat{z} = mR^2\omega(1+\cos\theta)\hat{z}$$

$$\vec{L} = mvR(1+\cos\theta)\hat{z} = mvR(1+\cos\frac{v}{R}t)\hat{z}$$

Observe que en este caso, el módulo del momento angular $\vec{L}$ varía con el tiempo.

Respuesta:

a) $\vec{L}_O = mvR\hat{z}$ = constante
b) $\vec{L}_P = mvR(1+\cos\frac{v}{R}t)\hat{z}$

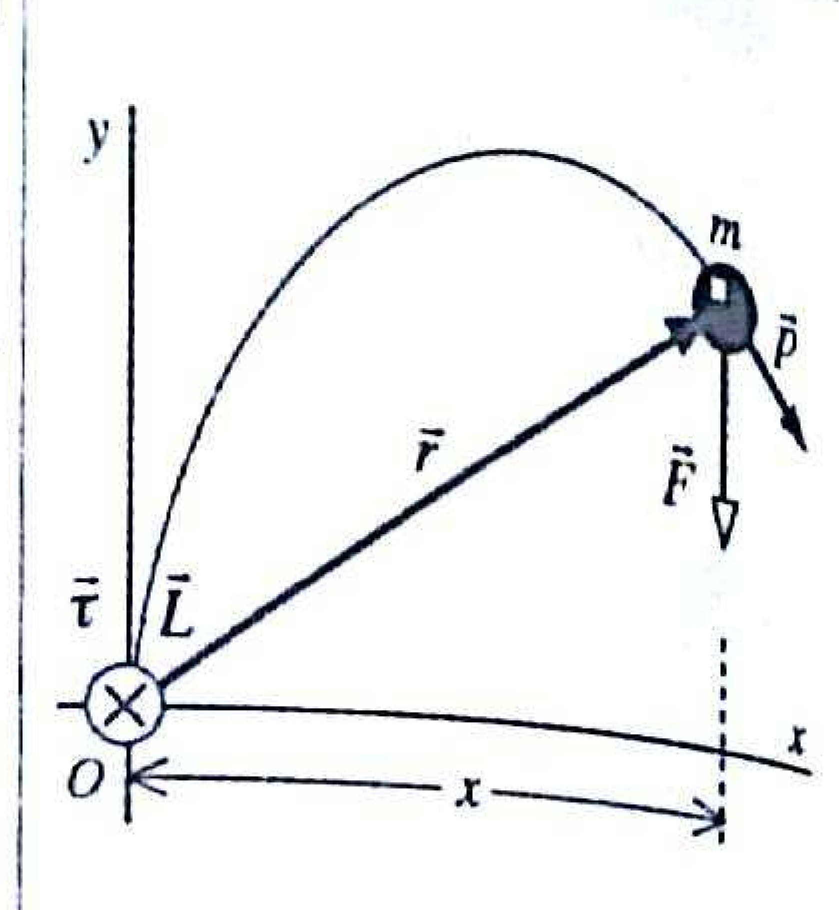
PR-4.03. *Torque y momento angular en caída libre*

Una partícula se lanza al aire y sigue una trayectoria parabólica bajo la acción de la gravedad. Verifique que, respecto a un punto dado, se cumple la relación entre el torque y el momento angular:

$$d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$$

Solución: a) En un instante dado el vector posición del proyectil es:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}.$$



El torque que ejerce la fuerza de gravedad: $\vec{F} = -mg\hat{y}$, respecto al origen O, es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (x\hat{x} + y\hat{y}) \times (-mg\hat{y}) = -(mgx)\hat{z}$$

Como la cantidad de movimiento lineal es: $\vec{p} = -mv\hat{y}$, el momento angular será:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{x} + y\hat{y}) \times (-mv\hat{y}) = -(mvx)\hat{z}$$

Derivando respecto al tiempo y tomando en cuenta que x es constante y $dv/dt = g$, tenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{d}{dt}(mvx)\hat{z} = -mv\frac{dx}{dt}\hat{z} - m\frac{dv}{dt}x\hat{z} = -mgx\hat{z}$$

Esta expresión coincide con la del torque, $\vec{\tau} = -(mgx)\hat{z}$ y por lo tanto se verifica la relación: $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$

Respuesta:

a) $\vec{L} = -(mvx)\hat{z}$
$\vec{\tau} = -(mgx)\hat{z}$

b) $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

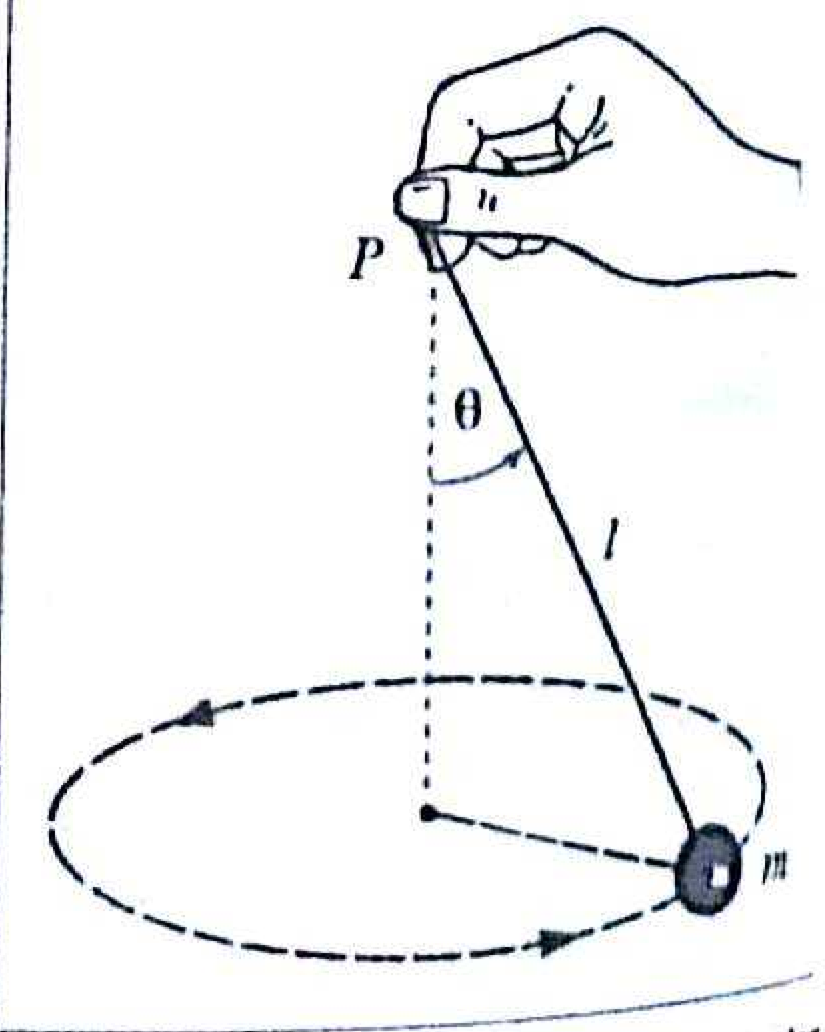
PR-4.04. *Momento angular de un péndulo cónico*

Una esferita de masa m que está sujeta a una cuerda de longitud l se mueve en una circunferencia horizontal como un péndulo cónico. La cuerda da vueltas formando un ángulo constante θ con la vertical. Determine

a) El momento angular respecto al punto de soporte.

b) El torque ejercido por la gravedad respecto al punto de soporte y verifique que se cumple la relación: $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$

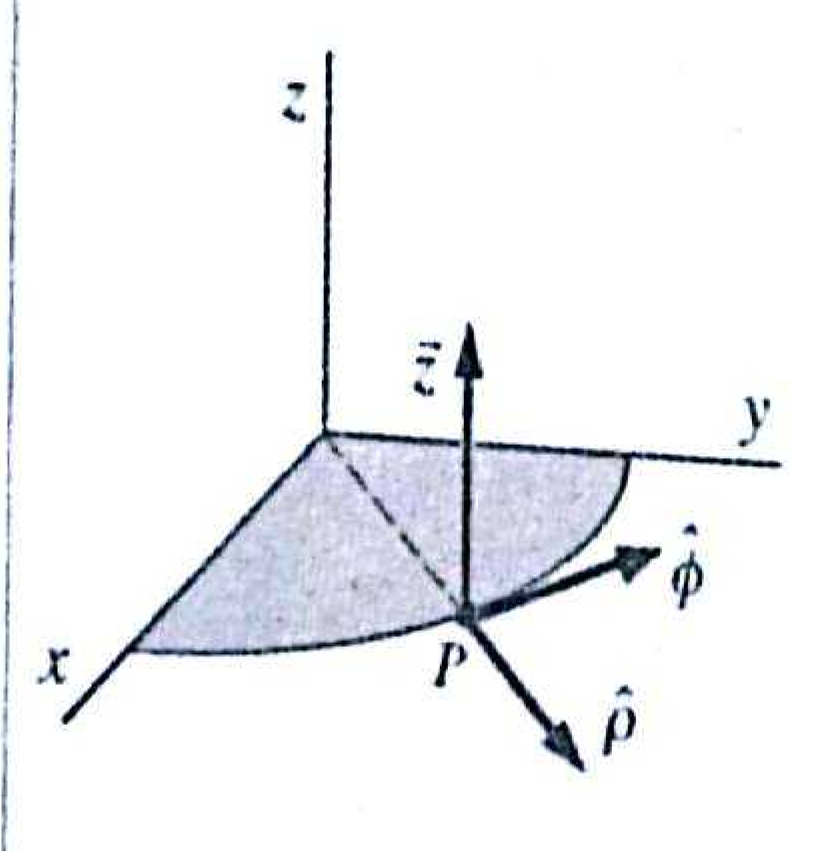
c) Verifique que se cumple la relación: $\vec{L}_z = I\vec{\omega}$.



Solución: a) Las ecuaciones de movimiento de la esferita son:

$$\sum F_r = T sen\theta = m\omega^2 r$$

$$\sum F_z = T cos\theta = mg$$



Eliminando T de este par de ecuaciones, hallamos la velocidad angular:

$$tg\theta = \frac{\omega^2 r}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g tg\theta}{r} = \frac{g tg\theta}{l sen\theta} = \frac{g}{l cos\theta}$$

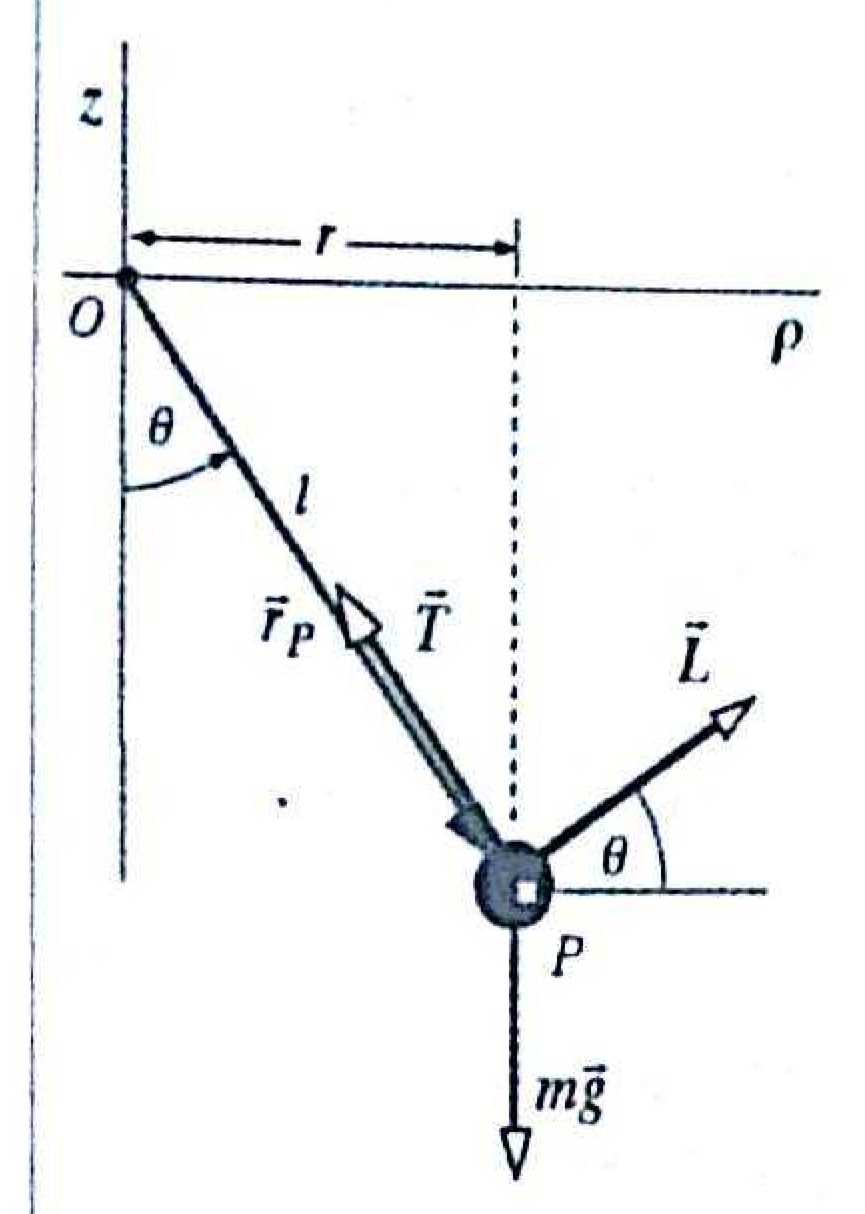
Si usamos coordenadas polares, el momento lineal es:

$$\vec{p} = mv\hat{\phi} = m\omega r\hat{\phi} = m\omega l sen\theta\hat{\phi},$$

y el momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r}_P \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ l sen\theta & 0 & -l cos\theta \\ 0 & m\omega l sen\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = ml^2\omega(cos\theta sen\theta\hat{\rho} + sen^2\theta\hat{z})$$



b) Derivando $\vec{L}$ respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = ml^2\omega(cos\theta sen\theta\frac{d\hat{\rho}}{dt} + sen^2\theta\frac{d\hat{z}}{dt})$$

Las derivadas de los vectores unitarios son:

$$d\hat{z}/dt = 0$$

$$d\hat{\rho}/dt = \vec{\omega} \times \hat{\rho} = \omega(\hat{z} \times \hat{\rho}) = \omega\hat{\phi}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = ml^2(\frac{g}{l cos\theta})cos\theta sen\theta\hat{\phi} = mgl sen\theta\hat{\phi}$$

Este resultado coincide con el torque de la fuerza de gravedad:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_P \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ l sen\theta & 0 & -l cos\theta \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = mgl sen\theta\hat{\phi}$$

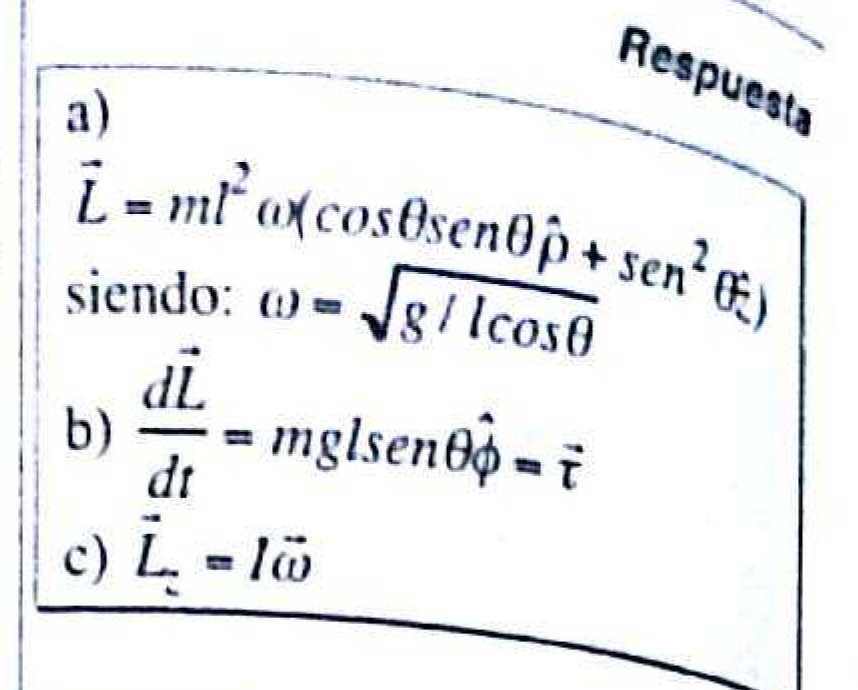
Por lo tanto, se verifica la relación: $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$.

c) El momento de inercia de la esferita respecto al eje de rotación que pasa por O es: $I = mr^2 = m(l sen\theta)^2$, por lo tanto:

$$I\vec{\omega} = (ml^2 sen^2\theta)\omega\hat{z} = \vec{L}_z$$

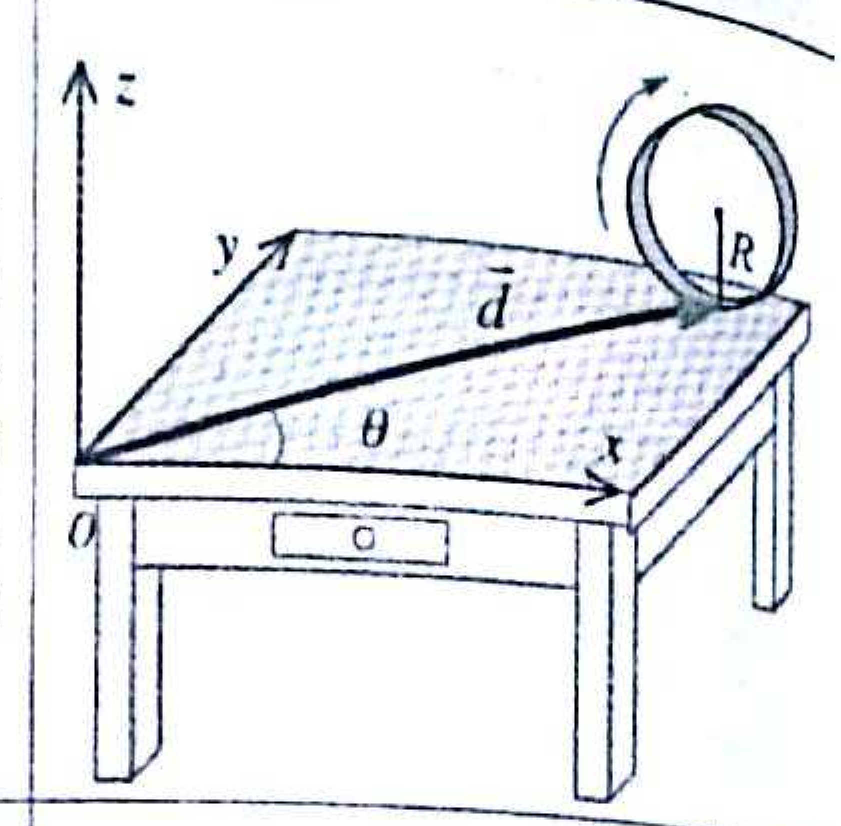
Que es justamente la componente z del vector $\vec{L}$.

Respuesta


a) $\vec{L} = ml^2\omega(cos\theta sen\theta\hat{\rho} + sen^2\theta\hat{z})$
siendo: $\omega = \sqrt{g/lcos\theta}$
b) $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = mglsen\theta\hat{\phi} = \vec{\tau}$
c) $\vec{L}_z = I\vec{\omega}$

PR-4.05. *Momento angular de un aro rodando*

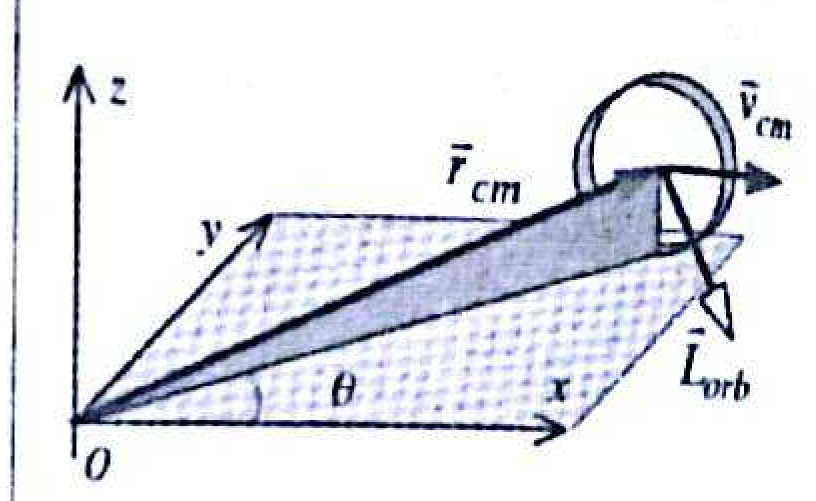
Un aro de radio R y masa m está rodando sin deslizar sobre una mesa horizontal con una velocidad v_{cm} en dirección $+x$. En un cierto instante, el punto de contacto del aro con la superficie de la mesa está a una distancia d del origen O de coordenadas, y a un ángulo θ respecto el eje $+x$. ¿Cuál es el momento angular total del aro respecto al origen en ese instante?



Solución: El vector posición del centro de masas del aro en ese instante es:

$$\vec{r}_{cm} = dcos\theta\hat{x} + dsen\theta\hat{y} + R\hat{z}$$

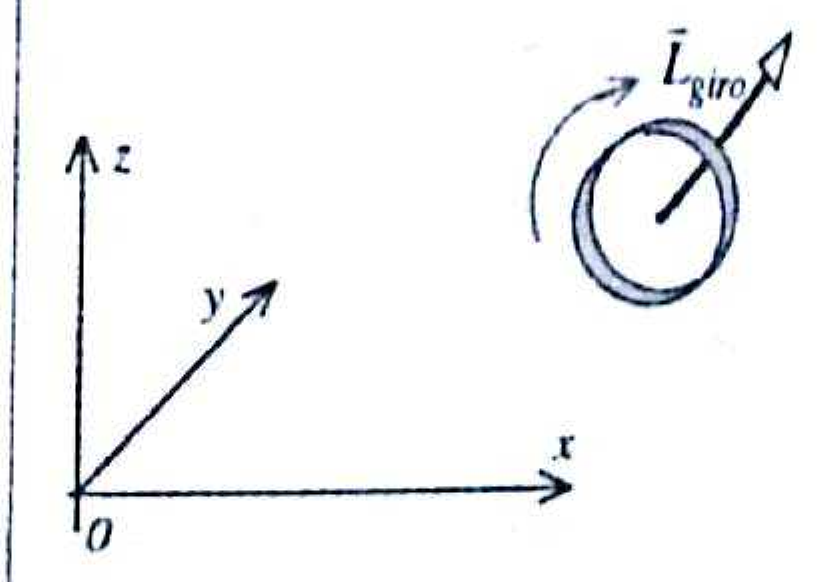
El momento lineal del centro de masa del aro es: $\vec{p}_{cm} = mv_{cm}\hat{x}$. Por lo tanto, el momento angular "orbital" del centro de masa del aro respecto a O es:

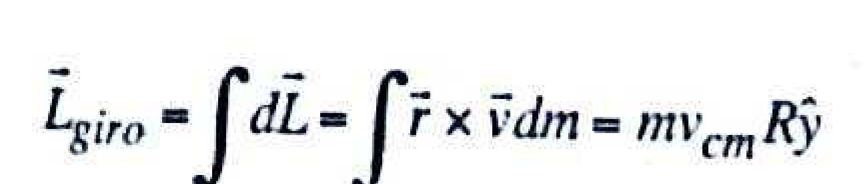


$$\vec{L}_{orb} = \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm} = (dcos\theta\hat{x} + dsen\theta\hat{y} + R\hat{z}) \times (mv_{cm}\hat{x})$$

$$\vec{L}_{orb} = -mv_{cm}dsen\theta\hat{z} + mv_{cm}R\hat{y}$$

Por otra parte, todo diferencial de masa del aro está a igual distancia R del centro de masa y gira con igual rapidez (v_{cm}) alrededor del CM, por lo tanto el momento angular de giro alrededor del CM es:





$$\vec{L}_{giro} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}dm = mv_{cm}R\hat{y}$$

El momento angular total del aro es la suma de dos partes: una correspondiente al movimiento del CM y la otra proveniente del movimiento del cuerpo respecto al CM:

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{giro} = 2mv_{cm}R\hat{y} - mv_{cm}dsen\theta\hat{z}$$

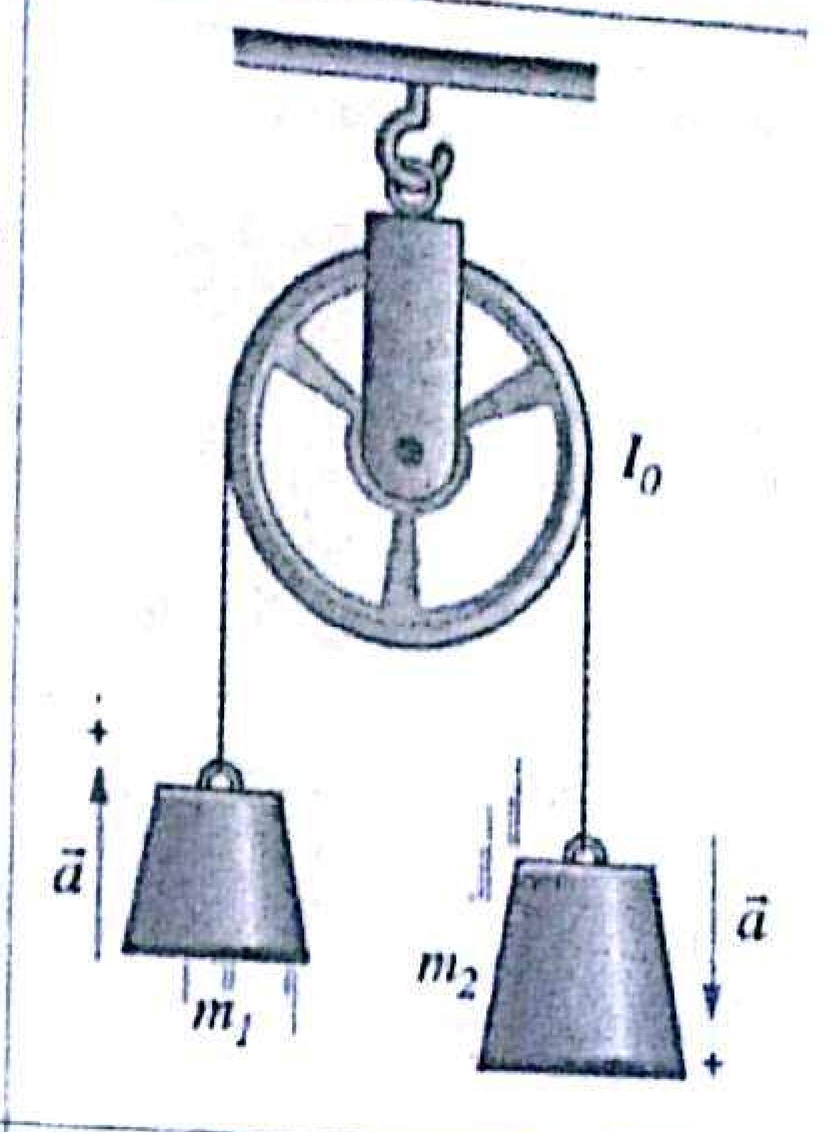
Respuesta:

$\vec{L}_{orb} = -mv_{cm}dsen\theta\hat{z} + mv_{cm}R\hat{y}$
$\vec{L}_{giro} = mv_{cm}R\hat{y}$
$\vec{L}_{total} = 2mv_{cm}R\hat{y} - mv_{cm}dsen\theta\hat{z}$

PR-4.06. *Momento angular en la máquina de Atwood*

Una máquina de Atwood consiste de una polea de radio R y momento de inercia I_o alrededor de su eje; que tiene dos pesas de masas m_1 y m_2 suspendidas a cada lado mediante una cuerda.

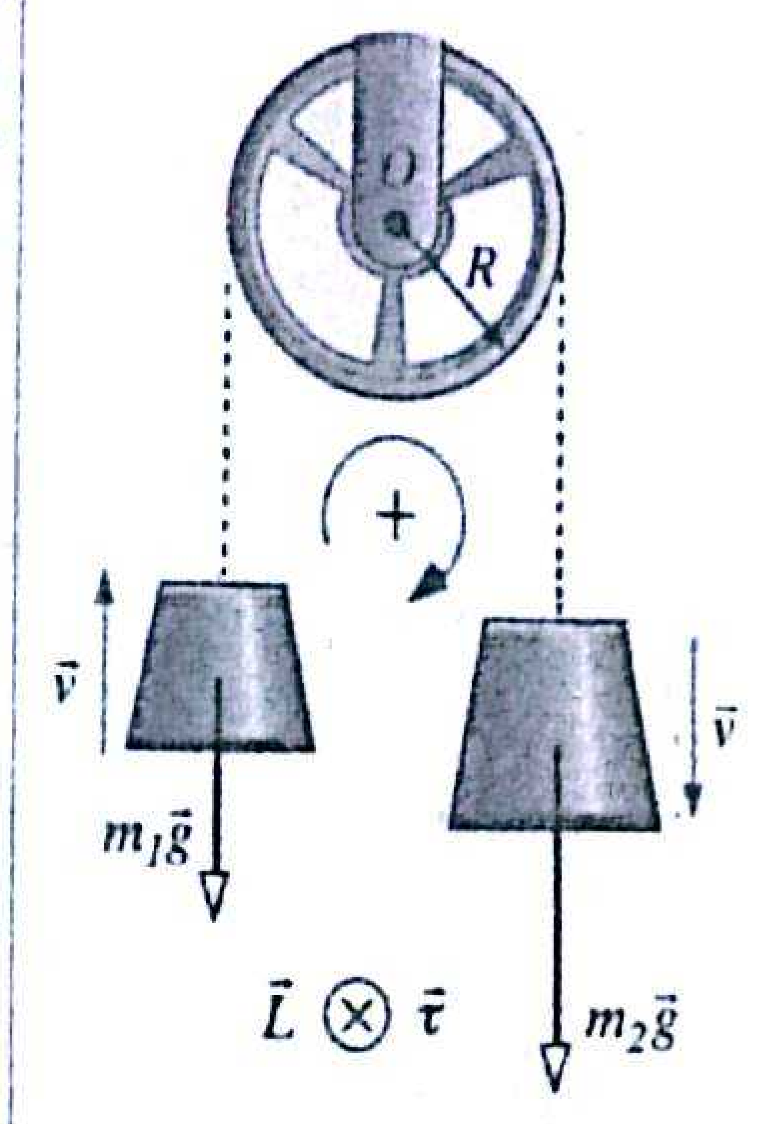
Determine el torque y el momento angular del sistema respecto al eje que pasa por el centro de la polea y aplique la relación: $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$, para hallar la aceleración lineal de las pesas.



Solución: Cuando evaluamos el torque externo total sobre el sistema, la fuerza sobre el eje de la polea no contribuye por no tener brazo, ni tampoco las fuerzas ejercidas por la cuerda sobre cada uno de los objetos, por ser estas fuerzas internas. Solo contribuyen al torque neto, las fuerzas externas $m_1\vec{g}$ y $m_2\vec{g}$ que tienen brazos de palanca R respecto al punto O:

$$\tau_{neto} = \tau_2 - \tau_1 = m_2gR - m_1gR = (m_2 - m_1)gR$$

En el instante en que las pesas m_1 y m_2 tienen velocidad v, la polea tiene velocidad angular $\omega = v/R$. Las tres contribuciones al momento angular apuntan en la misma dirección:



$$L = m_1vR + m_2vR + I_0\omega = (m_1 + m_2)vR + I_0\frac{v}{R}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo y aplicando la relación: $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}_{neto}$, en forma escalar nos da:

$$\frac{dL}{dt} = [(m_1 + m_2)R + \frac{I_0}{R}]\frac{dv}{dt} = (m_2 - m_1)gR$$

Puesto que $dv/dt = a$, tenemos:

$$[(m_1 + m_2)R + \frac{I_0}{R}]a = (m_2 - m_1)gR$$

Despejando, la aceleración de las pesas es:

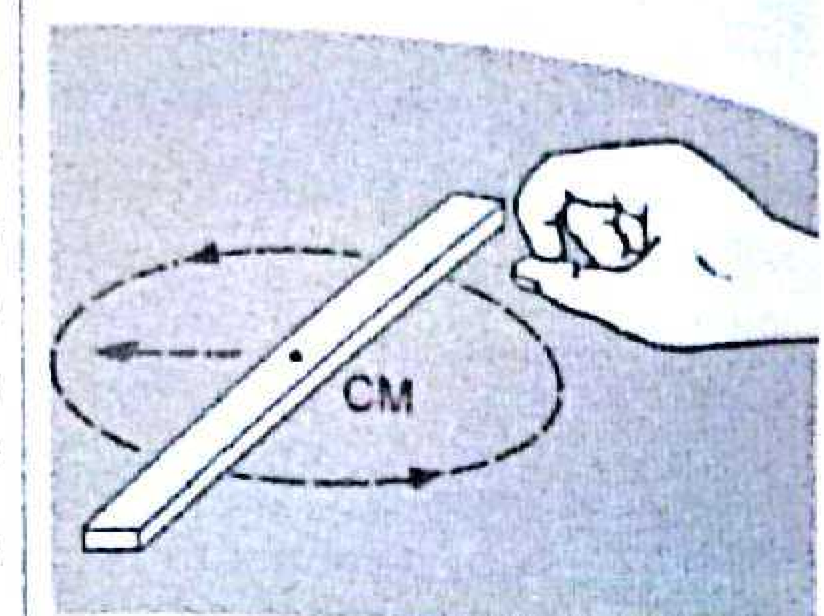
$$a = \frac{(m_2 - m_1)gR}{(m_1 + m_2)R + \frac{I_0}{R}} = (\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}})g$$

Respuesta

$$a = (\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}})g$$

PR-4.07. *Un golpe seco sobre el extremo de la barra*

Una barra delgada de longitud L está inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal lisa. Se le da a la barra un golpe repentino sobre uno de sus extremos perpendicularmente a su longitud. ¿Cuál será la distancia que se desplaza el centro de masa de la barra mientras da una vuelta completa alrededor de su centro de masa? Demuestre que el resultado es independiente de la masa de la barra y de la magnitud del impulso recibido.



Solución: Durante el breve intervalo de tiempo en que actúa la fuerza $\vec{F}$, comunica al CM de la barra una velocidad de traslación. El impulso lineal de la fuerza es igual al cambio en el momento lineal de la barra:

$$\frac{dp}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad \int F dt = \int dp = p_2 - p_1$$

$$\int F dt = M(v_{cm} - 0) \qquad (1)$$

El impulso angular del torque comunica a la barra un cambio en su momento angular:

$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad \Rightarrow \quad \int \tau dt = \int dL = L_2 - L_1$$

$$\int \frac{L}{2} F dt = \frac{L}{2} \int F dt = I_0(\omega - 0) \qquad (2)$$

Siendo el momento de inercia de la barra respecto a su centro de masa: $I_{cm} = ML^2/12$. Sustituyendo (1) en (2):

$$\frac{L}{2}(Mv_{cm}) = \frac{ML^2}{12}\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{6v_{cm}}{L}$$

El tiempo que toma la barra en completar una revolución es:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6v_{cm}/L} = \frac{\pi L}{3v_{cm}}$$

El desplazamiento del CM en ese intervalo de tiempo es:

$$d_{cm} = v_{cm}\Delta t = v_{cm}\left(\frac{\pi L}{3v_{cm}}\right) = \frac{\pi}{3}L$$

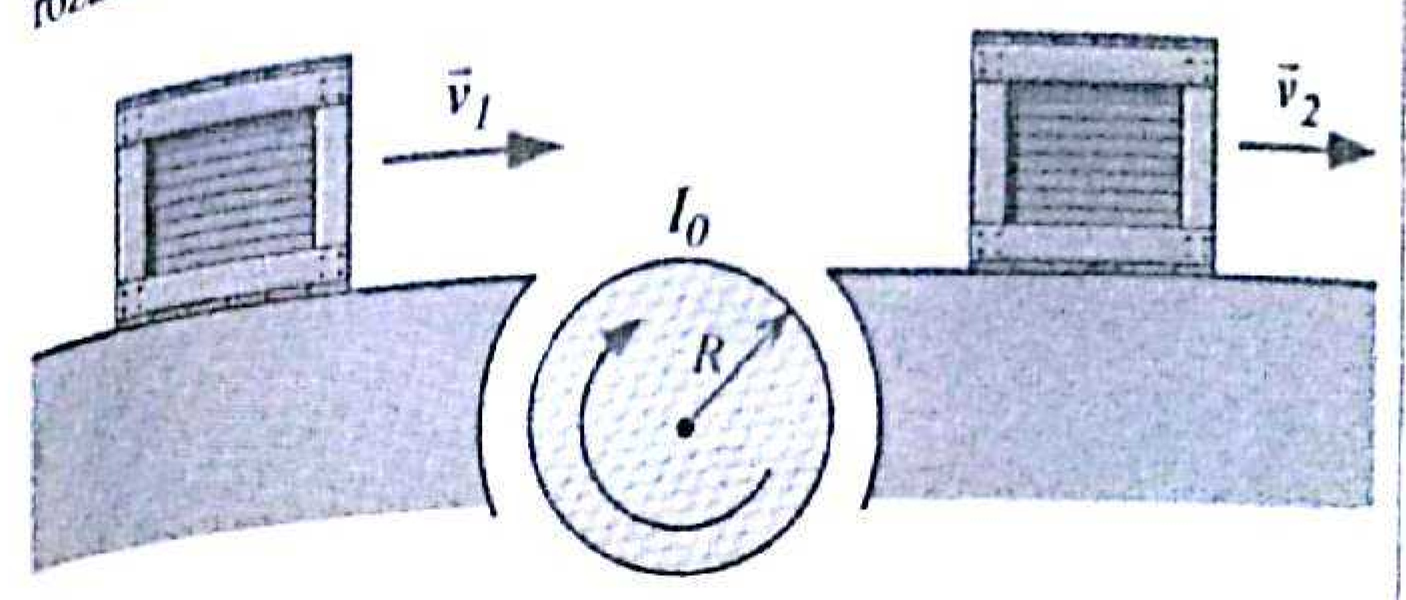
Respuesta

$$d_{cm} = \frac{\pi}{3}L$$

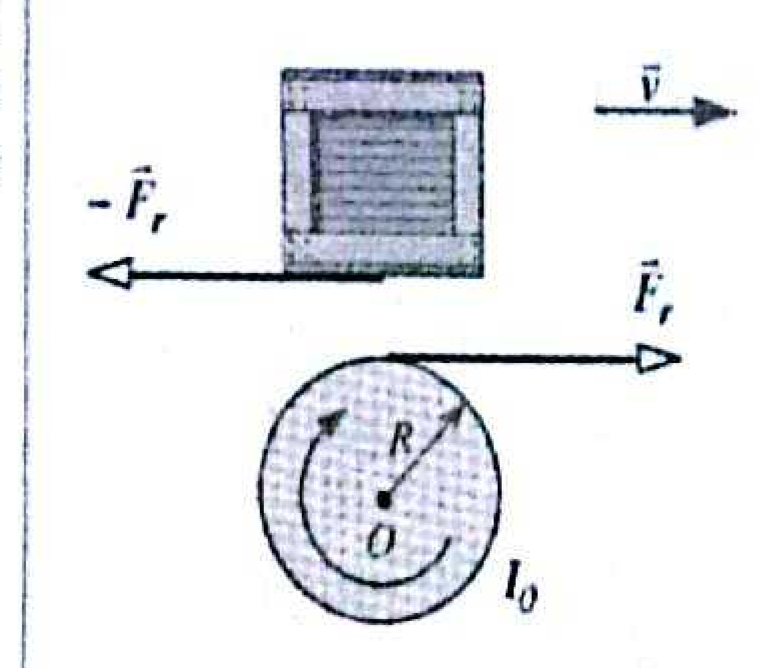
No depende ni de la masa, ni del impulso

PR 4.08. *El rodillo disminuye la marcha del cajón*

Un cajón de masa M se está moviendo inicialmente con velocidad v_1 hacia la derecha sobre un plano sin rozamiento. El cajón pasa sobre un cilindro de radio R y momento de inercia I_0, inicialmente en reposo y cuyo eje está fijo. Al comienzo, el cajón desliza pero la fricción es suficientemente grande como para que el deslizamiento cese antes de que pierda contacto con el cilindro. Halle la velocidad final, v_2 del cajón.



Solución: El cilindro ejerce sobre el cajón una fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$, que en virtud de la tercera ley de Newton, es igual y opuesta a la que ejerce el cajón sobre el cilindro. El impulso lineal que ejerce esta fuerza sobre el cajón le imprime un cambio en su cantidad de movimiento lineal:



$$\frac{dp}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 F dt = \int_1^2 dp = p_2 - p_1$$

$$-\int_1^2 F_r dt = Mv_2 - Mv_1 \qquad (1)$$

Por otra parte, el impulso angular que recibe el cilindro es igual al cambio de su momento angular:

$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \tau dt = \int_1^2 dL = L_2 - L_1$$

$$\int_1^2 RF_r dt = R\int_1^2 F_r dt = I_0\omega_2 - I_0\omega_1 \qquad (2)$$

La velocidad angular inicial del cilindro es nula, $\omega_1 = 0$, y cuando cesa el deslizamiento se cumple $v_2 = \omega_2 R$. Usando estos valores y sustituyendo la expresión (1) en la (2), se obtiene:

$$-R(Mv_2 - Mv_1) = I_0\omega_2 = I_0\left(\frac{v_2}{R}\right)$$

Por lo tanto, la velocidad final del cajón es:

$$v_2 = \frac{v_1}{1 + I_0/MR^2}$$

Respuesta:

$$v_2 = \frac{v_1}{1 + I_0/MR^2}$$

PR-4.09. ¿Dónde se debe golpear una bola de billar?

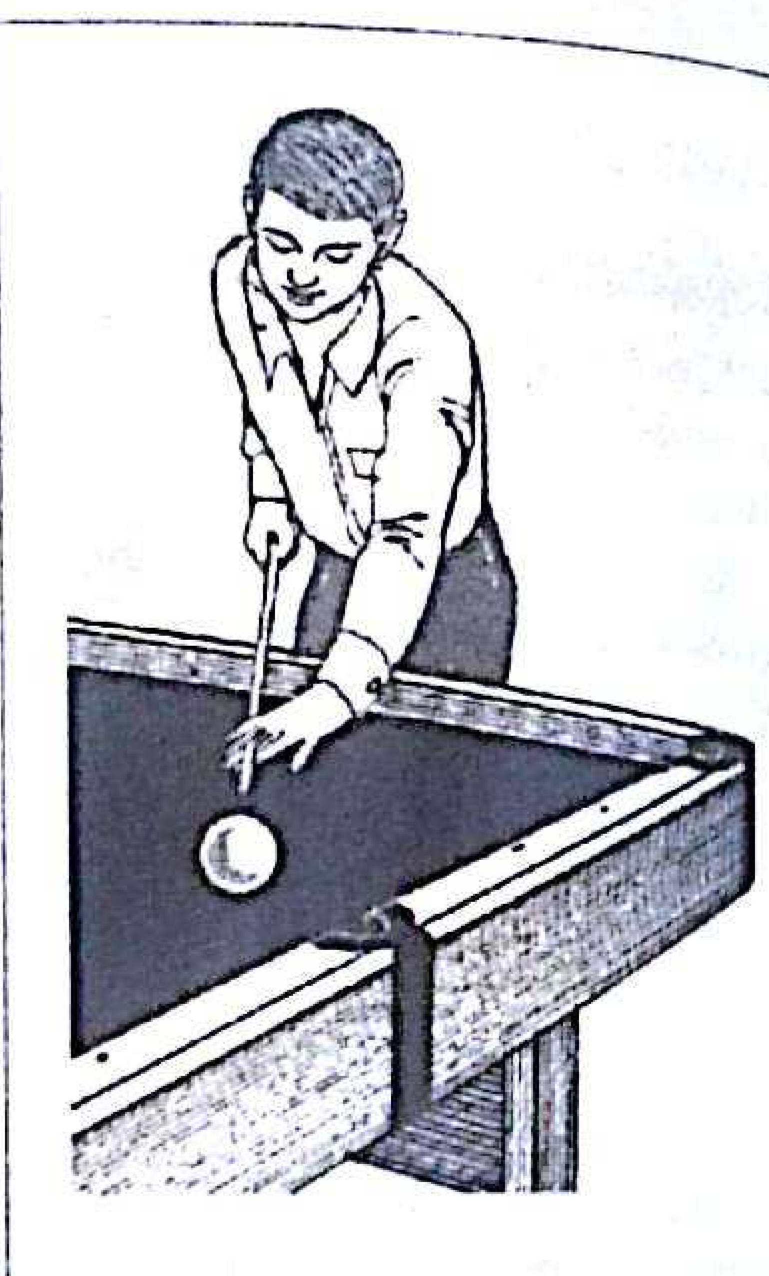
Mediante un taco se golpea una bola de billar de radio R, aplicándole una fuerza horizontal de gran magnitud y durante un intervalo de tiempo pequeño.

a) ¿Qué relación guarda la velocidad angular con la velocidad lineal de la bola, después del impulso?

b) ¿A qué altura H por encima de la superficie de la mesa se debe golpear la bola para que ésta empiece a rodar sin deslizamiento inmediatamente después del golpe?

Solución: a) El impulso lineal que ejerce el taco sobre la bola inicialmente en reposo, es igual al cambio en su cantidad de movimiento lineal:

$$\int F dt = \Delta p = mv \qquad \text{(i)}$$

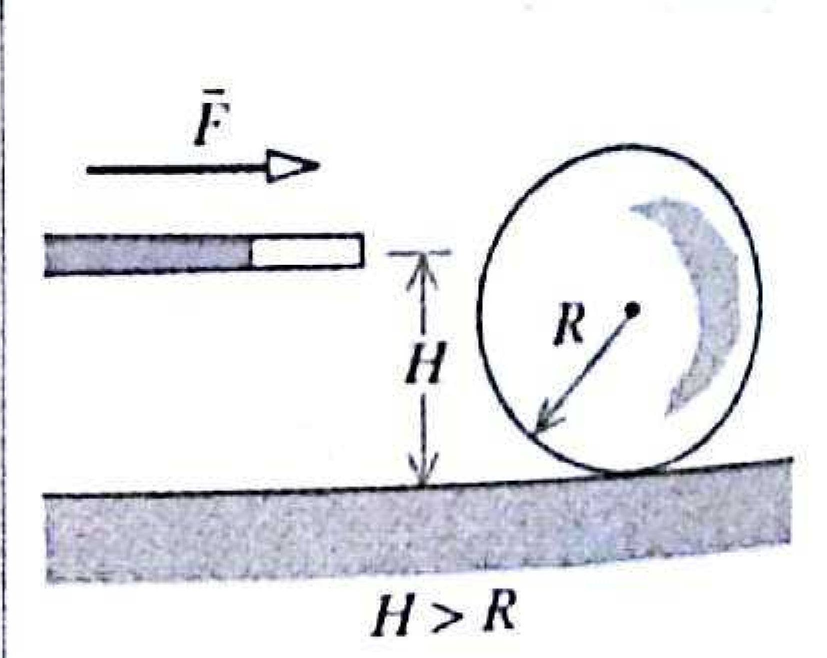


Por otra parte, el taco también le comunica a la bola un impulso angular, el cual es igual al cambio en su cantidad de movimiento angular:

$$\int \tau dt = (H-R)\int F dt = \Delta L = I_{cm}\omega \qquad \text{(ii)}$$

Sustituyendo el impulso de la ecuación (i) en la ecuación (ii) y puesto que el momento de inercia de una esfera sólida respecto a su centro de masa es: $I_{cm} = 2mR^2/5$, hallamos la relación entre v y ω:

$$(H-R)mv = I_{cm}\omega \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{5}\frac{R^2}{(H-R)}\omega$$



$H > R$

b) La condición para que la bola ruede sin resbalar desde el comienzo es: $v_{cm} = R\omega$. Por lo tanto:

$$\frac{2}{5}\frac{R^2}{(H-R)}\omega = R\omega$$

$$2R^2 = 5R(H-R) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{7}{5}R$$

En conclusión, para que la bola no patine se debe golpear no en su centro, sino a una altura (2/5)R sobre el centro.

Respuesta:

a) $v = \dfrac{2}{5}\dfrac{R^2}{(H-R)}\omega$

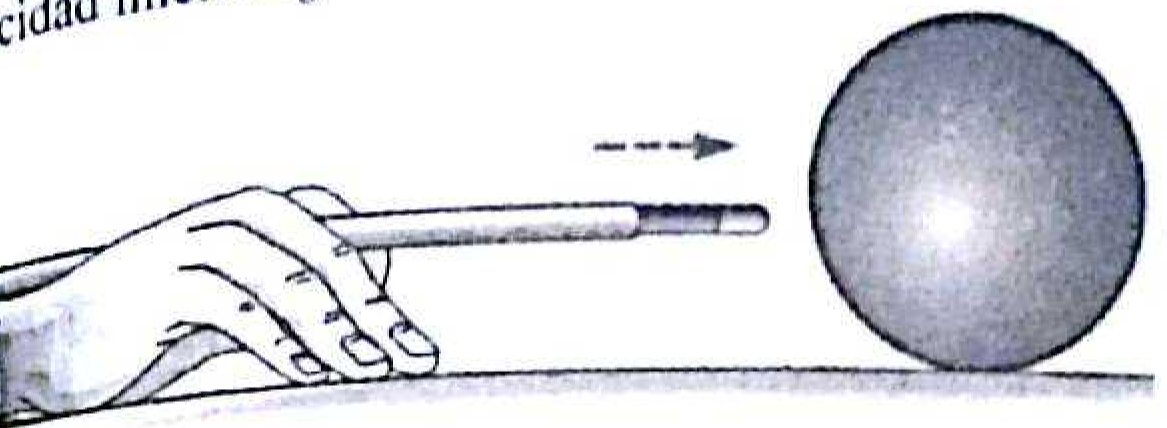
b) $H = \dfrac{7}{5}R$

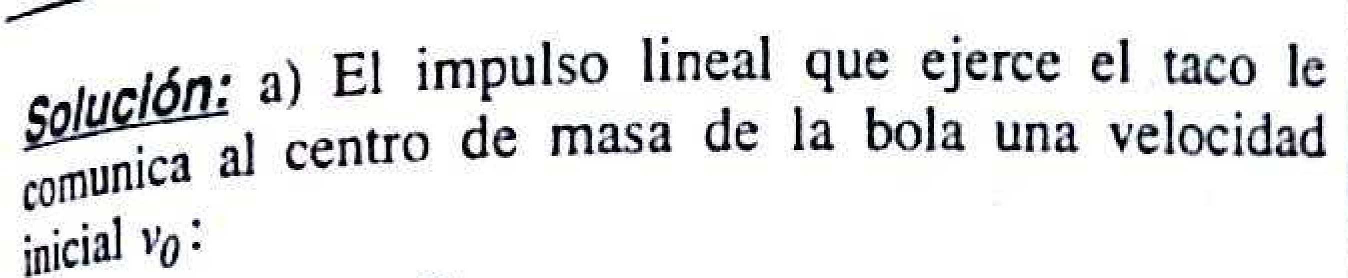
PR-4.10. Bola de billar golpeada por debajo del centro

Una bola de billar de masa m y radio R, inicialmente en reposo recibe un golpe instantáneo mediante un taco. El impulso se aplica en dirección horizontal a una distancia $2R/3$ por debajo del centro de la bola y esta adquiere una velocidad inicial v_0.

a) Determine la velocidad de la bola cuando empieza a rodar sin deslizar.

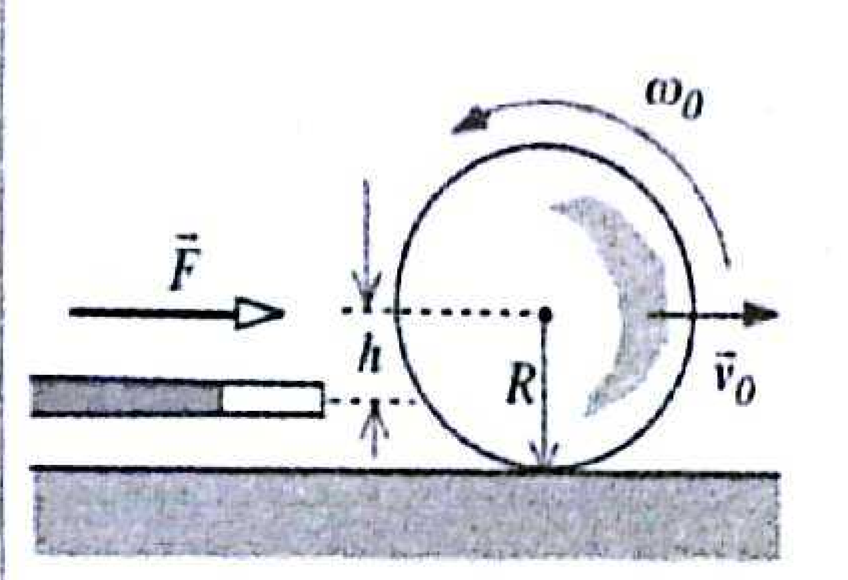
b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante el deslizamiento de la bola.





Solución: a) El impulso lineal que ejerce el taco le comunica al centro de masa de la bola una velocidad inicial v_0:

$$\int F dt = \Delta p = mv_0$$



Al mismo tiempo el impulso angular le comunica una velocidad angular ω_0:

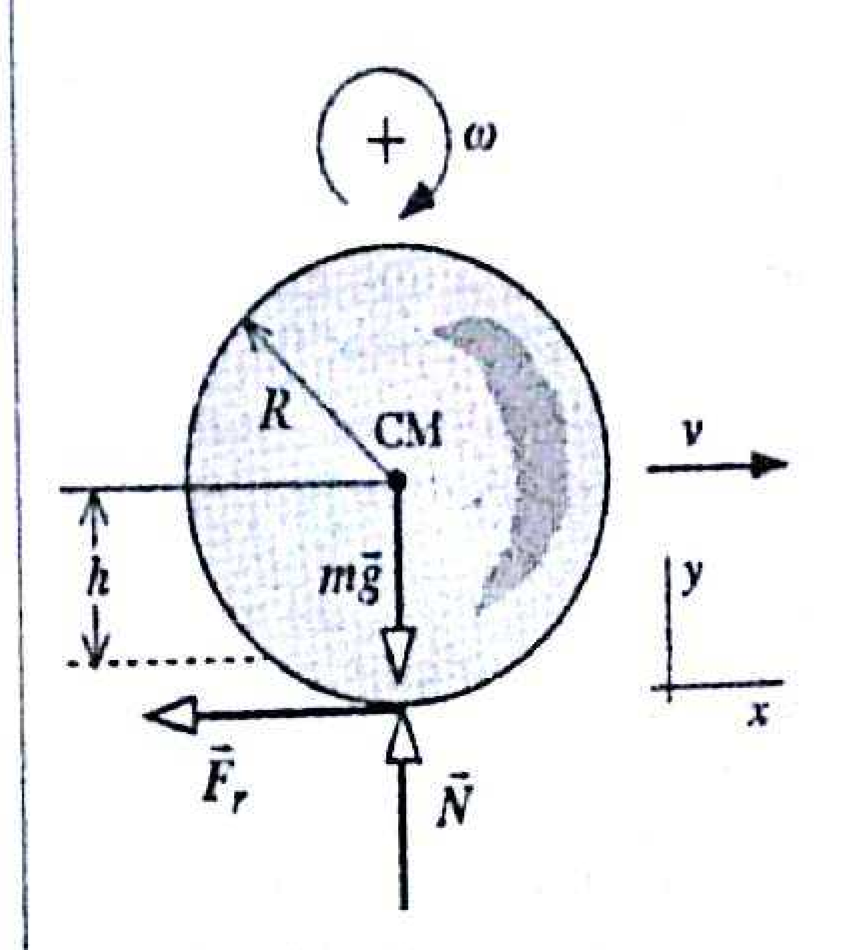
$$\int \tau dt = h\int F dt = I_{cm}\omega_0$$

$$\frac{2}{3}R(mv_0) = (\frac{2}{5}mR^2)\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R}$$

El movimiento posterior de la bola viene gobernado por la fuerza de rozamiento F_r:

$$\sum F_x = -F_r = ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = -\frac{F_r}{m}$$

$$\sum \tau_{cm} = F_r R = I_{cm}\alpha \quad \Rightarrow \alpha = \frac{F_r R}{I_{cm}} = \frac{F_r R}{2mR^2/5} = \frac{5}{2}\frac{F_r}{mR}$$



La bola tiene un movimiento de traslación uniformemente retardado con velocidad inicial v_0 y aceleración a_{cm} y de rotación uniformemente acelerado con velocidad angular $-\omega_0$ y aceleración angular α:

$$v(t) = v_0 + a_{cm}t = v_0 - \frac{F_r}{m}t$$

$$\omega(t) = -\omega_0 + \alpha t = -\omega_0 + \frac{5}{2}\frac{F_r}{mR}t$$

Imponiendo la condición: $v(t) = \omega(t)R$ para la rodadura sin deslizamiento, se obtiene la relación:

$$\frac{F_r}{m}t = \frac{16}{21}v_0$$

Sustituyendo de vuelta en las expresiones anteriores se obtienen las velocidades finales:

$$v = v_0 - \frac{16}{21}v_0 = \frac{5}{21}v_0 = \omega R$$

b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante el deslizamiento de la bola es igual a la disminución de su energía cinética.

$$W = K_i - K_f = (\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2) - (\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2)$$

$$W = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2) + \frac{1}{2}I_{cm}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{64}{63}mv_0^2$$

Respuesta:

a) $\omega_0 = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R}$

$v = \frac{5}{21}v_0$

$\omega = \frac{5}{21}\frac{v_0}{R}$

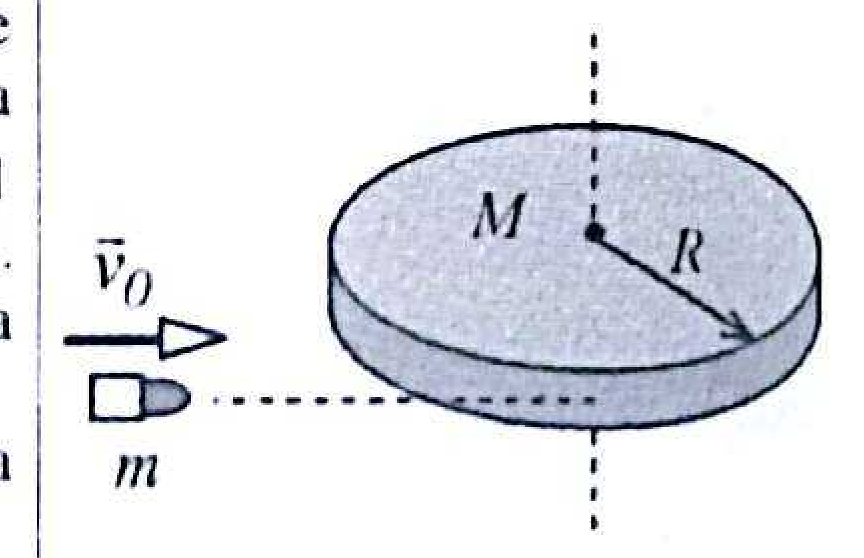
b) $W = \frac{64}{63}mv_0^2$

PR-4.11. *Una bala que hace girar la plataforma*

Una bala de masa m = 50 g es disparada horizontalmente con una velocidad v_o = 400 m/s contra la periferia de una plataforma cilíndrica de radio R = 0,50 m y masa M = 1 kg, la cual es libre de girar alrededor del eje vertical. Determine la velocidad angular de giro de la plataforma después del choque, en los dos casos siguientes:

a) La bala queda incrustada en el borde de la plataforma (choque perfectamente inelástico).

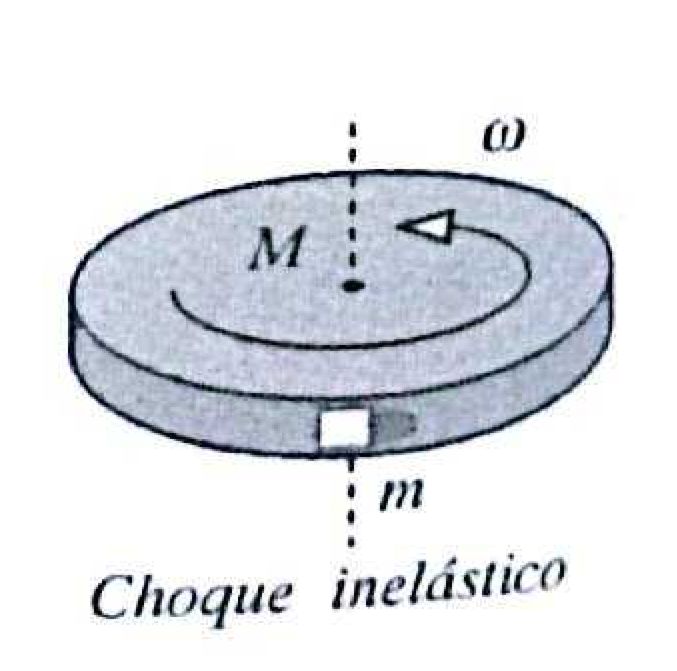
b) La bala rebota de un pequeño diente situado en el borde de la plataforma (choque perfectamente elástico).



Solución: *a) Choque inelástico*: Sobre el sistema cilindro-bala no se ejerce torque externo en torno al eje del cilindro y por lo tanto, la componente vertical de $\vec{L}$ a lo largo de este eje se conserva, $L_{inicial} = L_{final}$:

$$mv_0R = I_0\omega = (mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)\omega$$

$$\omega = \frac{mv_0}{(m + \frac{1}{2}M)R} = \frac{(0{,}05\text{kg})(400\text{m/s})}{(0{,}05\text{kg} + 0{,}5\text{x}1\text{kg})\text{x}0{,}5\text{m}} = 72{,}7\text{rad/s}$$



Choque inelástico

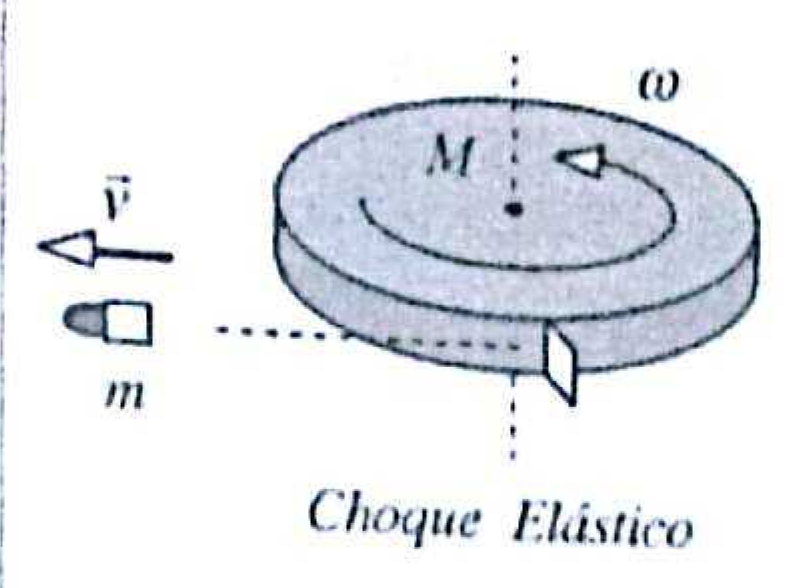
b) Choque elástico: la componente vertical de $\vec{L}$ a lo largo de este eje se conserva: $L_{inicial} = L_{final}$:

$$mv_0R = mvR + I\omega \quad \Rightarrow \quad mR(v_0 - v) = I\omega \qquad (1)$$

Siendo v la velocidad de la bala. En este caso la energía cinética se conserva:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$m(v_0^2 - v^2) = I\omega^2 \qquad (2)$$



Choque Elástico

Combinando las ecuaciones (1) y (2):

$$m(v_0 - v)(v_0 + v) = I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 + v = \omega R$$

Sustituyendo ω de esta ecuación en la primera ecuación, obtenemos la velocidad de rebote de la bala:

$$m(v_0 - v) = \frac{M}{2}(v_0 + v) \quad \Rightarrow \quad v = (\frac{2m - M}{2m + M})v_0$$

$$v = (\frac{2\text{x}0{,}05\text{kg} - 1\text{kg}}{2\text{x}0{,}05\text{kg} + 1\text{kg}})400\text{m/s} = -327{,}3\text{m/s}$$

La velocidad angular de rotación de la plataforma es:

$$\omega = \frac{v_0 + v}{R} = \frac{v_0}{R}(1 + \frac{2m - M}{2m + M}) = \frac{v_0}{R}(\frac{4m}{2m + M})$$

$$\omega = \frac{400\text{m/s}}{0{,}5\text{m}}(\frac{4\text{x}0{,}05\text{kg}}{2\text{x}0{,}05\text{kg} + 1\text{kg}}) = 145\text{rad/s}$$

Respuesta

a) $\omega = \frac{mv_0}{(m + \frac{1}{2}M)R} = 72{,}7\text{rad/s}$

b) $\omega = \frac{v_0}{R}(\frac{4m}{2m + M}) = 145\text{rad/s}$

$v = (\frac{2m - M}{2m + M})v_0 v = -327\text{m/s}$

PR-4.12. *El centro de percusión del bate: Donde se debe golpear la pelota de béisbol*

Un jugador de béisbol sostiene el bate por el mango y golpea la pelota en un punto a una distancia x. Con el fin de no sentir el golpe al batear la pelota, ¿cómo debe el jugador escoger la distancia x?

Para simplificar el problema, suponga que el bate es una barra uniforme de longitud L y que el jugador lo sostiene por un extremo.



Solución: Supongamos que la pelota ejerce una fuerza impulsiva durante un corto intervalo de tiempo Δt, cuyo promedio es F_p. Si el promedio de la fuerza de reacción de la mano del bateador es F_m, el impulso de la fuerza resultante sobre el bate es igual al cambio de su cantidad de movimiento:

$$(F_p - F_m)\Delta t = M\Delta v = Mv_{cm} \qquad (1)$$

El impulso angular alrededor del punto O es debido únicamente a la fuerza ejercida por la pelota.

$$(F_p x)\Delta t = M\Delta L = I_0\omega \qquad (2)$$

Siendo I_0 el momento de inercia del bate alrededor del extremo O. La velocidad angular de rotación está relacionada con la velocidad del centro de masa del bate: $v_{cm} = \omega(l/2)$. Dividiendo la ecuación (1) entre la (2):

$$\frac{(F_p - F_m)\Delta t}{F_p x \Delta t} = \frac{Mv_{cm}}{I_0(\frac{v_{cm}}{l/2})} \quad \Rightarrow \quad F_m = F_p(1 - \frac{Mlx}{2I_0})$$

Si queremos que la fuerza de reacción de la mano sea nula, entonces se debe cumplir:

$$(1 - \frac{Mlx}{2I_0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2I_0}{Ml}$$

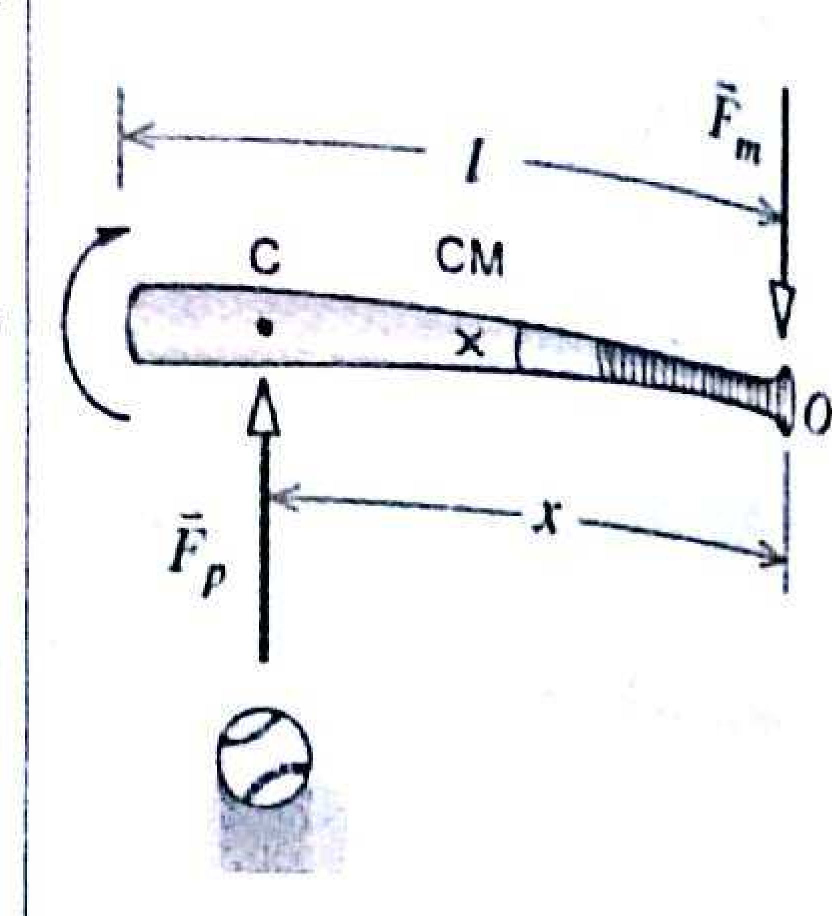
Suponiendo que el bate es una barra uniforme de longitud l, su momento de inercia en torno a O es: $I_0 = Ml^2/3$ y la distancia x buscada es:

$$x = \frac{2(Ml^2/3)}{Ml} = \frac{2}{3}l$$

El punto C de aplicación del golpe se llama *centro de percusión*. Cuando se golpea la pelota en ese punto especial, el extremo del mango donde se empuña el bate, no se debe mover y el bate tiende a girar de manera natural alrededor de este punto; así queda minimizada la sensación punzante que el bateador podría sentir en sus manos (Fig. a).

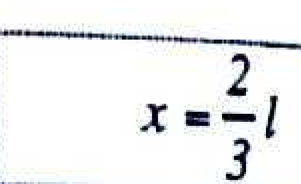
Si se golpea la pelota en un punto mas cercano al extremo del mango (Fig. b), la mano queda sometida a un movimiento hacia atrás del bateador.

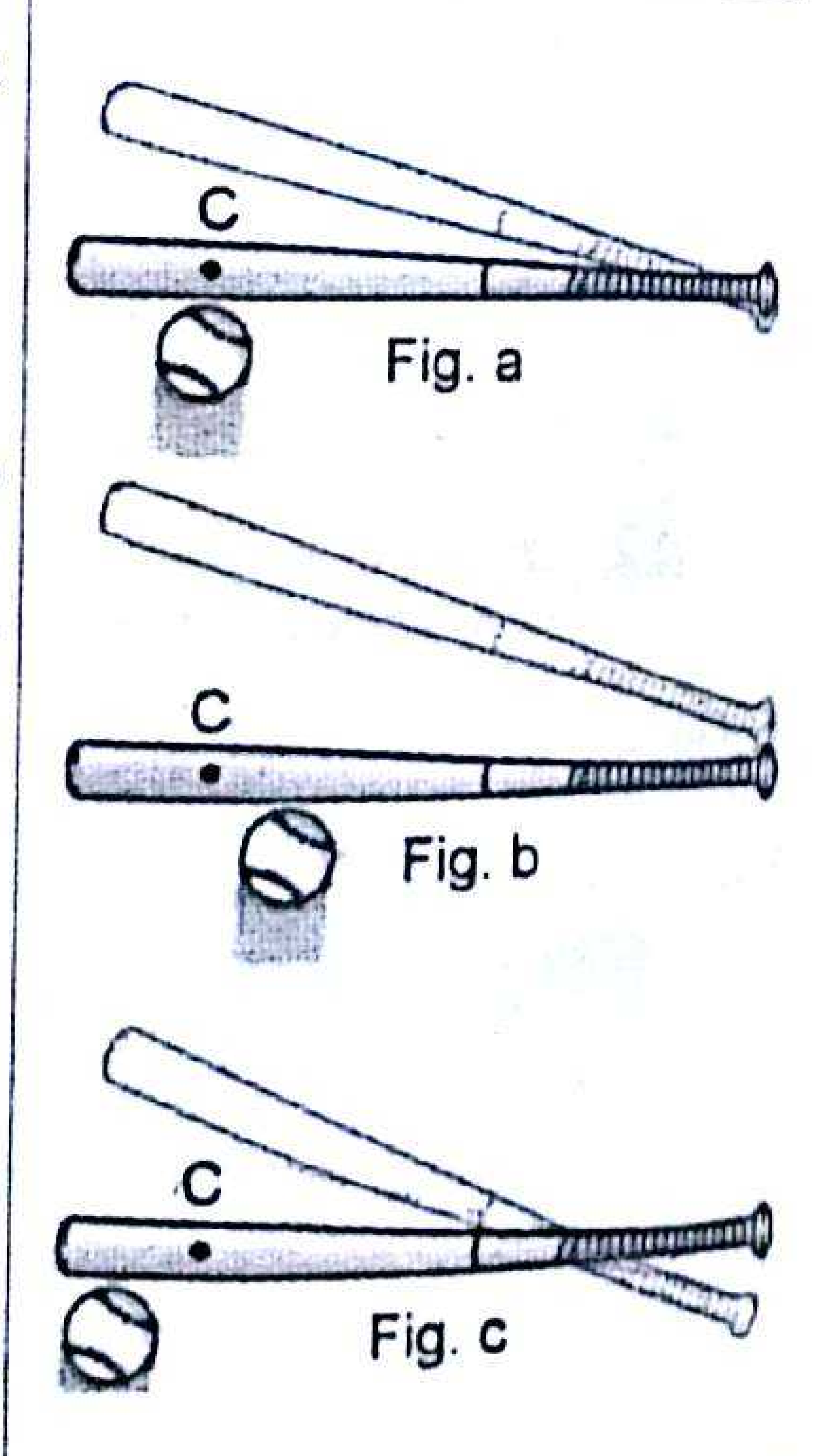
Por otra parte, si se golpea la pelota en un punto mas alejado del mango (Fig. c), la mano queda acelerada hacia adelante del bateador.



El punto C de aplicación del golpe se llama *centro de percusión*.

Respuesta:



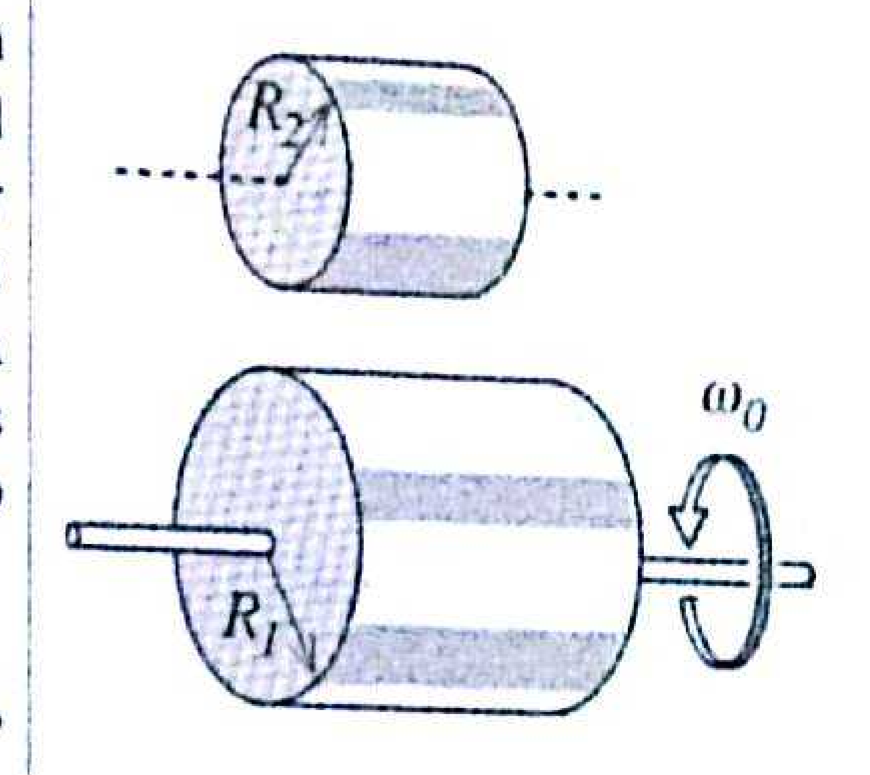


PR-4.13. *Acoplamiento de dos rodillos*

Dos cilindros sólidos que tienen radios R_1 y R_2 con momentos de inercia I_1 e I_2, están sobre ejes paralelos. El cilindro grande gira inicialmente a una velocidad angular ω_0. Si se lleva el cilindro pequeño paralelamente en contacto con el grande, comienza a girar a causa de la fuerza de rozamiento entre ellos. Inicialmente, los cilindros resbalan y al cabo de un tiempo quedan girando con velocidades angulares en sentidos opuestos.

a) ¿Cuál es la velocidad angular final de cada cilindro?

b) ¿Se conserva el momento angular?. Si no se conserva, diga por qué.



Solución: Al tocarse los cilindros, en virtud de la 3ª ley de Newton, las fuerzas de rozamiento entre ellos son de igual módulo y de sentidos opuestos: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$. Los torques de estas fuerzas hacen que el cilindro pequeño se acelere mientras que el grande se va desacelerando. Los impulsos angulares en ambos cilindros producen cambios en sus respectivos momentos angulares:

$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad \Rightarrow \quad \int \tau dt = \Delta L = L_f - L_0$$

Aplicando esta relación a cada una de los cilindros, se obtiene:

$$R_1 \int F dt = I_1(\omega_1 - \omega_0)$$

$$-R_2 \int F dt = I_2(\omega_2 - 0)$$

Si dividimos estas dos ecuaciones, nos da:

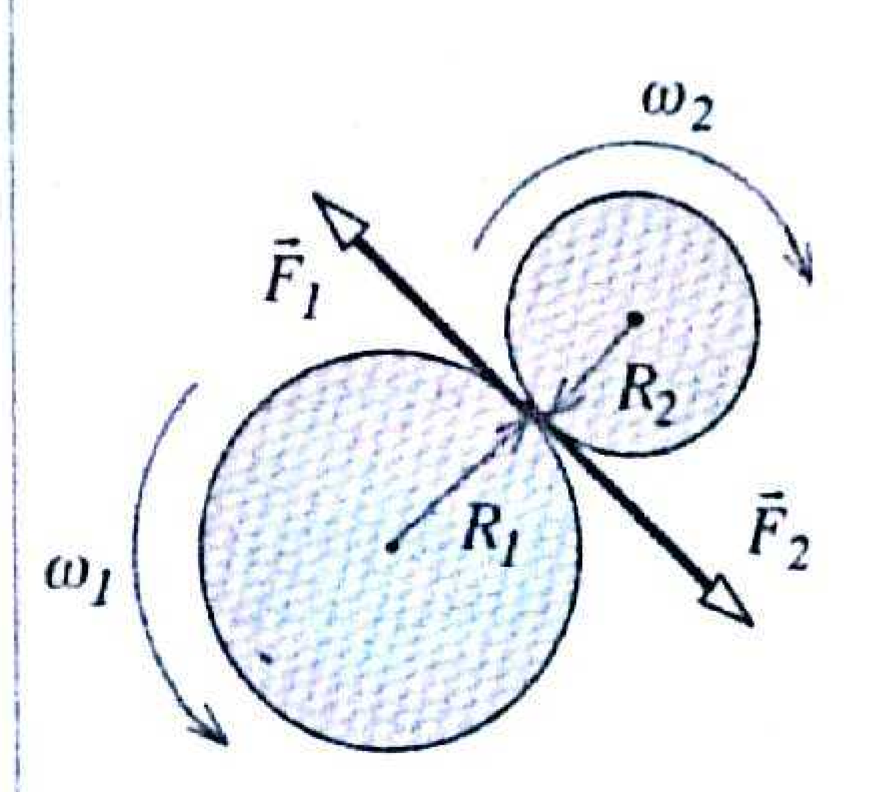
$$-\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_0}\frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_0}\frac{M_2 R_2^2}{M_1 R_1^2} \qquad (1)$$

Cuando el deslizamiento cesa, las velocidades lineales de los bordes se hacen iguales y en ese momento se alcanza la condición:

$$v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \qquad (2)$$

Combinado las ecuaciones (1) y (2) y sustituyendo los momentos de inercia, obtenemos:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \omega_1}$$



$$\omega_1 = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)\omega_0$$

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1 = \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)\omega_0,$$

b) Si calculamos el momento angular final encontramos que: $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \neq \vec{L}_0$. Es decir, aquí *el momento angular no se conserva*. La explicación a esta aparente paradoja será dada en el siguiente problema.

Respuesta:

a) $\omega_1 = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)\omega_0$

$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)\omega_0$

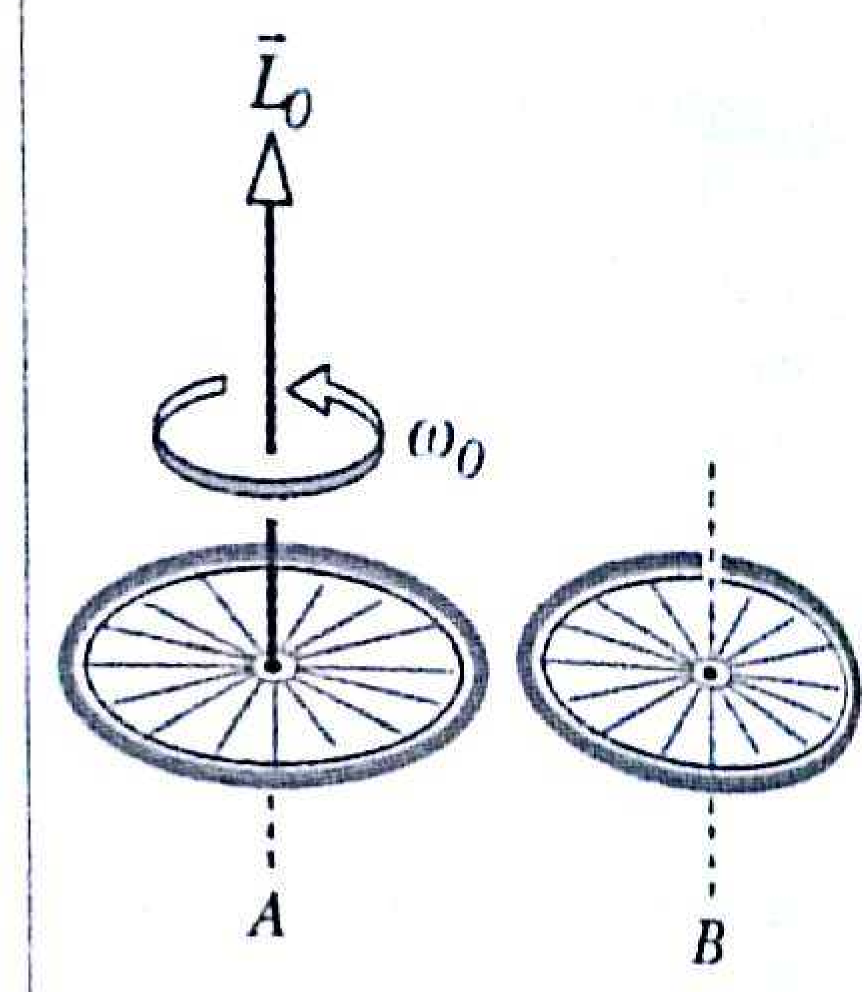
b) $\vec{L}$ no se conserva

PR-4.14. *¿Cómo se resuelve esta paradoja?*

El estudiante A sostiene por su eje una rueda que gira en el plano horizontal a velocidad angular, ω_0. El estudiante B sostiene por su eje otra rueda B, idéntica a la anterior pero inicialmente sin rotación, y luego la mueve horizontalmente hacia la rueda A hasta hacer contacto por sus bordes. Al comienzo las dos ruedas deslizan debido al rozamiento, pero finalmente giran con una rapidez angular común ω, en sentidos opuestos y por lo tanto, el momento angular total final será cero.

a) ¿Cuál es la velocidad angular final de rotación?

b) Explique por qué no se conservó el momento angular.



Solución: a) En el caso de dos ruedas idénticas podemos usar el resultado del problema anterior. Sin embargo, usaremos otro enfoque, notando que los torques sobre cada rueda respecto a sus correspondientes centros son idénticos:

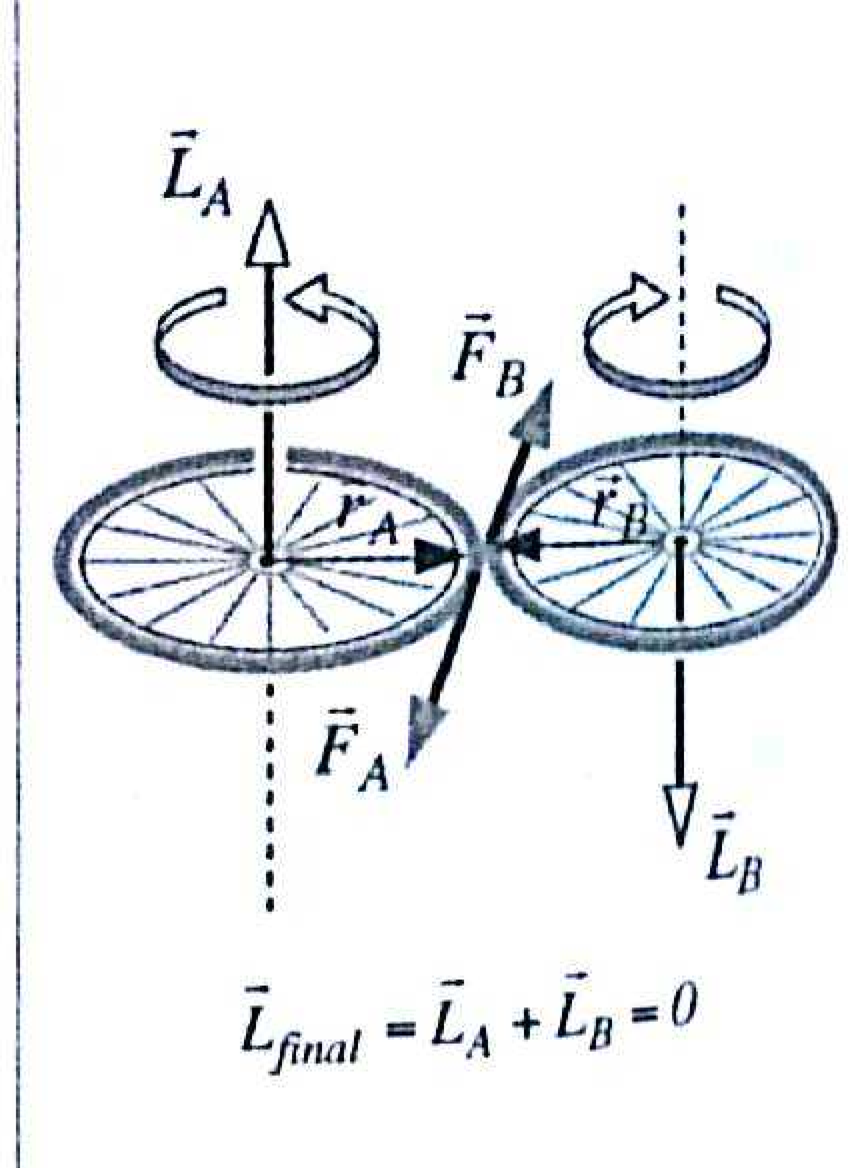
$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A = \vec{r}_B \times \vec{F}_B$$

Según se observa en la figura, ambos torques deben apuntar verticalmente hacia abajo, de modo que durante la interacción el torque sobre A, hace disminuir $\vec{L}_A$ y el torque sobre B tiende a incrementar $\vec{L}_B$. Los cambios respectivos en $\vec{L}$ deben ser iguales:

$$\Delta\vec{L}_B = \Delta\vec{L}_A$$

Cuando las ruedas alcanzan la velocidad angular común ω, los momentos angulares finales serán iguales y opuestos:

$$\vec{L}_B = -\vec{L}_A.$$



$$\vec{L}_{final} = \vec{L}_A + \vec{L}_B = 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{L}_A = \frac{1}{2}\vec{L}_0 = -\vec{L}_B \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{2}\omega_0$$

$$\vec{L}_{final} = \vec{L}_A + \vec{L}_B = 0$$

b) La razón por la cual el momento angular no se conserva, radica en que al tratar de acoplar las dos ruedas, estas tratarán de encaramarse una sobre la otra, y se hace necesario aplicar torques externos sobre sus respectivos ejes para poder mantenerlos fijos.

Respuesta:

a) $\omega = \omega_0 / 2$

b) $\vec{L}$ no se conserva porque se deben ejercer torques externos para mantener fijos los ejes.

PR-4.15. *El perrito al caminar hace girar la rueda*

Una rueda de radio R y masa M está colocada de modo que puede girar sin fricción en torno a un eje vertical que está fijo.

Sobre el borde de la rueda se coloca un perrito de masa m y este empieza a caminar en sentido anti horario con velocidad constante, v, con respecto a la rueda. ¿Cuál será la velocidad angular que adquiere la rueda?

Solución: Sobre el sistema rueda-perro no actúa ningún torque externo según el eje de rotación, por lo tanto el momento angular en la dirección vertical se conserva. Inicialmente el momento angular es cero y para que este se conserve, la rueda debe girar en sentido opuesto al perro en relación al suelo. Los módulos de sus momentos angulares deben ser iguales:

$$\vec{L}_{rueda} + \vec{L}_{perro} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{L}_{rueda}| = |\vec{L}_{perro}|$$

Si despreciamos la masa de los rayos de la rueda, su momento angular es:

$$L_{rueda} = I_0\omega = MR^2\omega$$

Mientras que el momento angular del perro es:

$$L_{perro} = mRV$$

Donde la velocidad V del perro con respecto al suelo es igual a su velocidad v con respecto a la rueda mas la velocidad de la rueda:

$$V = v + (-R\omega).$$

Por lo tanto:

$$MR^2\omega = mR(v - R\omega)$$

De modo que la velocidad angular de la rueda es:

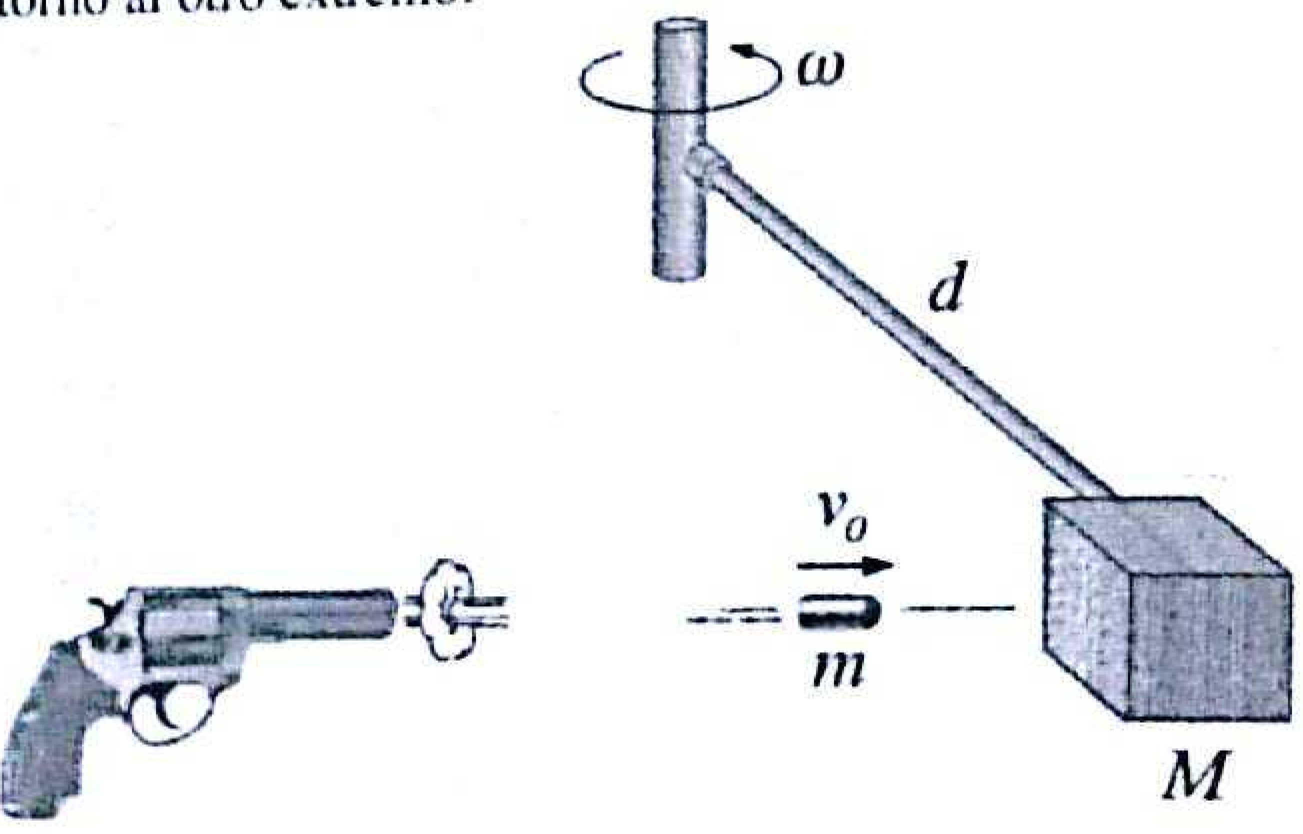
$$\omega = \frac{m}{M+m}\frac{v}{R}$$

Respuesta:

$\omega = (\frac{m}{M+m})\frac{v}{R}$
Sentido horario

PR-4.16. *La bala se incrusta y hace girar al bloque*

Un bloque de masa M se encuentra sobre una mesa horizontal lisa, unido a una varilla rígida de longitud d y masa despreciable, que puede girar mediante un pivote en torno al otro extremo.



Si se dispara una bala de masa m con velocidad v_o, paralela a la superficie horizontal y normal a la barra, la bala queda incrustada en el bloque.

a) ¿Cuál será la velocidad de rotación del bloque?

b) ¿Qué fracción de la energía original se pierde?

Solución: a) Como no se ejerce ningún torque neto externo con respecto al eje de rotación, se conserva el momento angular total del sistema bala-bloque. Los momentos angulares inicial y final son, respectivamente:

$$L_i = mv_0 d \qquad L_f = (m+M)vd$$

Igualando: $L_f = L_i$ y despejando tenemos la velocidad de rotación resultante del bloque:

$$v = (\frac{m}{m+M})v_0$$

b) Las energías cinéticas inicial y final son:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_0^2$$

Por lo tanto, la fracción de la energía que se pierde en la colisión es:

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{M}{m+M}$$

Respuesta:

a) $v = (\frac{m}{m+M})v_0$

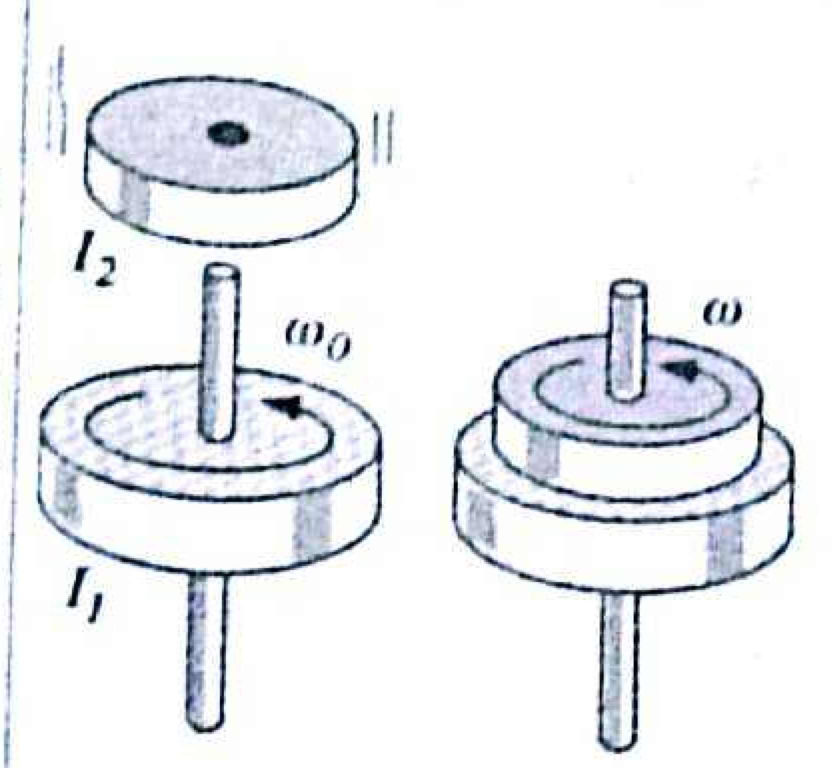
b) $\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{M}{m+M}$

PR-4.17. *Un choque rotacional inelástico*

Un disco de momento de inercia I_1 gira con velocidad angular ω_0 alrededor de un eje vertical. Otro disco con momento de inercia I_2 e inicialmente en reposo cae sobre el primero. Los discos deslizan al comienzo pero en algún momento llegan a alcanzar la misma velocidad angular.

a) Determine la velocidad angular final.

b) Verifique que la energía final es menor que la inicial.



Solución: a) En este sistema actúan solamente los torques internos entre los dos discos, es decir, no hay torques externos y por lo tanto el momento angular total se conserva. Inicialmente el momento angular es el del primer disco:

$$L_0 = I_1\omega_0$$

En la situación final, los dos discos quedan girando juntos:

$$L_f = I_1\omega + I_2\omega = (I_1 + I_2)\omega$$

Igualando el momento angular inicial con el momento angular final, obtenemos la velocidad angular final:

$$L_0 = L_f \quad \Rightarrow \quad \omega = (\frac{I_1}{I_1 + I_2})\omega_0$$

b) La energía cinética inicial es:

$$K_0 = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2$$

mientras que la energía cinética final es:

$$K_F = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)[\frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_0]^2$$

$$K_F = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2\frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

La razón de la energía final a la inicial es:

$$\frac{K_F}{K_0} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} < 1$$

La energía cinética que falta ha sido convertida en energía térmica por la fricción entre los dos discos.

Respuesta:

a) $\omega = (\frac{I_1}{I_1 + I_2})\omega_0$

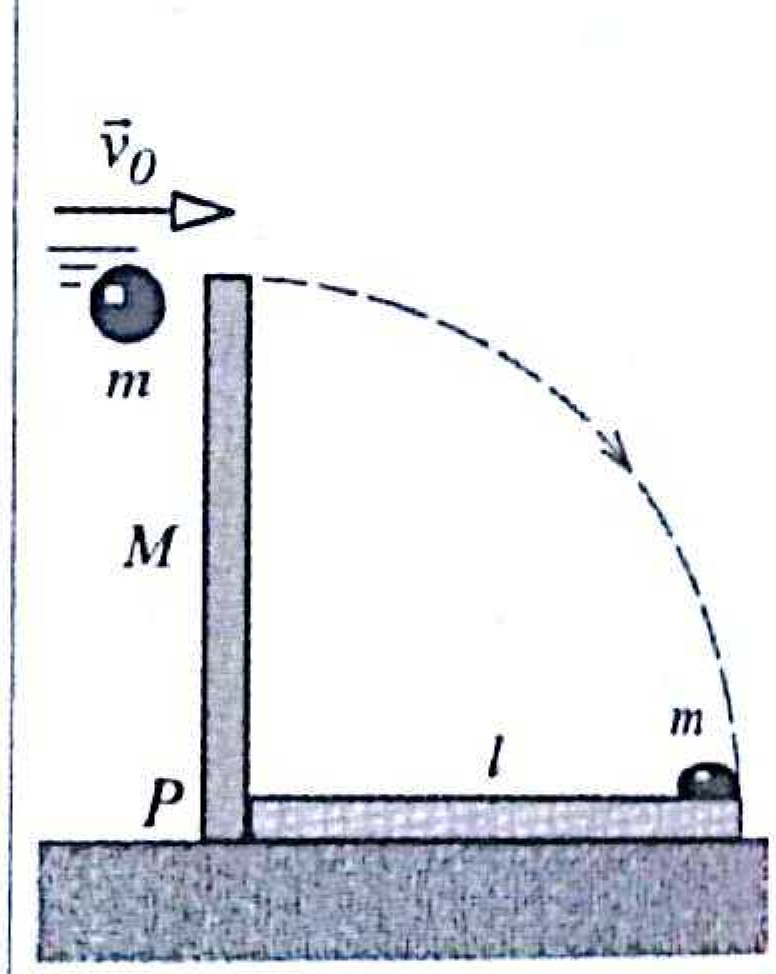
b) $\frac{K_F}{K_0} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$

PR-4.18. *Colisión inelástica para tumbar una barra*

Una barra uniforme de masa M y longitud L se coloca en posición vertical sobre una mesa áspera. Se lanza un pedazo de plastilina de masa $m = M/3$ con una velocidad horizontal v_o que golpea la barra en su extremo superior. La colisión es perfectamente inelástica y cuando la barra cae, el punto P, de contacto con la mesa no se mueve. Determine la velocidad angular en el momento en que la barra golpea la mesa.

Solución: En la colisión no hay torques externos al sistema barra-plastilina en torno al punto P de contacto con la mesa y por lo tanto se conserva el momento angular total del sistema, $L_i = L_f$:

$$mv_0 l = I_P\omega_0 = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega_0$$



Por lo tanto la velocidad angular inicial de caída de la varilla es:

$$\omega_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)l} = \frac{Mv_0}{(M+M)l} = \frac{v_0}{2l}$$

Después de la colisión se conserva la energía ya que la fuerza de fricción en el punto de contacto no trabaja:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}I_P\omega^2 + 0 = \frac{1}{2}I_P\omega_0^2 + Mg\frac{l}{2} + \frac{M}{3}gl$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor: $\omega_0 = v_0 / 2l$ y el momento de inercia respecto a P:

$$I_P(\omega^2 - \omega_0^2) = Mgl(1 + \frac{2}{3})$$

$$(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)[\omega^2 - (\frac{v_0}{2l})^2] = \frac{5}{3}Mgl$$

Tomando en cuenta que $m = M/3$, obtenemos la velocidad angular final:

$$\omega = \frac{\sqrt{v_0^2 + 10gl}}{2l}$$

Respuesta:

$$\omega = \frac{\sqrt{v_0^2 + 10gl}}{2l}$$

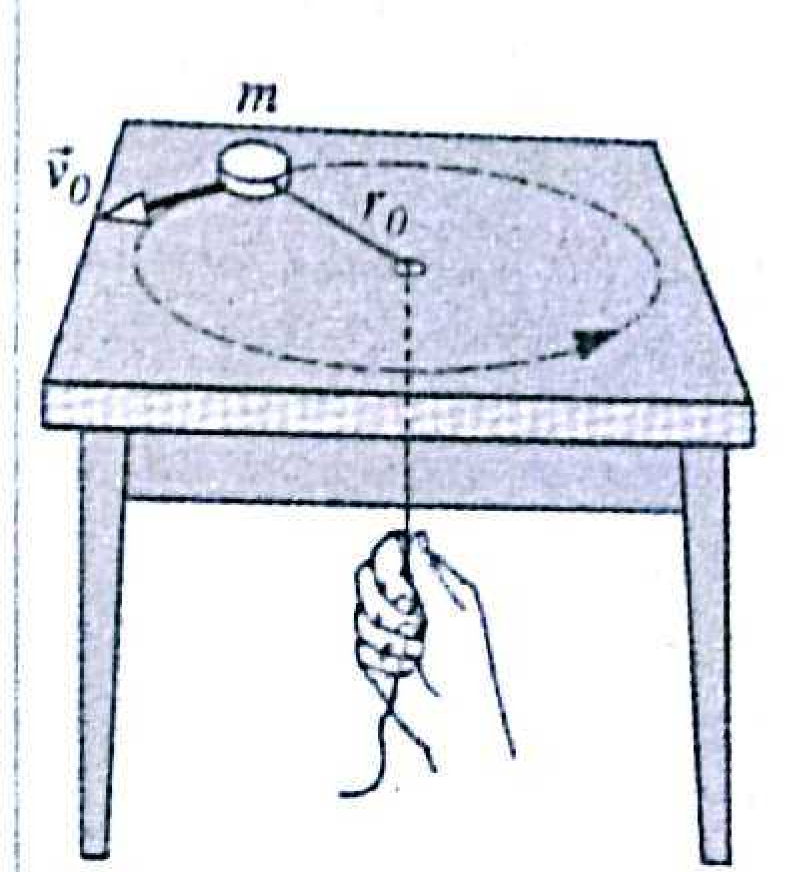
PR-4.19. *Al jalar la cuerda, el disco gira más rápido*

Un disco de masa m, atado a una cuerda se encuentra sobre un plano horizontal liso, girando con velocidad v_o en un círculo de radio r_o. La cuerda pasa por un orificio y por debajo de la mesa se le empieza a jalar lentamente hasta que el radio del círculo de rotación se reduzca a un valor r. Calcule:

a) La velocidad del disco cuando el radio es r.

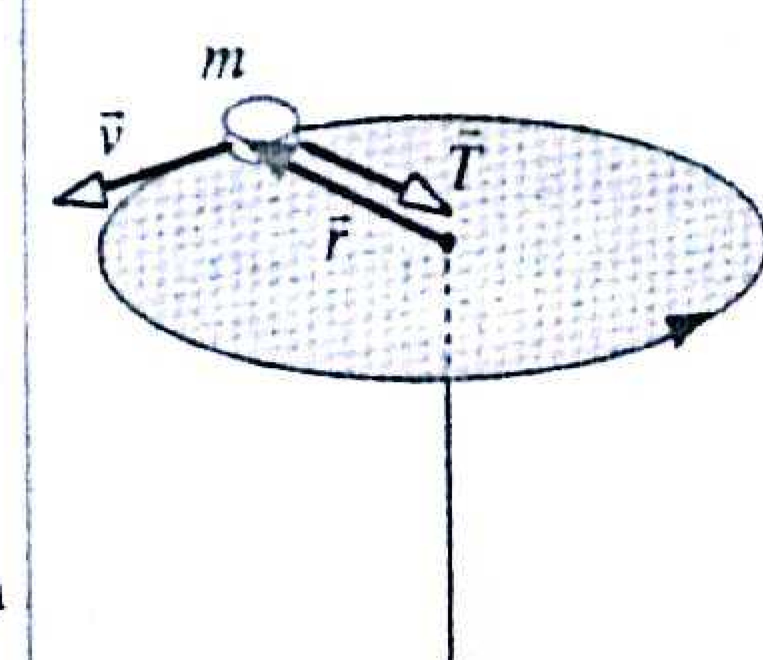
c) La tensión de la cuerda como función de r.

d) El trabajo realizado durante el proceso y compruebe que es igual a la variación de la energía cinética del disco.



Solución: a) Como la tensión de la cuerda en todo momento apunta hacia al centro de rotación (es una fuerza central), su brazo de palanca es cero y no produce torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$. Por lo tanto la cantidad de movimiento angular del disco se conserva:

$$\vec{L}_{despues} = \vec{L}_{antes} \quad \Rightarrow \quad mvr = mv_0 r_0$$



La nueva velocidad del disco será:

$$v = v_0(r_0 / r)$$

b) La tensión de la cuerda proporciona al disco la aceleración centrípeta del movimiento circular:

$$T = m\frac{v^2}{r} = \frac{m}{r}(\frac{r_0}{r}v_0)^2 = \frac{mr_0^2 v_0^2}{r^3}$$

c) Los vectores tensión $\vec{T}$ y desplazamiento $d\vec{r}$ son anti paralelos, por lo tanto, el trabajo realizado por la tensión para acortar la cuerda es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int T dr = -\int_{r_0}^{r} \frac{mr_0^2 v_0^2}{r^3} dr$$

$$W = mr_0^2 v_0^2 \frac{1}{2r^2}\Big|_{r_0}^{r} = \frac{mr_0^2 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)$$

Por otra parte, la variación de energía cinética del bloque es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0}{r}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) = W$$

Respuesta:

a) $v = \dfrac{r_0}{r}v_0$

b) $T(r) = \dfrac{mr_0^2 v_0^2}{r^3}$

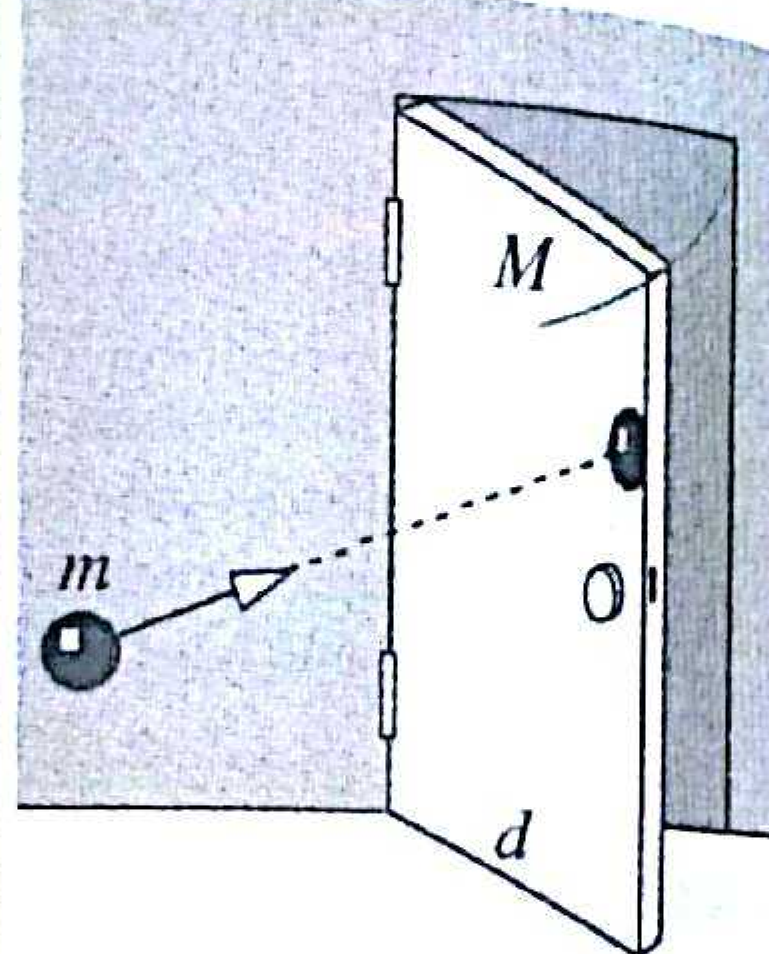
c) $W = \Delta K = \dfrac{1}{2}mv_0^2\left(\dfrac{r_0^2}{r^2} - 1\right)$

PR-4.20. *Lanzando plastilina para cerrar una puerta*

Sea una puerta sólida uniforme con masa M = 15 kg y ancho d = 1 m que puede girar alrededor de bisagras sin fricción. La puerta es golpeada a un ángulo recto en una de sus orillas por una pelota de plastilina de masa m = 0.5 kg, con una velocidad v_o = 11 m/s. La pelota de plastilina se queda adherida a la puerta.

a) ¿Cuál será la velocidad angular de la puerta inmediatamente después de ser golpeada?

b) ¿Qué fracción de la energía inicial se conserva?



Solución: a) La puerta rectangular se puede considerar como una serie de barras horizontales de longitud d, que giran alrededor de un extremo. De modo que el momento de inercia de la puerta es igual a la suma de los momentos de inercia de todas las barras:

$$I_0 = \frac{1}{3}m_1 d^2 + \frac{1}{3}m_2 d^2 + \ldots = \frac{1}{3}\left(\sum_i m_i\right)d^2 = \frac{1}{3}Md^2$$

Durante la colisión inelástica no hay torques externos respecto al eje de giro y el sistema puerta-plastilina conserva su momento angular, $L_0 = L_f$:

$$mv_0 d = (I_0 + md^2)\omega = \left(\frac{1}{3}Md^2 + md^2\right)\omega$$

Despejando la velocidad angular:

$$\omega = \frac{mv_0 d}{\frac{1}{3}Md^2 + md^2} = \frac{v_0}{(M/3m + 1)d}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

$$\omega = \frac{11\text{m/s}}{(15\text{kg}/3\text{x}0{,}5\text{kg} + 1)1\text{m}} = 1\text{rad/s}$$

b) La fracción de la energía inicial que se conserva es:

$$\frac{K_f}{K_0} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Md^2 + md^2\right)\omega^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{1}{\frac{M}{3m} + 1} = \frac{1}{11}$$

Respuesta:

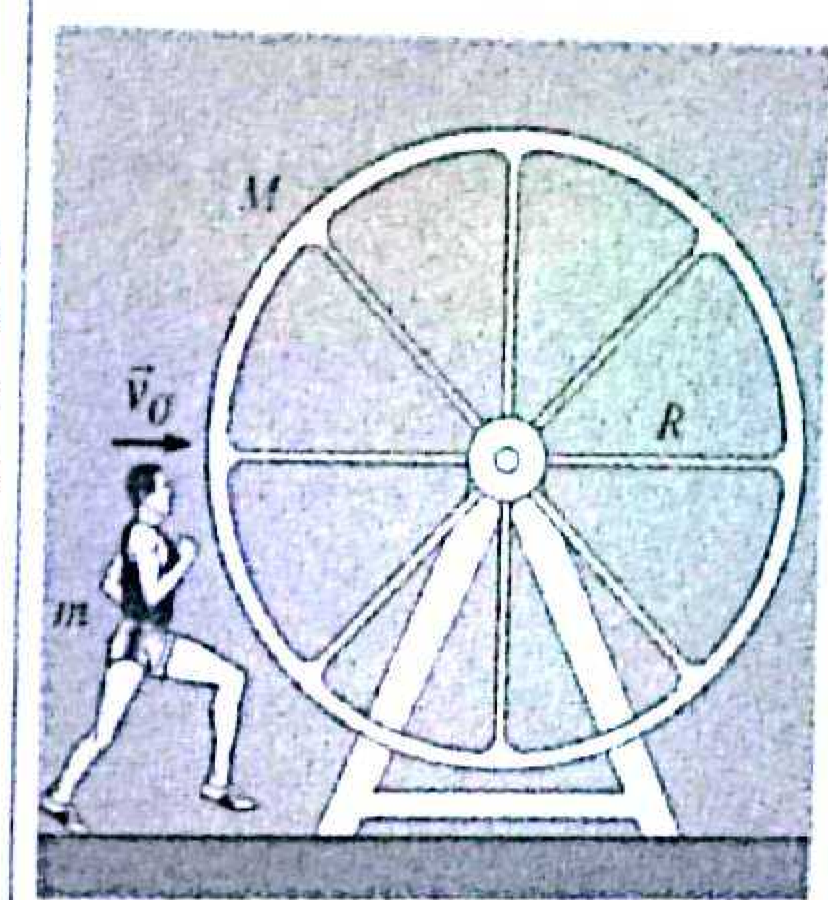
a) $\omega = \dfrac{v_0}{(M/3m + 1)d} = 1$ rad/s

b) $\dfrac{K_f}{K_0} = \dfrac{1}{\frac{M}{3m} + 1} = \dfrac{1}{11}$

PR-4.21. *Corre para elevarse hasta lo alto de la rueda*

Un atleta de masa m = 75 kg va corriendo con una velocidad $\vec{v}_0$ y brinca sobre la parte inferior de una rueda de masa M = 100 kg y radio R = 2 m. Como se sugiere en la figura. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima del atleta para que al girar la rueda, el pueda llegar hasta la cima?

Suponga que los rayos de la rueda son de masa despreciable y que no hay rozamiento en su eje.



Solución: Cuando el hombre salta y queda agarrado en el punto A ubicado debajo del eje de la rueda, no hay torques externos y se conserva el momento angular del sistema:

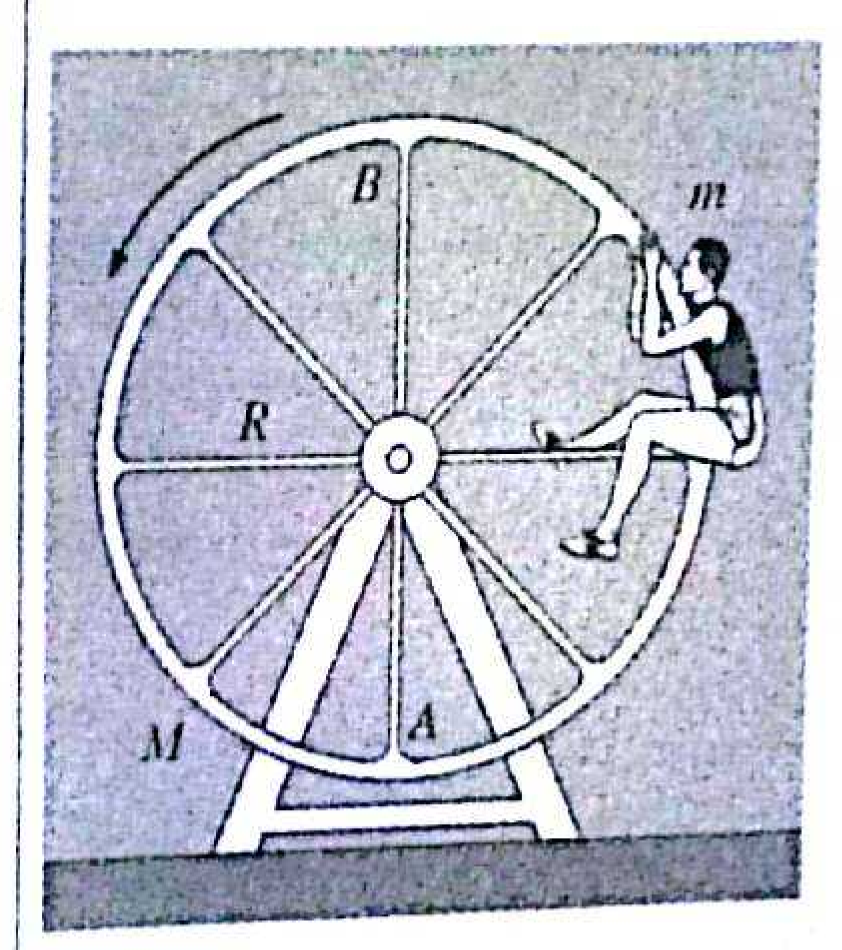
$$L_i(hombre) = L_f(hombre + rueda)$$

$$mv_0 R = (I_0 + mR^2)\omega_0 = (MR^2 + mR^2)\omega_0$$

Luego, la velocidad angular de la rueda justo después del salto es:

$$\omega_0 = \frac{m}{M+m}\frac{v_0}{R}$$

Una vez que la rueda empieza a girar, *el momento angular de sistema hombre + rueda no se conserva*, porque la fuerza de gravedad sobre el hombre se sale de la línea vertical inicial y ejerce un torque con respecto al eje de rotación. Sin embargo, la energía mecánica sí se conserva. Para que la rueda pueda girar 180° y así el hombre se traslade del punto inferior A al punto superior B, se requiere que: $K_A + U_A = U_B + K_B$



Después del choque, el momento angular de sistema no se conserva

$$\frac{1}{2}(MR^2 + mR^2)\omega_0^2 + 0 = 0 + mg(2R)$$

$$\frac{1}{2}R^2(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\frac{v_0}{R}\right)^2 = 2mgR$$

Despejando v_0:

$$v_0 = \sqrt{4gR\left(1+\frac{M}{m}\right)} = \sqrt{4(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2\text{m})\left(1+\frac{100\text{kg}}{75\text{kg}}\right)} = 13{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

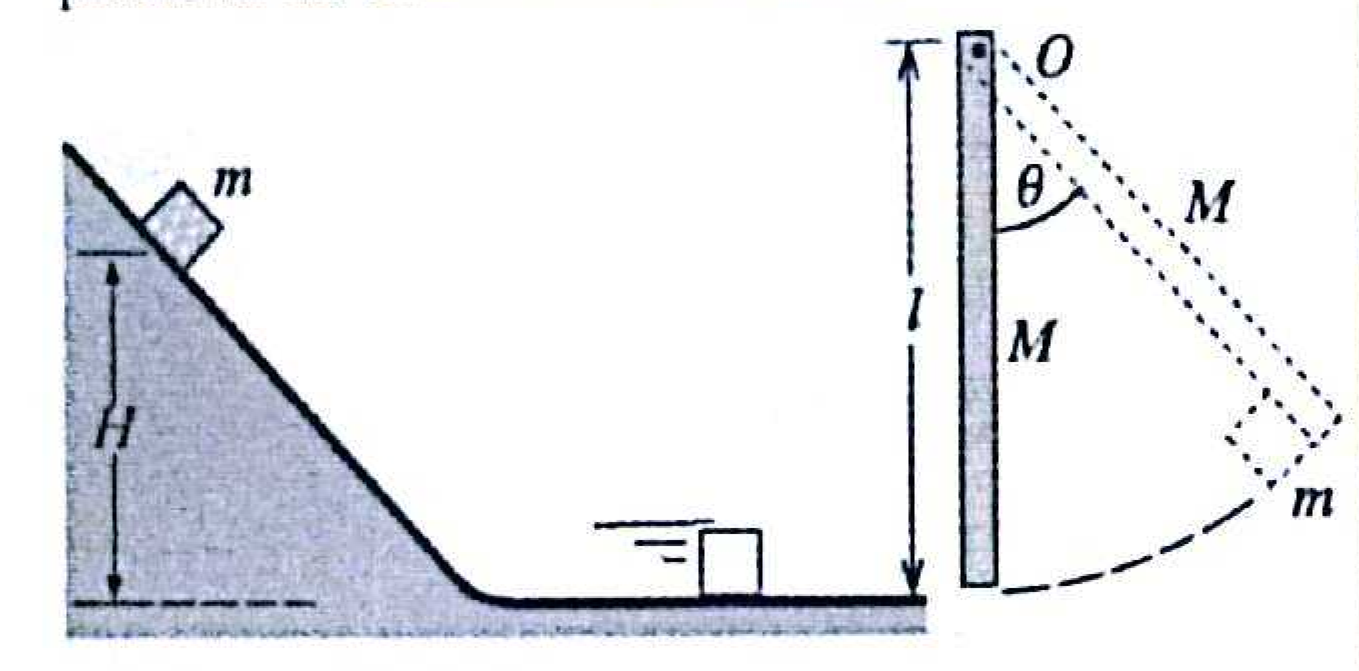
¡Observe que este valor excede el record mundial actual de velocidad en los 100 metros planos!

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{4gR\left(1+\frac{M}{m}\right)} = 13.5 \text{ m/s.}$$

PR-4.22. *¿Hasta donde se elevará la barra?*

Un pequeño bloque de masa m se desliza por una pendiente sin fricción desde una altura h.



El bloque choca con una barra uniforme de masa M y longitud l que se encuentra suspendida verticalmente por un extremo. Después del choque, el bloque queda adherido al extremo inferior de la barra y esta gira en un ángulo θ antes de detenerse. Determine el ángulo θ.

Solución: La velocidad del bloque justo antes del choque se obtiene aplicando la conservación de la energía:

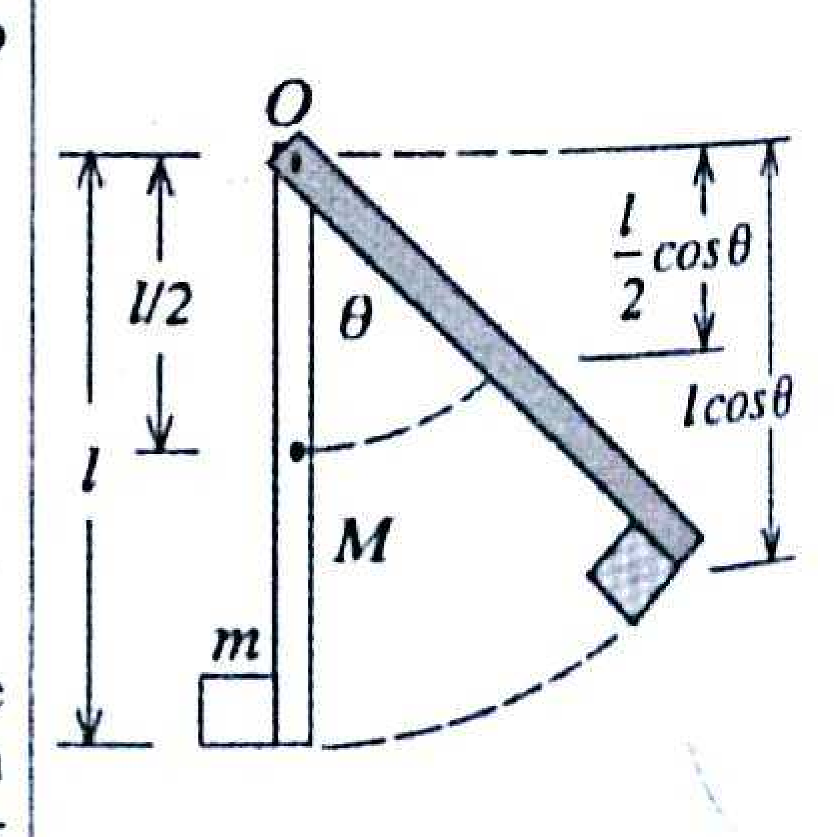
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

Cuando el sistema barra-bloque está en la posición inicial vertical, el torque neto externo es cero, por lo tanto durante el choque se conserva el momento angular:

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow \quad mvl = I\omega = \left(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{mvl}{ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2} = \frac{ml\sqrt{2gh}}{ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2}$$

Después que ocurre el choque, la energía cinética de rotación en la posición vertical queda transformada en energía potencial gravitacional en la posición angular final del sistema barra-bloque:



$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + mgl(1-\cos\theta)$$

Sustituyendo los valores de I y de ω:

$$\frac{m^2l^2\,2gh}{2(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)} = lg\left(\frac{M}{2} + m\right)(1-\cos\theta)$$

Despejando, encontramos el ángulo de elevación de la barra:

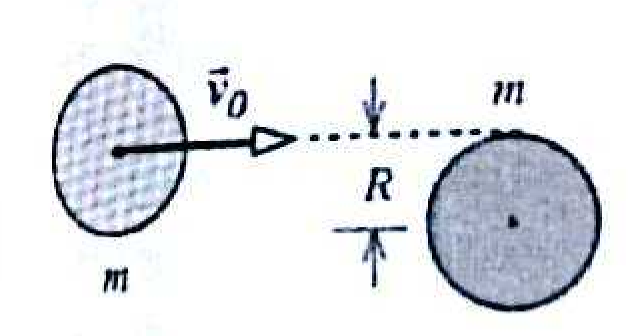
$$\cos\theta = 1 - \frac{6m^2h}{l(2m+M)(3m+M)}$$

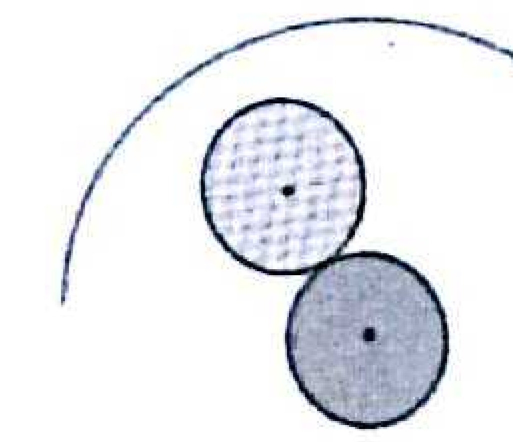
Respuesta:

$$\cos\theta = 1 - \frac{6m^2h}{l(2m+M)(3m+M)}$$

PR-4.23. *Dos discos que chocan y quedan unidos*

Un disco de masa m y radio R se mueve con una velocidad v_o y choca con otro disco idéntico que está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal lisa.





La distancia inicial entre las líneas paralelas que pasan por los centros de los discos es R, y, después del choque los discos quedan unidos moviéndose juntos. Determine:

a) La velocidad de traslación final de los discos.

b) La velocidad angular de los discos.

c) La energía cinética que se pierde en el choque.

Solución: a) Sobre el sistema no actúan fuerzas externas y por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento lineal. La velocidad del centro de masa no varía:

$$m_1 v_0 \hat{x} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{cm}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\hat{x} = \frac{1}{2}v_0\hat{x}$$

b) El momento angular en torno al centro de masa se conserva, $L_0 = L_f$:

$$mv_0(R/2) = I_{cm}\omega$$

Sustituyendo el momento de inercia de los discos unidos:

$$I_{cm} = 2\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right) = 3mR^2$$

$$\omega = \frac{mv_0(R/2)}{3mR^2} = \frac{1}{6}\frac{v_0}{R}$$

c) La energía cinética que se pierde en la colisión es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2 - [\frac{1}{2}2mv_f^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2]$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2 - [\frac{1}{2}2m(\frac{1}{2}v_0)^2 + \frac{1}{2}(3mR^2)(\frac{1}{6}\frac{v_0}{R})^2]$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2 - [\frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{1}{24}mv_0^2] = \frac{5}{24}mv_0^2$$

Respuesta:

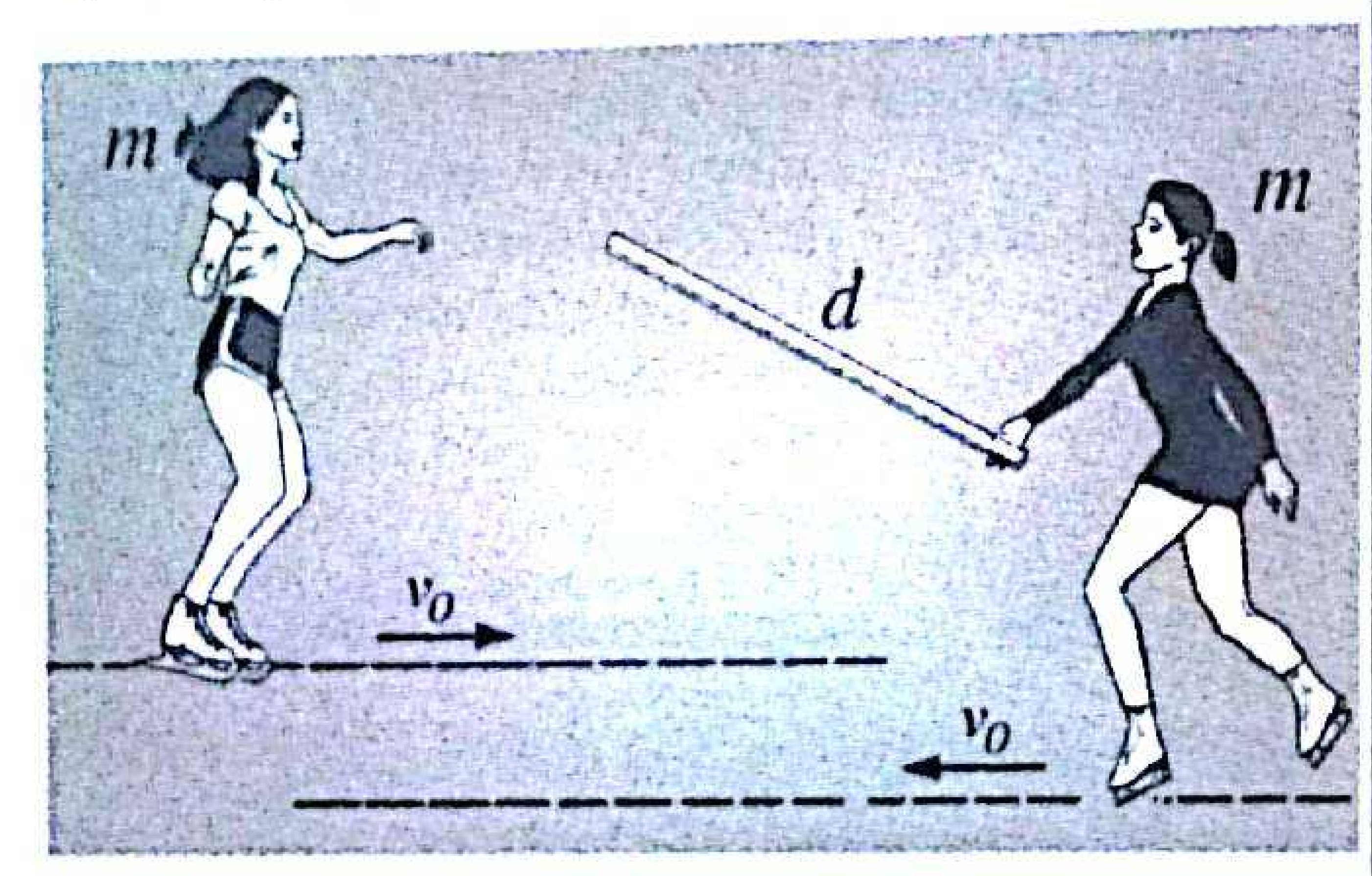
a) $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{2}v_0\hat{x}$

b) $\omega = \frac{1}{6}\frac{v_0}{R}(-\hat{z})$

c) $\Delta K = \frac{5}{24}mv_0^2$

PR-4.24. *Patinando en línea recta y luego en círculos*

En una pista de hielo, dos patinadoras de igual masa m = 50 kg se aproximan con velocidades opuestas y de igual módulo v_0 = 1,5 m/s, a lo largo de trayectorias paralelas separadas por una distancia d = 3 m.



Una patinadora lleva una barra ligera de longitud d y, en el instante en que se cruzan, la otra patinadora toma la barra por el otro extremo.

a) ¿Cuál será la velocidad angular común de rotación?

b) Mientras giran, ellas empiezan a acercarse hasta reducir su separación hasta la mitad ¿cuál será la nueva velocidad angular?

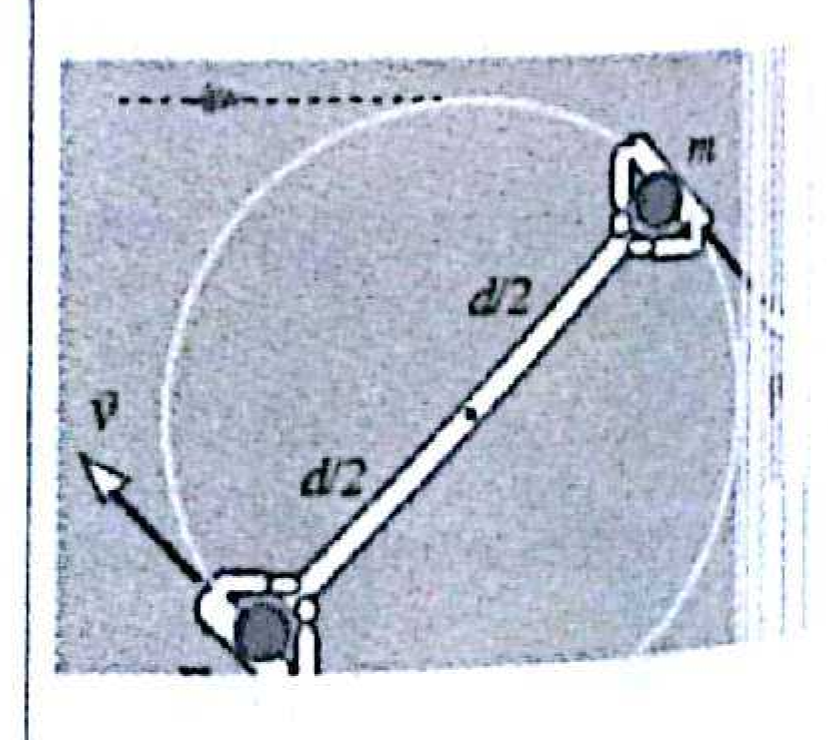
c) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética al acortar la distancia?. ¿De dónde proviene el cambio de energía?

Solución: a) Durante el acoplamiento no hay torques externos que modifiquen el momento angular total de las patinadoras respecto al punto medio entre ellas, y por lo tanto, este se conserva: $L_{antes} = L_{despues}$,

$$2(mv_0\frac{d}{2}) = I_0\omega_0 = 2[m(\frac{d}{2})^2]\omega_0$$

La velocidad angular de rotación es:

$$\omega_0 = \frac{2v_0}{d} = \frac{2(1,5\text{m/s})}{3\text{m}} = 1\text{rad/s}$$



b) Las fuerzas que ejercen la patinadoras sobre la barra para acortar la distancia hasta $d/2$, son fuerzas internas del sistema y por lo tanto, $\vec{L}$ sigue conservándose ($\vec{L}_0 = \vec{L}_1$):

$$mv_0 d = 2[m(\frac{d}{4})^2]\omega_1$$

$$\omega_1 = 8\frac{v_0}{d} = 8\frac{1,5\text{m/s}}{3\text{m}} = 4\text{rad/s}$$

c) El cambio en la energía cinética al reducir a la mitad la distancia que separa las patinadoras es:

$$\Delta K = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$$

$$\Delta K = 3mv_0^2 = 3(50\text{kg})(1,5\text{m/s})^2 = 337,5\text{J}$$

Respuesta

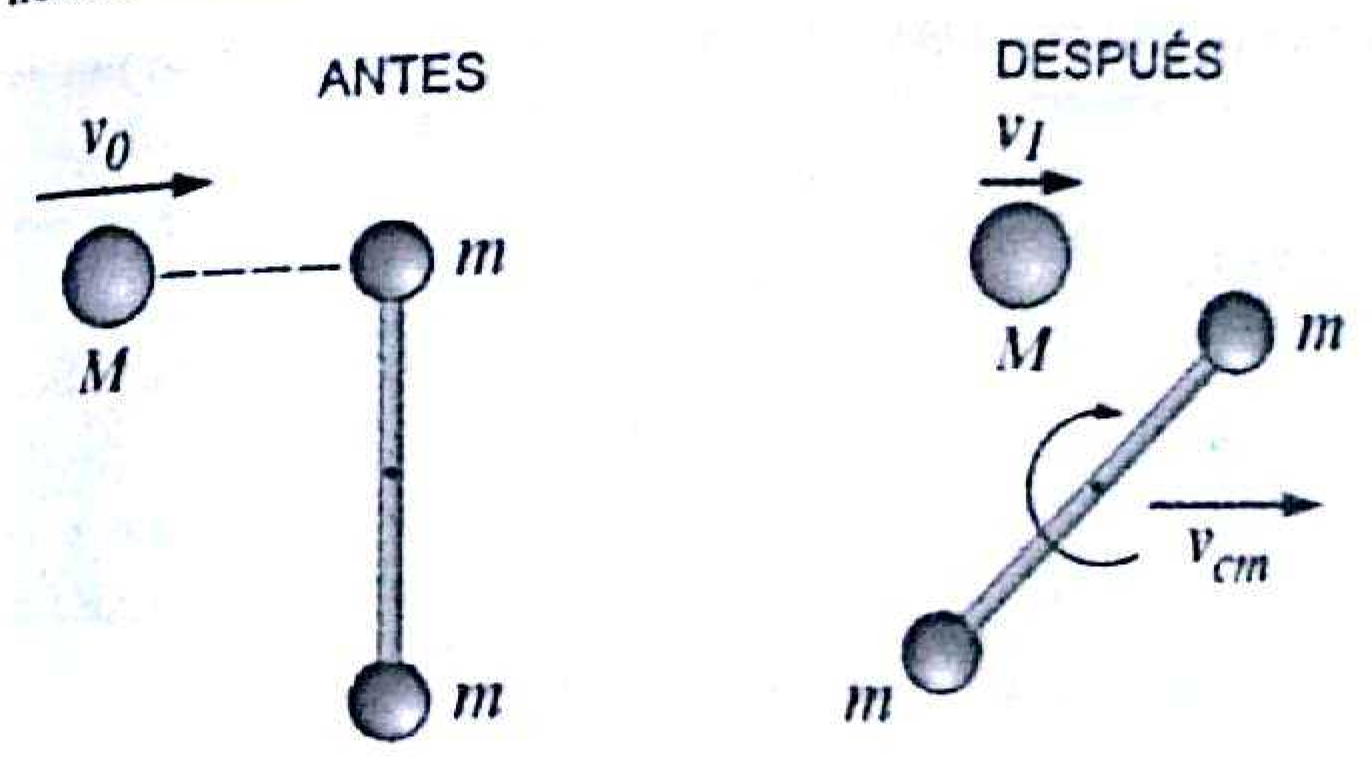
a) $\omega_0 = \frac{2v_0}{d} = 1\text{rad/s}$

b) $\omega_1 = \frac{8v_0}{d} = 4\text{rad/s}$

c) $\Delta K = 3mv_0^2 = 337,5\text{J}$
El cambio proviene del trabajo realizado por las patinadoras para acortar la distancia.

PR-4.25. *En esta colisión elástica, todo se conserva*

Una barra ligera de longitud L tiene en sus extremos fijas dos esferitas iguales de masa m, y está sobre una mesa horizontal sin rozamiento.



Otra esferita de masa $M = 2m$ y velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ incide en dirección perpendicular a la barra y choca elásticamente con una de las esferitas. Determine:

a) La velocidad final de la esferita incidente.

b) La velocidad del centro de masa de la barra.

c) La velocidad angular de la barra.

Solución: En esta colisión se conservan tanto la cantidad de movimiento lineal, como el momento angular y la energía cinética. Aplicando la conservación del momrnto lineal ($p_i = p_f$):

$$2mv_0 = 2mv_1 + 2mv_{cm}$$

$$v_0 = v_1 + v_{cm} \qquad (1)$$

La conservación del momento angular ($L_i = L_f$):

$$2mv_0\frac{l}{2} = 2mv_1\frac{l}{2} + 2m(\frac{l}{2})^2\omega$$

$$v_0 = v_1 + \omega\frac{l}{2} \qquad (2)$$

La conservación de la energía cinética ($K_i = K_f$):

$$\frac{1}{2}2mv_0^2 = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}2m(\frac{l}{2})^2\omega^2$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_{cm}^2 + \frac{\omega^2 l^2}{4} \qquad (3)$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Comparando (1) y (2) se observa que: $v_{cm} = \omega l / 2$, Asimismo, elevando al cuadrado la ecuación (2) y comparando con la (3) se obtiene: $v_1 = \omega l / 4$. Usando estas expresiones se obtienen respectivamente:

$$\omega = \frac{4}{3}\frac{v_0}{l} \qquad v_1 = \frac{1}{3}v_0 \qquad v_{cm} = \frac{2}{3}v_0$$

Respuesta

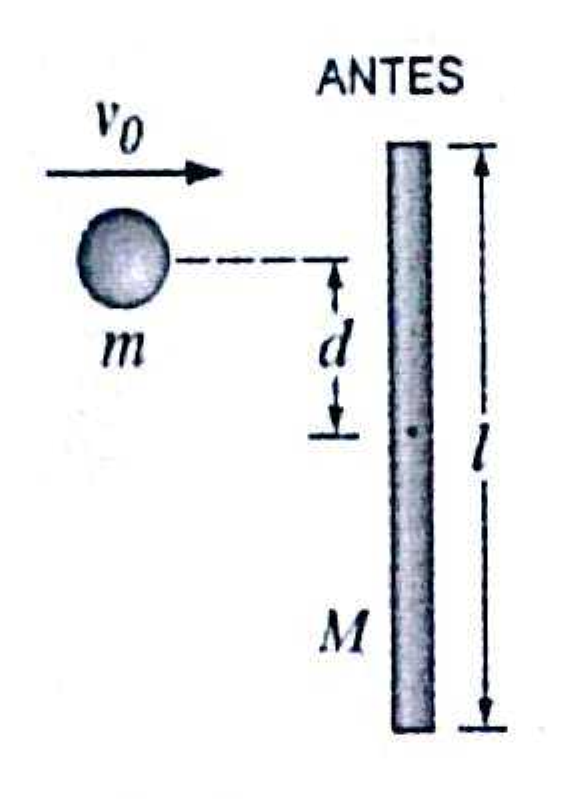
a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}v_0\hat{x}$,

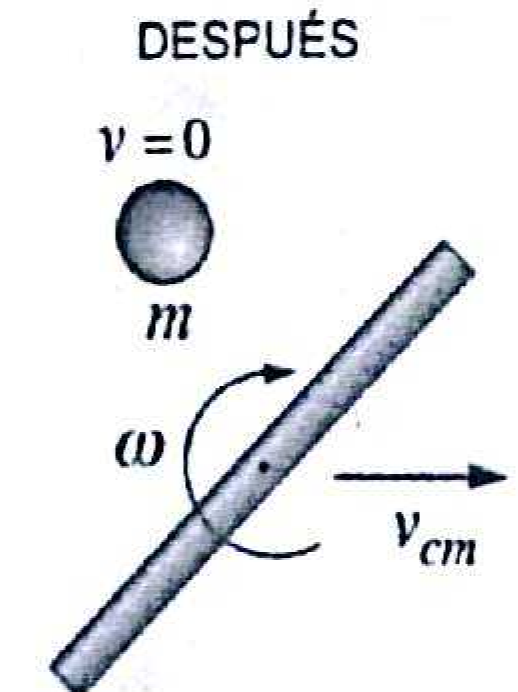
b) $\vec{v}_{cm} = \frac{2}{3}v_0\hat{x}$,

c) $\vec{\omega} = -\frac{4}{3}\frac{v_0}{l}\hat{z}$

PR-4.26. *El disco choca con la barra y queda en reposo*

Una barra de longitud l y masa M está en reposo sobre una mesa horizontal sin rozamiento.





Un disco de masa m que se mueve con velocidad v_0 perpendicular a la barra, choca con ésta a una distancia d de su centro. La colisión es perfectamente elástica. ¿Cuál debe ser la masa del disco a fin de que éste permanezca en reposo inmediatamente después de la colisión?

Solución: Como no hay fuerzas externas, durante el choque se conserva el momento lineal:

$$mv_0 = Mv_{cm} \qquad (1)$$

Siendo v_{cm} la velocidad del centro de masa de la barra después del choque, quedando el disco en reposo. No hay torques externos respecto al eje vertical de rotación y durante el choque se conserva el momento angular:

$$mv_0 d = I_{cm}\omega \qquad (2)$$

Como la colisión es perfectamente elástica, la energía cinética queda igual después del choque:

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (3)$$

Se eliminamos v_{cm} después de sustituir la ecuación (1) en la (3) queda:

$$mv_0^2(1 - \frac{m}{M}) = I_{cm}\omega^2$$

Combinando esta expresión con la (2) para eliminar ω y tomando en cuenta que $I_{cm} = Ml^2 / 12$, tenemos:

$$(1 - \frac{m}{M}) = \frac{md^2}{I_{cm}} = \frac{md^2}{Ml^2 / 12} = 12(\frac{d}{l})^2\frac{m}{M}$$

Por lo tanto, el valor buscado de m es:

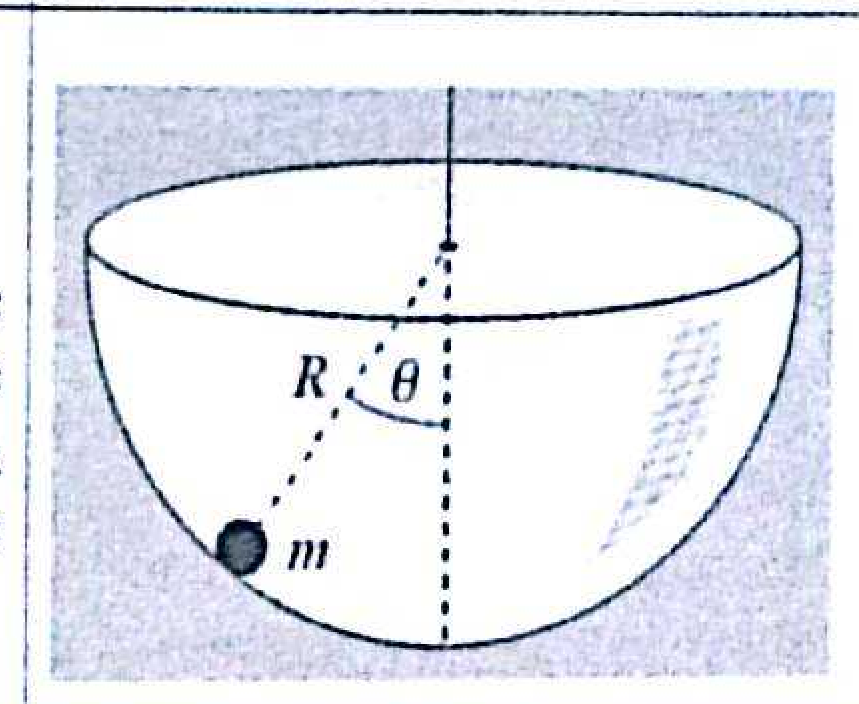
$$m = \frac{M}{[1 + 12(\frac{d}{l})^2]}$$

Respuesta:

$$m = \frac{M}{[1 + 12(\frac{d}{l})^2]}$$

PR-4.27. *Lanzamiento de una partícula en un tazón*

Una partícula de masa m es lanzada horizontalmente desde la posición angular θ en el interior de un recipiente de radio R que está en reposo. Se desea determinar la velocidad inicial v_0 necesaria para que la partícula llegue justo a la parte superior del recipiente.



Solución: Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: el peso y la fuerza normal ejercida por la superficie. El peso $m\vec{g}$ no ejerce torque sobre la partícula en torno al eje z y la normal $\vec{N}$ apunta hacia el eje y no tiene brazo, por lo tanto el momento angular según el eje z se conserva:

$$L_A = L_B$$

$$mv_0(Rsen\theta) = mvR \quad \Rightarrow \quad v = v_0 sen\theta$$

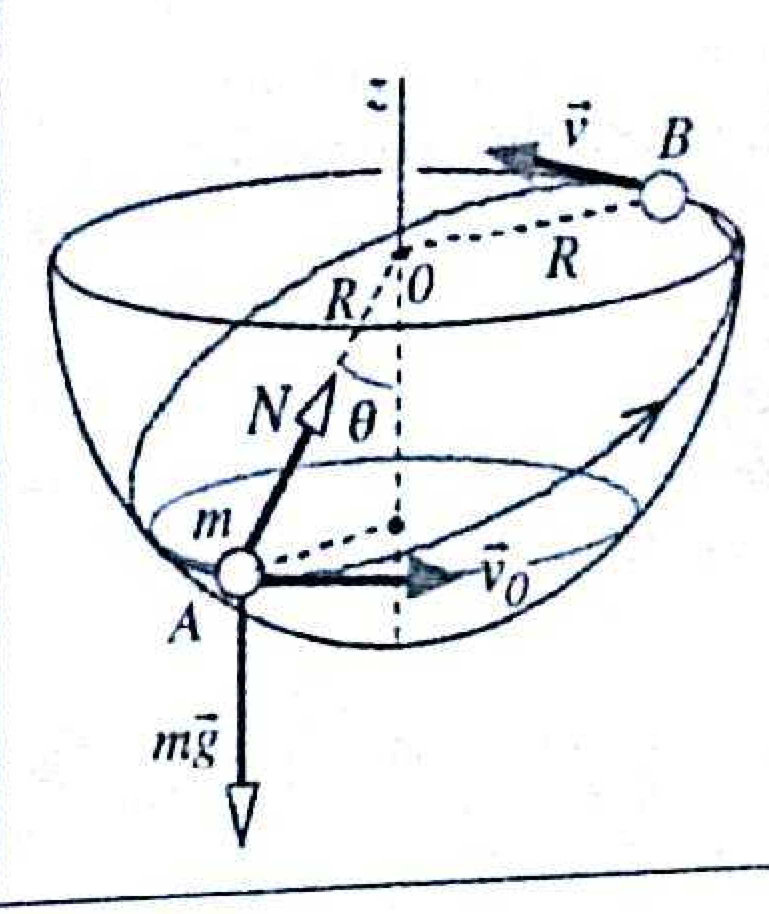
Por la conservación de la energía:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgRcos\theta$$

Sustituyendo v de la ecuación (1) en la ecuación (2):

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



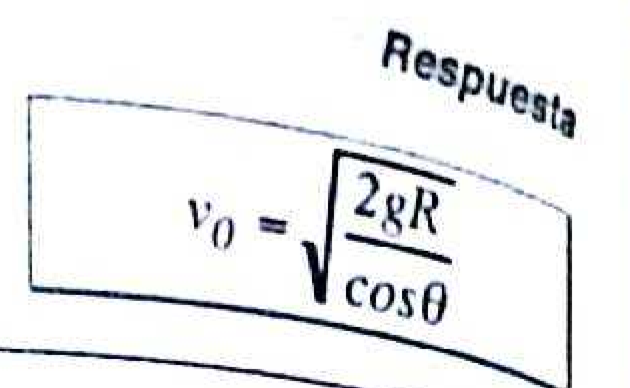
$$v_0^2 = (v_0 sen\theta)^2 + 2gR\cos\theta$$

$$v_0^2(1 - sen^2\theta) = 2gR\cos\theta$$

La velocidad inicial de lanzamiento requerida es:

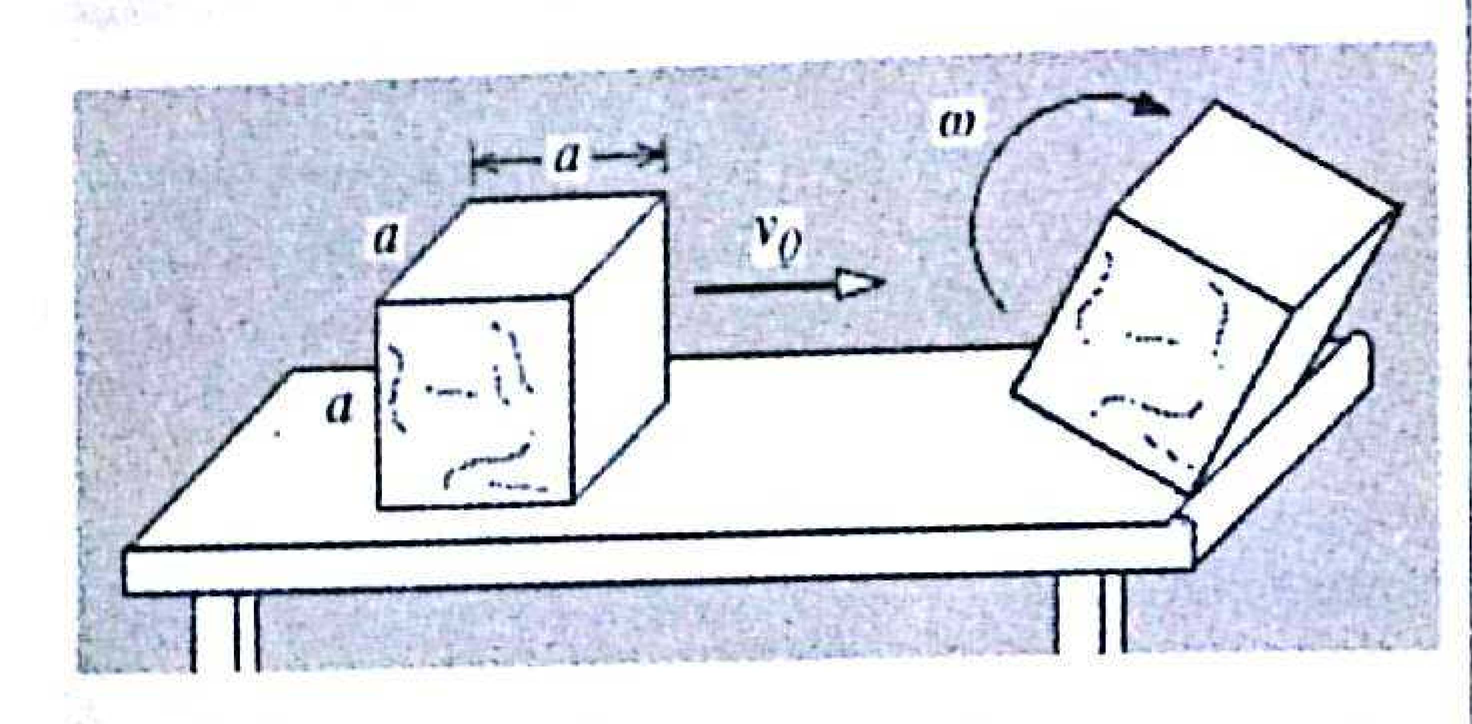
$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{\cos\theta}}$$

Respuesta



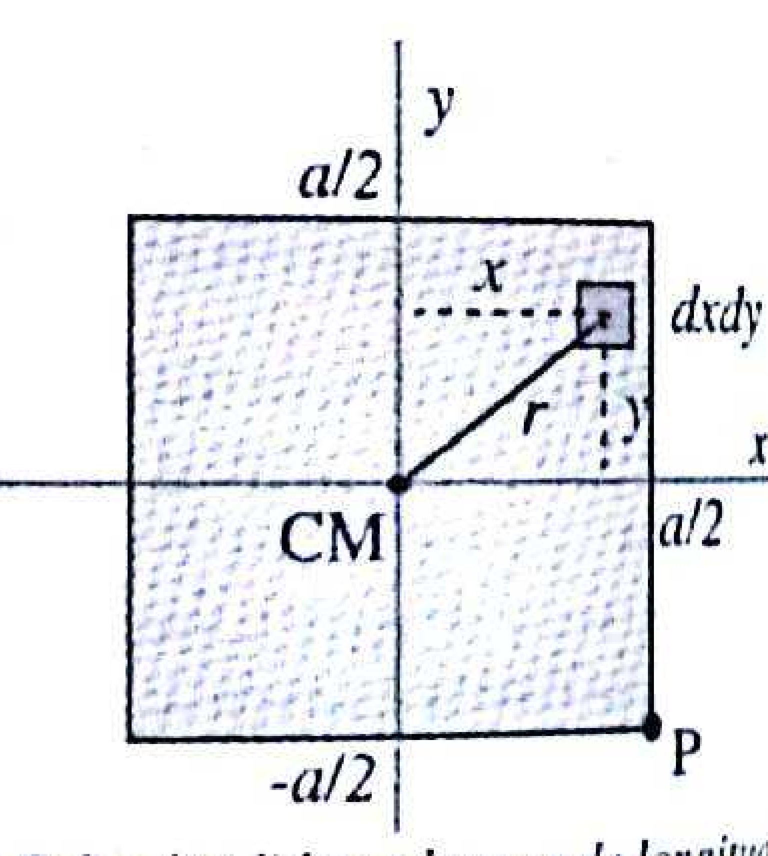
PR-4.28. *El cubo de hielo tropieza y vuelca*

Un cubo de hielo de lados a y masa M se desliza con velocidad v_o, por una mesa horizontal lisa.



Al final de la mesa el cubo tropieza con un obstáculo, que ocasiona que se voltee. Determine el valor mínimo de v_o para que el cubo de hielo se caiga de la mesa.

Solución: Primero calcularemos el momento de inercia del cubo respecto al eje de simetría que pasa por su centro de masa. Dividimos el cubo en barras de largo a paralelas al eje z, con área transversal $dxdy$ y masa elemental: $dm = \rho a dxdy$, siendo $\rho = M/a^3$, la densidad de masa .



Cubo dividido en barras de longitud a y sección transversal dxdy

$$I_{cm} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)\rho a dxdy$$

$$I_{cm} = \int_{-a/2}^{+a/2} \rho a dx \int_{-a/2}^{+a/2} (x^2 + y^2) dy$$

$$I_{cm} = \rho a \int_{-a/2}^{+a/2} (ax^2 + \frac{a^3}{12}) dx = \frac{1}{6}\rho a^5 = \frac{1}{6} Ma^2$$

Ahora calculamos el momento de inercia respecto al eje de rotación que pasa por una arista en P. Aplicando el teorema de los ejes paralelos:

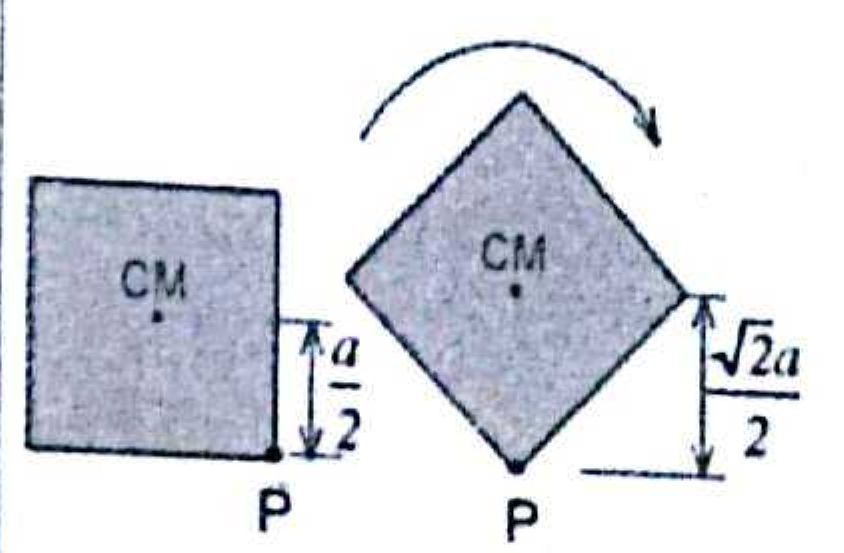
$$I_P = I_{cm} + M(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2 = \frac{1}{6}Ma^2 + \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{2}{3}Ma^2$$

Durante la colisión, la fuerza del obstáculo en el punto P no produce rotación en torno a un eje que pasa por ese punto y el momento angular se conserva, $L_{antes} = L_{despues}$:

$$Mv_0 \frac{a}{2} = I_P \omega$$

Por lo tanto, la velocidad angular inicial de rotación es:

$$\omega = \frac{Mv_0 a/2}{I_P} = \frac{Mv_0 a/2}{2Ma^2/3} = \frac{3}{4}\frac{v_0}{a}$$



La condición para que el cubo se voltee es que su centro de masa se eleve desde $a/2$ hasta $\sqrt{2}a/2$. Aplicando la conservación de la energía, $K_i + U_i = K_f + U_f$, se tiene:

$$\frac{1}{2}I_P\omega^2 + Mg\frac{a}{2} = 0 + Mg\frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}Ma^2)(\frac{3}{4}\frac{v_0}{a})^2 = Mg\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

La velocidad inicial mínima para que el cubo vuelque es:

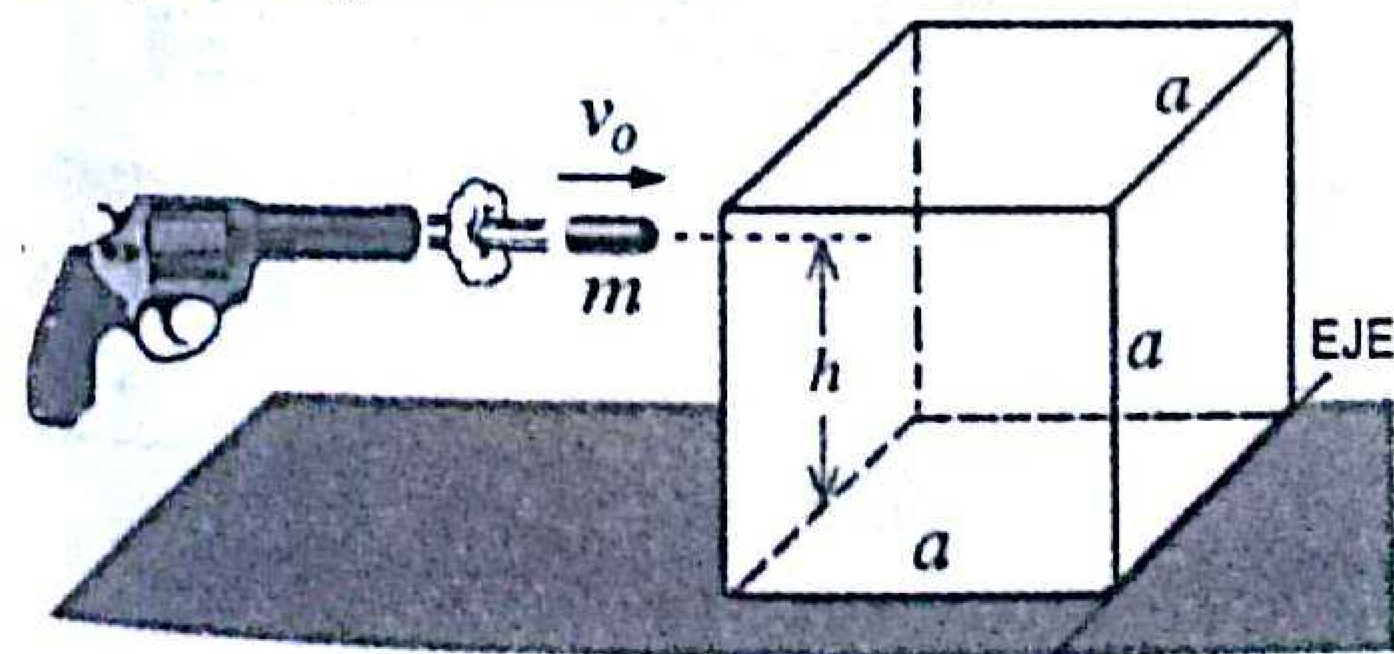
$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)ag}$$

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)ag}$$

PR-4.29. *Bala disparada contra un cubo para volcarlo*

Un cubo de madera de lado a y masa M descansa sobre una superficie horizontal y está restringido a girar en torno a un eje a lo largo de una arista.

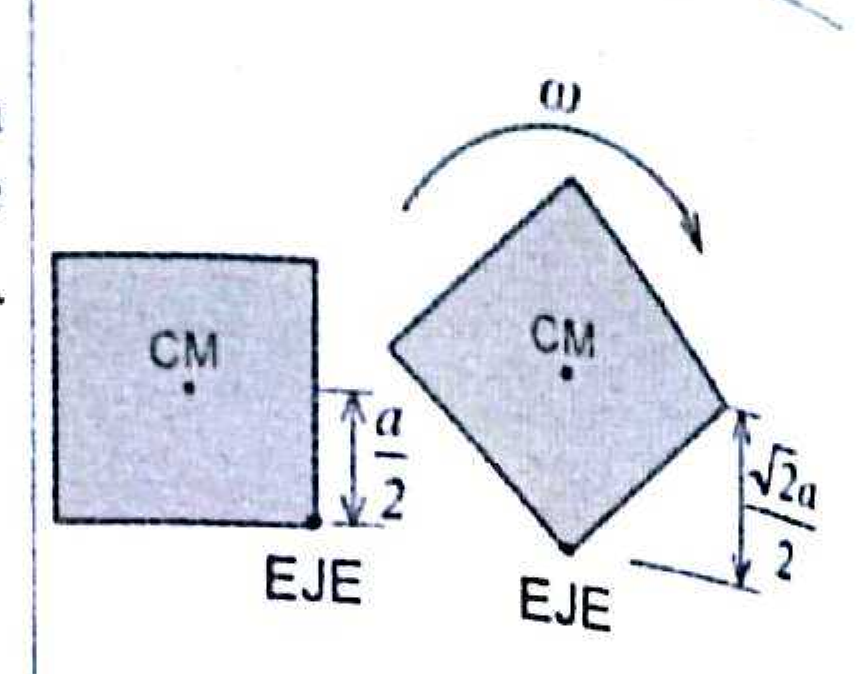


Una bala de masa $m << M$, se dispara horizontalmente contra la cara izquierda, a una altura $h = 2a/3$. La bala queda incrustada en el cubo. Determine el valor mínimo necesario de la velocidad de la bala, $\vec{v}_0$, para que el cubo al girar sobre el eje caiga sobre su cara opuesta.

Solución:. El tiempo de impacto Δt de la bala es muy breve, luego los impulsos de las fuerzas externas (pesos y contacto con la mesa) son esencialmente nulos, y debido a esto, el momento angular del sistema bala–bloque en torno al eje se conserva, $L_{antes} = L_{despues}$:

$$mv_0h = I_P\omega$$

Como podemos despreciar la masa de la bala frente a la del bloque, el momento de inercia respecto al eje de rotación que pasa por una arista en P es $I_P = 2Ma^2/3$. La velocidad angular inicial de rotación es:



$$\omega = \frac{mv_0h}{I_P} = \frac{mv_0(2a/3)}{2Ma^2/3} = \frac{mv_0}{Ma}$$

La condición para que el cubo se voltee es que su centro de masa se eleve desde $a/2$ hasta $\sqrt{2}a/2$. Una vez que comienza la rotación podemos aplicar la conservación de la energía entre estos dos estados, $K_i + U_i = K_f + U_f$:

$$\frac{1}{2}I_P\omega^2 + Mg\frac{a}{2} = 0 + Mg\frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}Ma^2)(\frac{mv_0}{Ma})^2 = Mg\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$$

La velocidad inicial mínima para que el cubo vuelque es:

$$v_0 = (\frac{M}{m})\sqrt{\frac{3}{2}ag(\sqrt{2}-1)}$$

Respuesta:

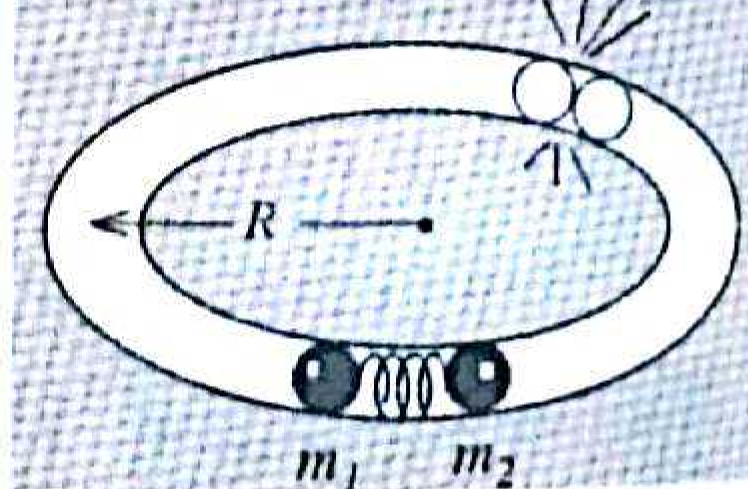
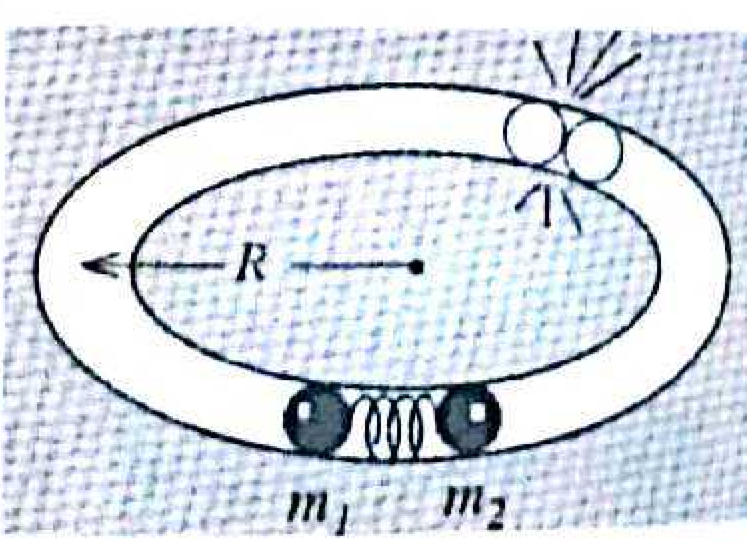
$$v_0 = (\frac{M}{m})\sqrt{\frac{3}{2}ag(\sqrt{2}-1)}$$

PR-4.30. ***¿Dónde chocarán las dos esferitas?***

En una pista circular horizontal sin rozamiento, de radio R se encuentran dos bolitas de masas m_1 y $m_2 > m_1$ que están atadas por un hilo, comprimiendo un resorte de masa y longitud despreciables. La energía inicial almacenada en el resorte es U_o. Al cortar el hilo, las bolitas salen en direcciones opuestas y luego chocan.

a) ¿En dónde tendrá lugar la colisión?

b) ¿Al cabo de cuanto tiempo ocurre la colisión?

Solución: a) Inicialmente el momento angular es cero y este valor se conserva en el transcurso del tiempo:

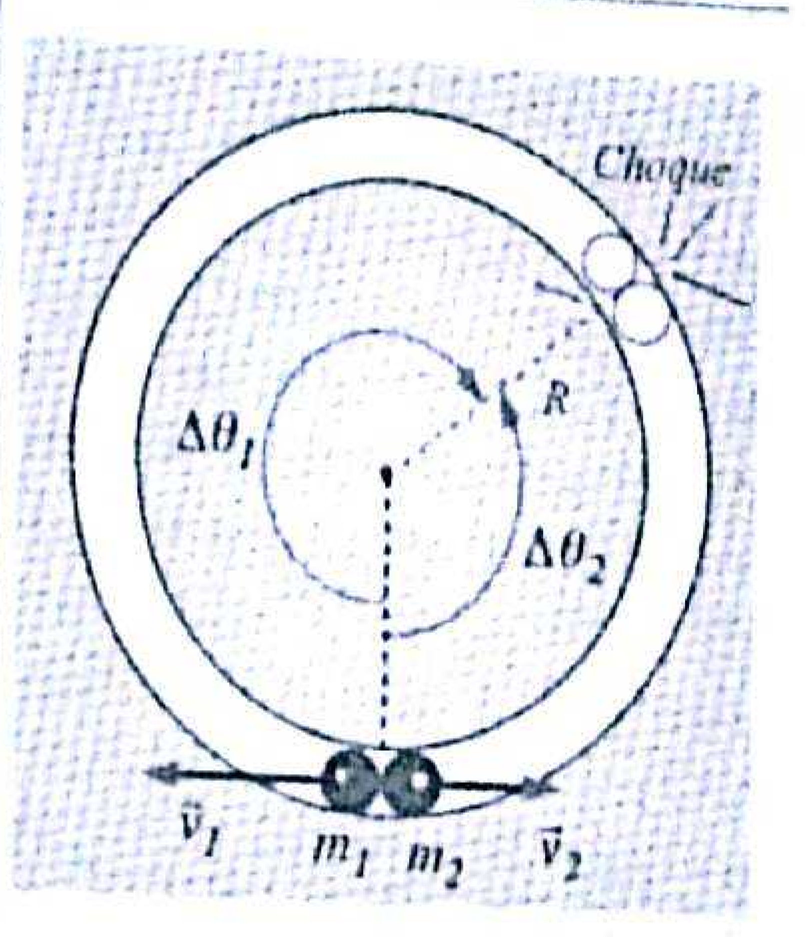
$$0 = m_2v_2R - m_1v_1R$$

$$m_1v_1 = m_2v_2 \quad \Rightarrow \quad m_1R\omega_1 = m_2R\omega_2$$

Tomando en cuenta que: $\omega_1 = \Delta\theta_1/\Delta t$ y $\omega_2 = \Delta\theta_2/\Delta t$, hallamos:

$$m_1\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = m_2\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} = m_2\frac{2\pi - \Delta\theta_1}{\Delta t}$$

$$\Delta\theta_1 = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})2\pi$$



b) Aplicando la conservación de la energía, escribimos:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_2^2 = U_0$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2(1 + \frac{m_1}{m_2}) = U_0$$

Si reemplazamos la velocidad: $v_1 = R\omega_1 = R(\Delta\theta_1/\Delta t)$, encontramos:

$$\frac{1}{2}m_1(R\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t})^2(1 + \frac{m_1}{m_2}) = U_0$$

Sustituyendo el valor del ángulo $\Delta\theta_1$, hallado en la parte (a), obtenemos el tiempo en que ocurre la colisión:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\pi^2R^2m_1m_2}{(m_1 + m_2)U_0}}$$

Respuesta:

a) Para la bolita m_1:

$$\Delta\theta_1 = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})2\pi$$

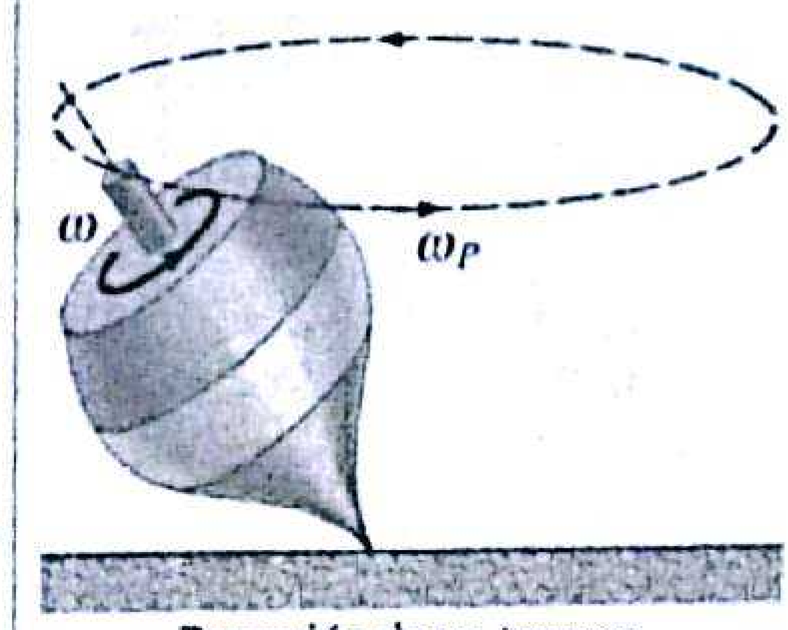
b) $\Delta t = \sqrt{\frac{2\pi^2R^2m_1m_2}{(m_1 + m_2)U_0}}$

PR-4.31. ***¿Por qué un trompo no se cae mientras gira?***

Al jugar con un trompo, notamos que además de girar alrededor de su eje, su eje de rotación tiende a dar vueltas alrededor de la vertical. Este movimiento se denomina *precesión*.

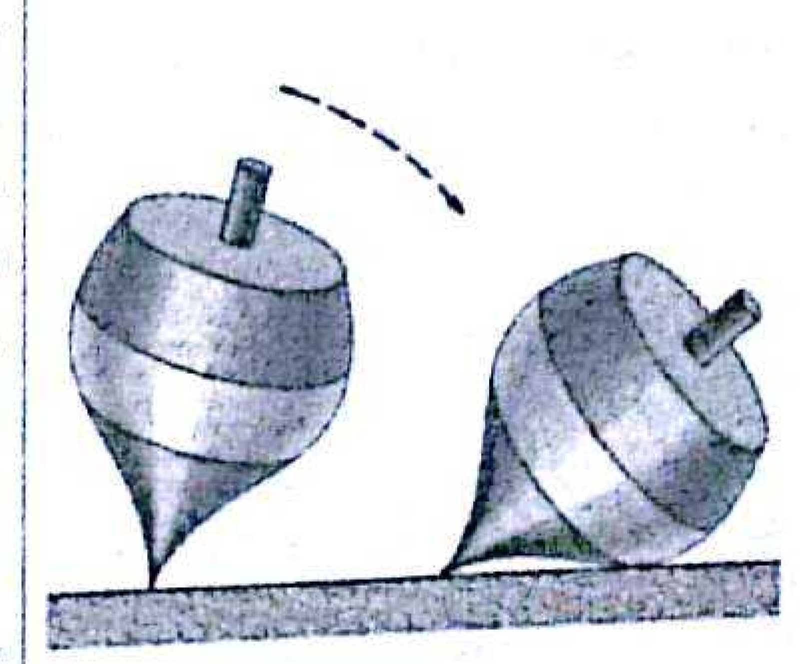
a) Explique por qué un trompo precesa.

b) Halle la velocidad angular de precesión, ω_P, y muestre que esta no depende del ángulo de inclinación del eje.

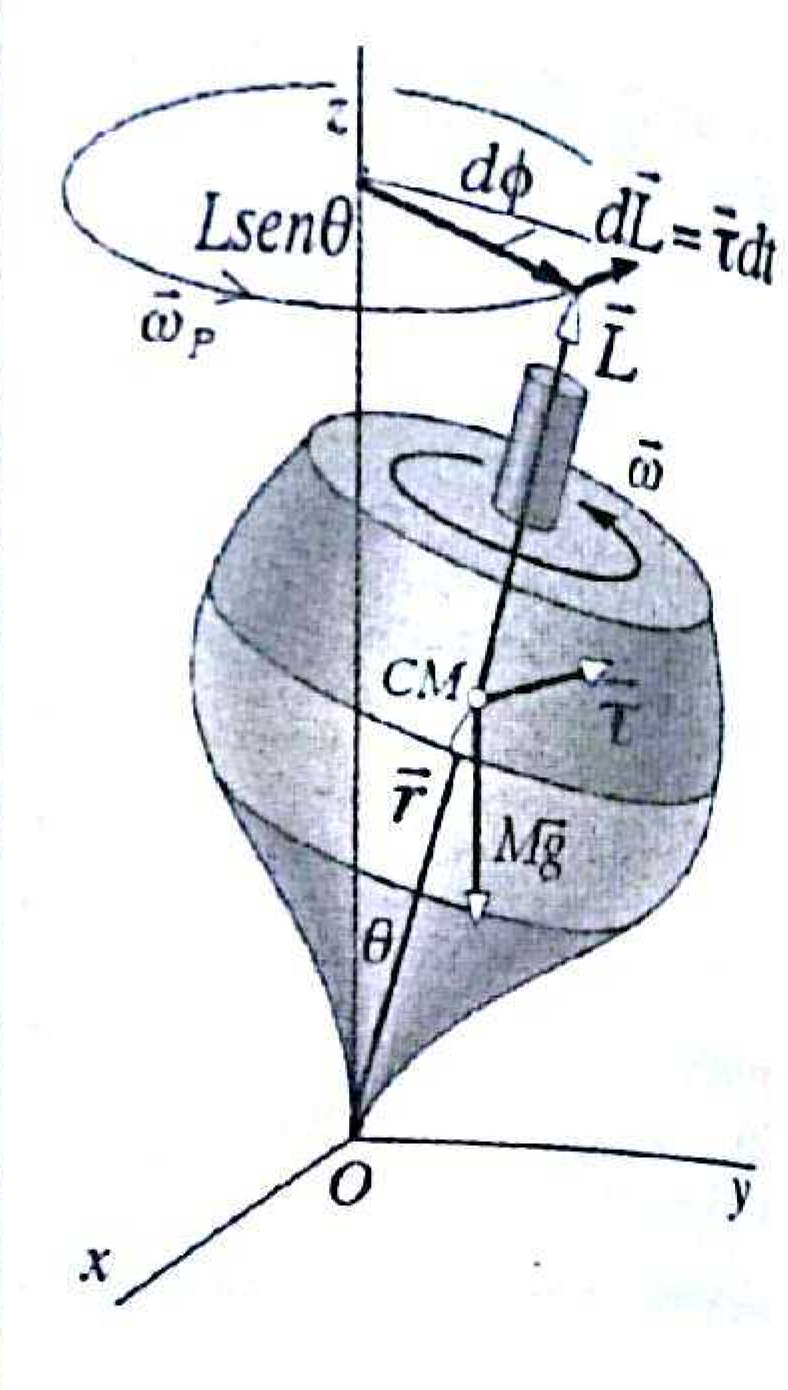


Precesión de un trompo

Solución: a) Cuando un trompo desprovisto de giro, se deja en libertad en el piso, cae de inmediato debido al torque que ejerce la fuerza de gravedad respecto al punto de apoyo. Pero si el trompo estuviese girando, el efecto del torque de la fuerza de gravedad, sería producir un cambio en la dirección de su momento angular, $\vec{L}$. Si inicialmente el trompo está girando y se coloca en posición vertical, la fuerza de gravedad no ejerce torque y en ausencia de roce el trompo permanecería vertical, decimos entonces que el trompo se queda *dormido*.



Supongamos ahora que el trompo está girando con su eje a un cierto ángulo de inclinación, θ. La fuerza normal del apoyo no produce torque en torno a ese punto, mientras que el torque de la fuerza de gravedad es: $\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$. La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $M\vec{g}$ y por ello es horizontal, perpendicular al eje de rotación y así, perpendicular al momento angular $\vec{L}$. Durante un corto intervalo de tiempo Δt, el cambio en el momento angular $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$, resulta perpendicular a $\vec{L}$, como se indica en la figura. Como la acción del torque sobre $\vec{L}$ es continua, esto se manifiesta en un movimiento de precesión del eje del trompo con respecto a la vertical.



b) Para calcular la velocidad angular de precesión, ω_P, vamos a suponer que la velocidad angular de rotación del trompo, ω, es suficientemente grande como para ignorar la contribución al momento angular total de la precesión. El torque de la fuerza de gravedad es:

$$\tau = rMgsen\theta$$

En un tiempo Δt el cambio en el momento angular es:

$$\Delta L = \tau\Delta t = (rMgsen\theta)\Delta t$$

Según el diagrama adjunto vemos que si el ángulo $\Delta\phi$ está en radianes, entonces:

$$\Delta L = (Lsen\theta)\Delta\phi$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{Lsen\theta} = \frac{rMgsen\theta}{Lsen\theta}\Delta t = \frac{rMg}{L}\Delta t$$

Obtenemos así la frecuencia angular de precesión:

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{rMg}{L} = \frac{rMg}{I\omega}$$

Vemos que la velocidad angular de precesión resulta inversamente proporcional a la velocidad angular de giro en torno al eje del trompo.

Es importante señalar que este resultado es válido siempre que se cumpla la condición: $\omega_P << \omega$, es decir, cuando $I\omega$ sea grande en comparación con rMg. En caso contrario, se presenta un movimiento mucho mas complicado. A medida que L disminuye como resultado de torques por rozamiento, la velocidad angular de precesión aumenta. Todo niño sabe por experiencia que la velocidad angular ω_P es grande al final del periodo de giro del trompo.

Respuesta:

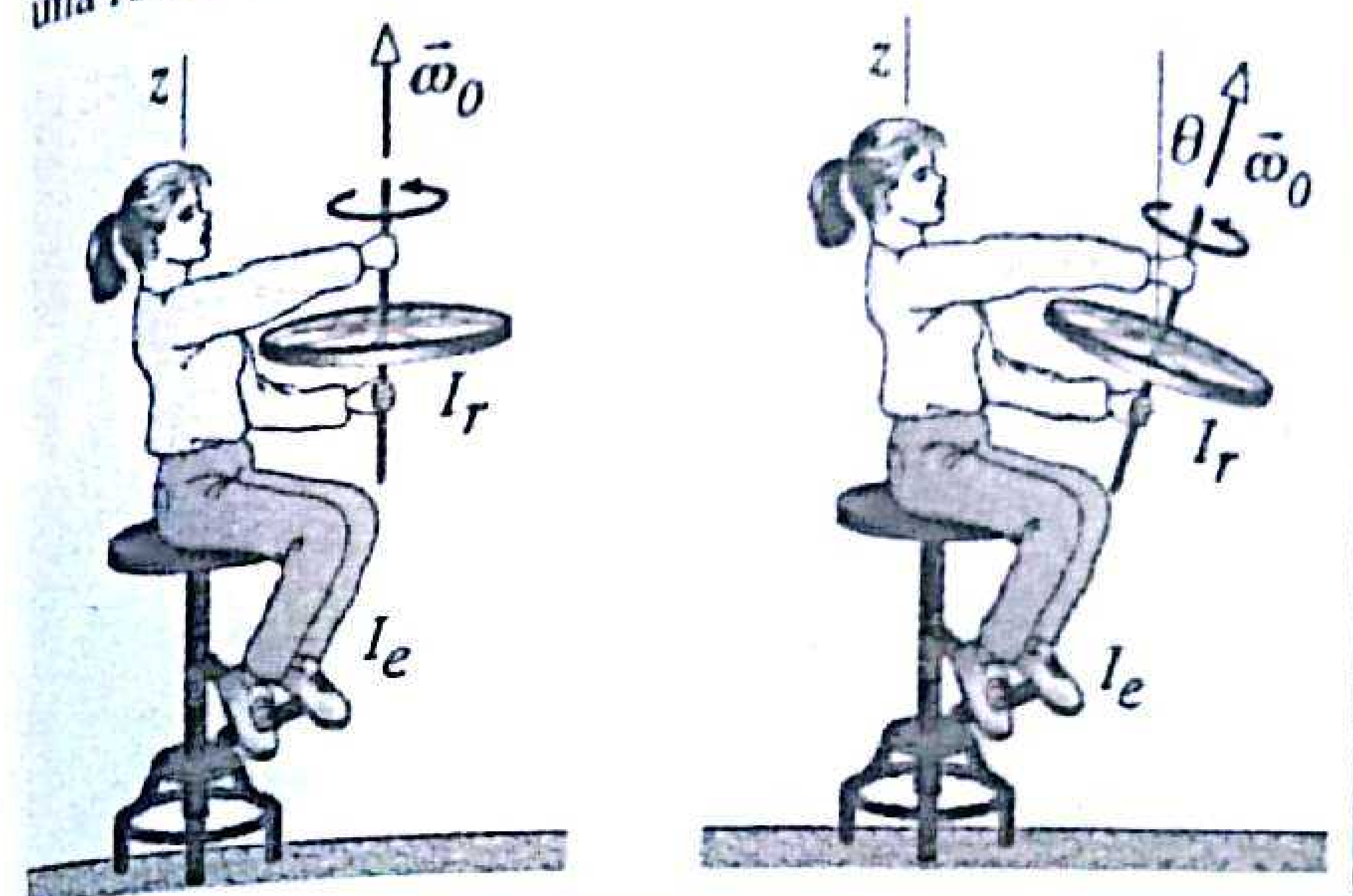
Frecuencia angular de precesión:

$$\omega_P = \frac{rMg}{I\omega}$$

No depende del ángulo

PR-4.32. *Una rueda girando en una silla giratoria*

En una clase de demostraciones de física, una estudiante se sienta sobre un taburete que puede girar, sosteniendo una rueda de bicicleta con su eje en posición vertical.



Al principio, se le entrega la rueda girando en un plano horizontal con velocidad angular $\omega_0\hat{z}$, mientras ella y el taburete están en reposo. Luego se le pide que cambie la dirección del eje de la rueda en un ángulo θ.

a) ¿Cuál será la velocidad angular que adquiere la estudiante?

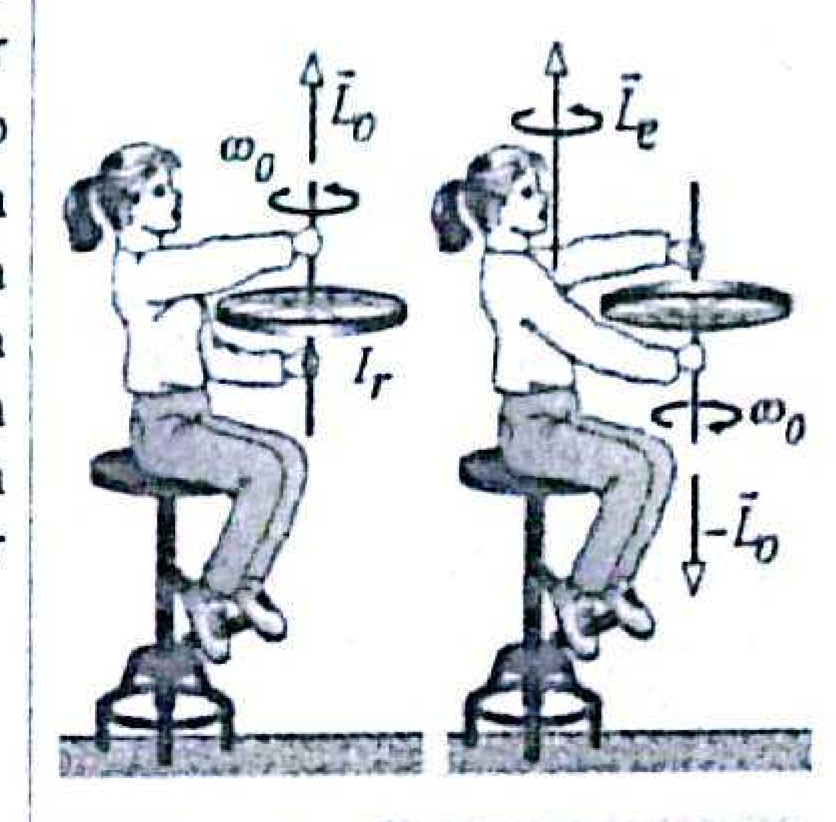
b) Describa la situación cuando la rueda se invierte en 180°.

I_r = Momento de inercia de la rueda con relación a su eje.

I_e = Momento de inercia de ella mas el taburete respecto al eje z vertical.

Solución: a) El sistema está constituido por la estudiante (con el taburete) y la rueda. Al inicio el momento angular del sistema es $\vec{L}_0 = I_r\omega_0\hat{z}$, es decir, el de la rueda. Cuando se inclina la rueda en un ángulo θ, la estudiante suministra un torque que, por ser interno al sistema, no modifica la componente vertical del momento angular total. Como la componente z del momento angular de la rueda ha disminuido, el estudiante con el taburete deben girar para suministrar el momento angular faltante y así, garantizar la conservación del momento angular del sistema:

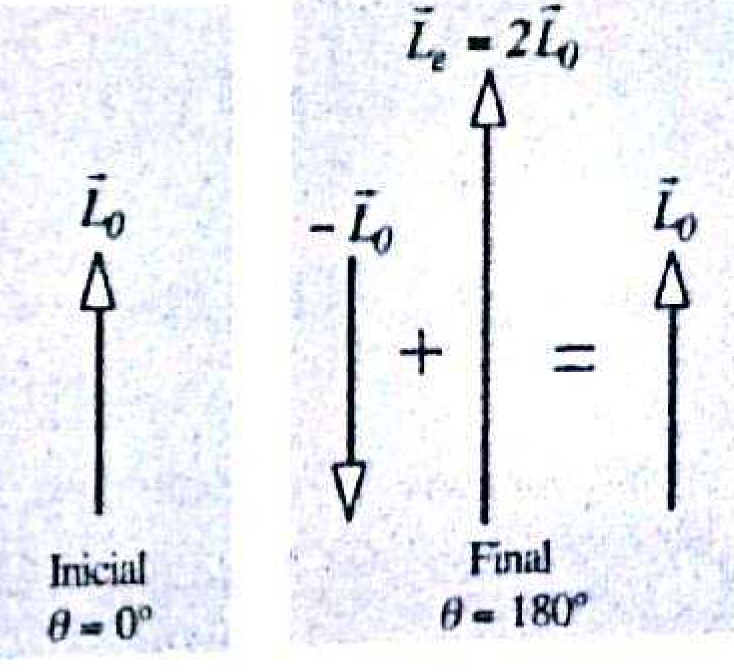
$$L_z = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad I_r\omega_0 = I_r\omega_r + I_e\omega_e$$



En esta nueva situación la velocidad angular de la rueda, ω_r, será la resultante de su velocidad angular respecto a la estudiante, $\omega_0 cos\theta$, mas la que tiene la estudiante, ω_e.

$$I_r\omega_0 = I_r(\omega_0 cos\theta + \omega_e) + I_e\omega_e$$

$$\omega_e = \frac{I_r}{I_r + I_e}(1 - cos\theta)\omega_0$$



b) Cuando la rueda se invierte en 180°, $cos\theta = -1$, y la estudiante adquiere la máxima velocidad angular:

$$\omega_e(max) = 2\frac{I_r}{I_r + I_e}\omega_0$$

En esta situación, la rueda gira con su momento angular $-\vec{L}_0$ (apuntando hacia abajo) y el momento angular de la estudiante $\vec{L}_e$ estará dirigido hacia arriba.

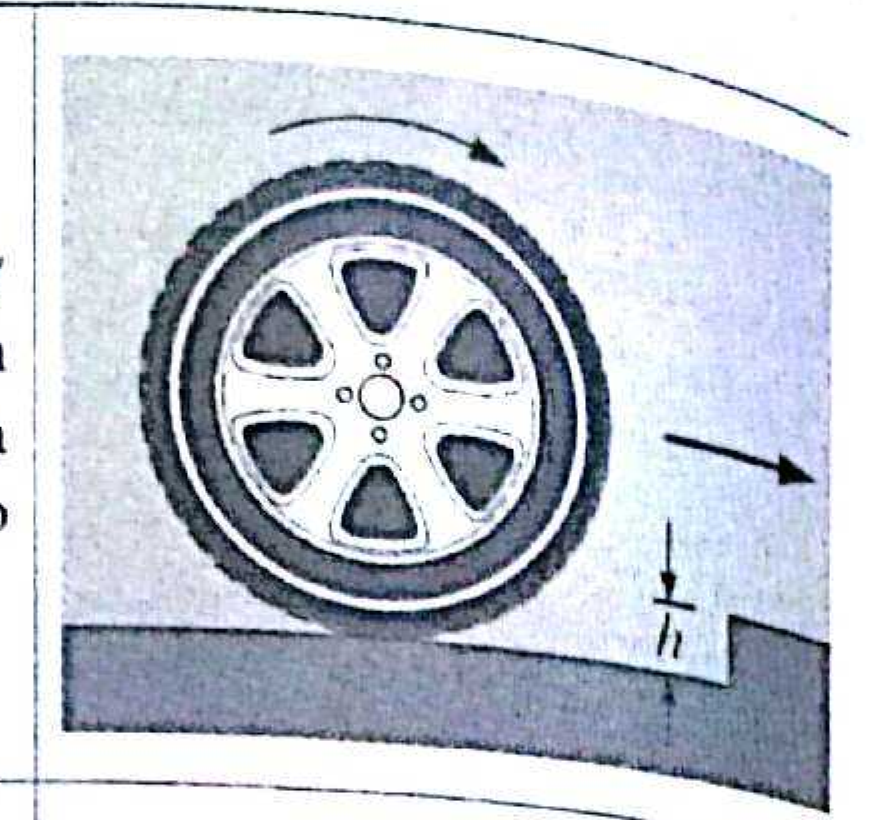
Respuesta

$$\omega_e = \frac{I_r}{I_r + I_e}(1 - cos\theta)\omega_0$$

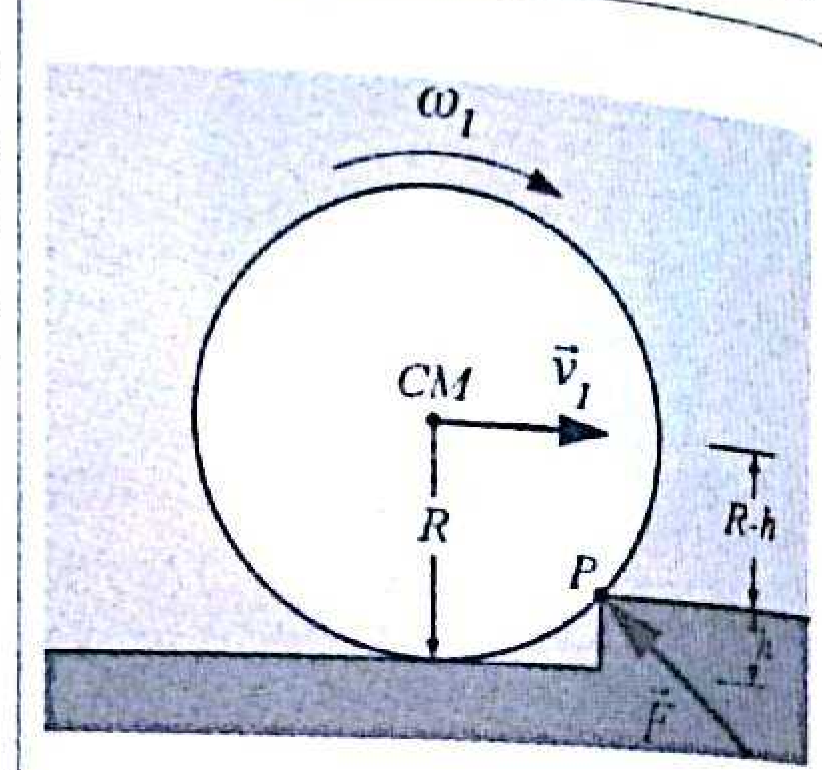
$$\omega_e(max) = 2\frac{I_r}{I_r + I_e}\omega_0$$

PR-4.33. *Una rueda que remonta un escalón*

Una rueda de masa M = 15 kg, radio R = 0,4 m y momento de inercia I_{cm} = 1,25 kg.m^2, rueda en una superficie horizontal y se dirige hacia un escalón de altura h = 0,06 m. Determine la velocidad mínima de su centro de masa para remontar el escalón.
Suponga que no ocurre deslizamiento ni rebote.



Solución: En el punto P de contacto con el escalón, se aplica sobre la rueda una fuerza impulsiva $\vec{F}$. El tiempo de impacto es tan breve que el impulso provocado por el peso es despreciable. La fuerza $\vec{F}$ tiene dirección desconocida pero no ejerce torque por no tener brazo, y por lo tanto, el momento angular se conserva, $L_1 = L_2$:

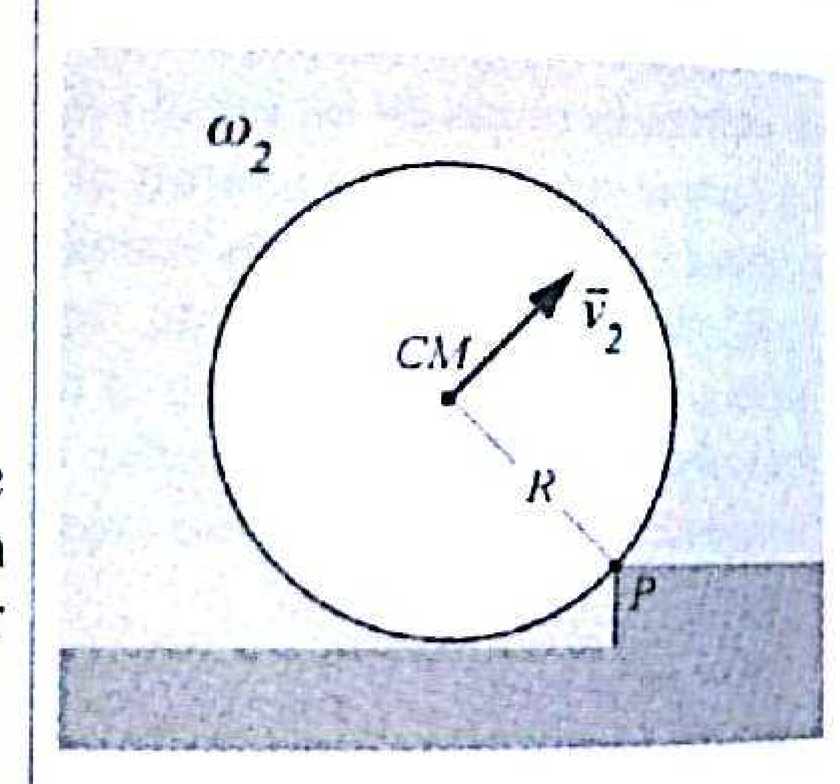


$$Mv_1(R-h) + I_{cm}\omega_1 = Mv_2R + I_{cm}\omega_2$$

Como no ocurre deslizamiento, $\omega_1 = v_1/R$ y $\omega_2 = v_2/R$:

$$Mv_1(R-h) + I_{cm}\frac{v_1}{R} = Mv_2R + I_{cm}\frac{v_2}{R}$$

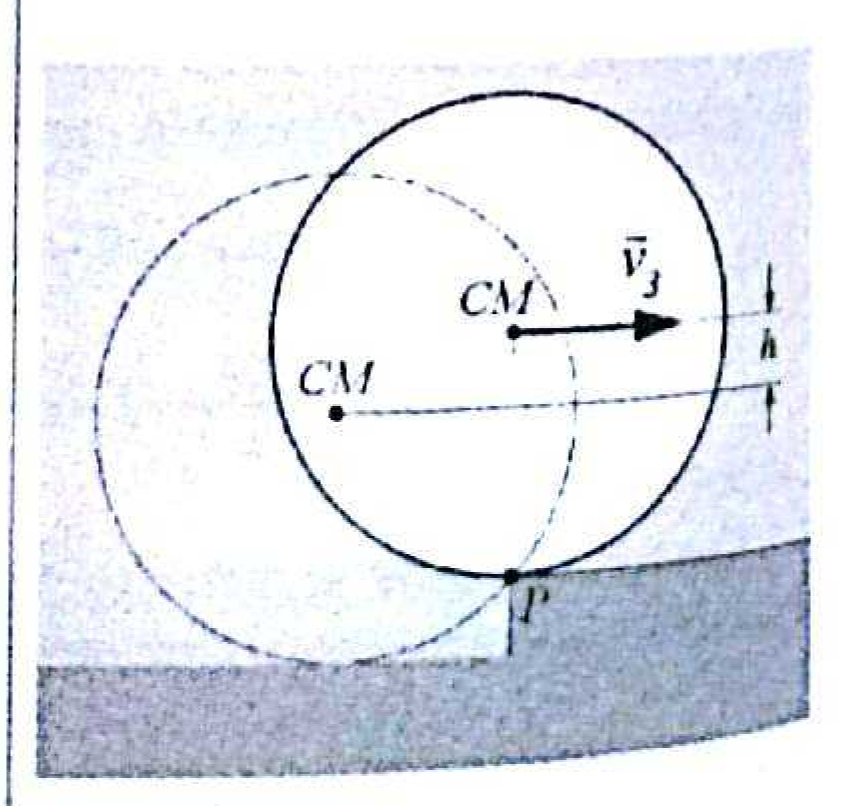
$$v_1 = v_2\left(\frac{1 + I_{cm}/MR^2}{1 - h/R + I_{cm}/MR^2}\right) \qquad (1)$$



A fin de que el centro de masa de la rueda apenas se eleve hasta la altura h del escalón, es decir, llegue allí con velocidad v_3 nula, su energía cinética inicial debe ser igual al cambio en energía potencial, $K_2 = U_3 - U_2$:

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2 = Mgh$$

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

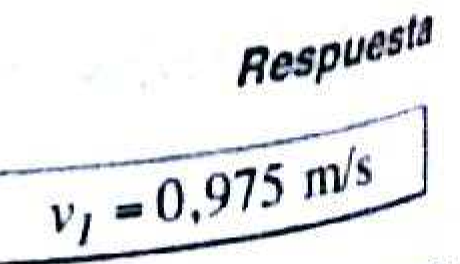


Reemplazando este expresión en la ecuación (1), se obtiene:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh(1 + I_{cm}/MR^2)}}{1 - h/R + I_{cm}/MR^2}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2(9,8\frac{m}{s^2})(0,03m)(1 + \frac{1,25Kg.m^2}{(15kg)(0,4m)^2})}}{1 - \frac{0,06m}{0,4m} + \frac{1,25Kg.m^2}{(15kg)(0,4m)^2}} = 0,975\frac{m}{s}$$

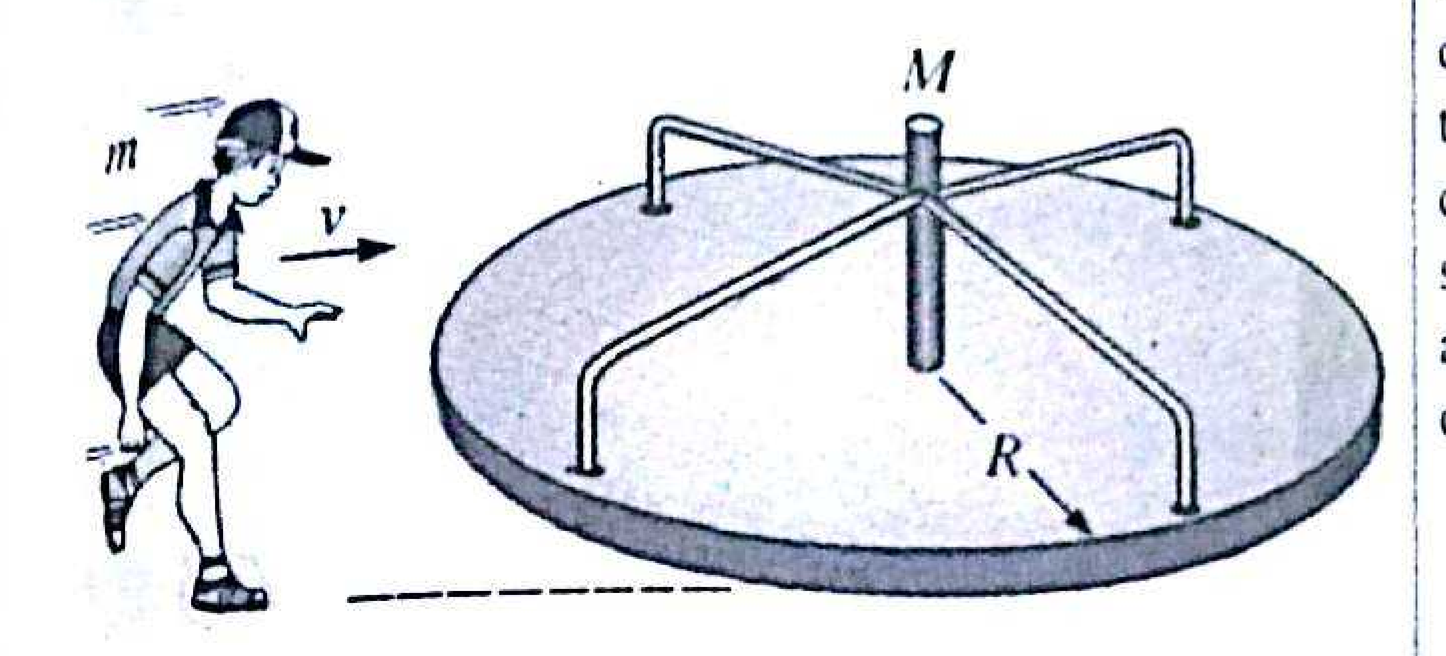
Respuesta



PR-4.34. *Corre y luego salta sobre un tiovivo*

En un parque de recreación hay un pequeño tiovivo que consiste de una plataforma circular giratoria de radio R = 1,20 m y masa total M = 170 kg.

El tiovivo puede girar sin fricción en torno a su eje vertical y tiene un radio de giro r = 0,94 m. Un muchacho de masa m = 45 kg corre a una velocidad v = 3,0 m/s tangente al borde del tiovivo cuando está en reposo y luego salta sobre él. Halle la velocidad angular que adquiere el tiovivo con el muchacho.



Solución: El momento angular inicial del sistema respecto al eje del tiovivo es el que tiene el muchacho cuando está corriendo:

$$L_i = mvR = (45kg)(3m/s)(1,20m) = 162kg.m^2/s$$

El radio de giro de un objeto, $k = \sqrt{I/M}$, es por definición, el radio del anillo equivalente en el que pudiera estar concentrada la masa del cuerpo para que tenga la misma inercia de rotación. El momento de inercia del tiovivo solamente es:

$$I = Mk^2 = (170kg)(0.94m)^2 = 150kg.m^2$$

El momento de inercia del muchacho en el tiovivo es:

$$I_m = mR^2 = (45kg)(1,20m)^2 = 64,8kg.m^2$$

El momento de inercia total (tiovivo + muchacho) es:

$$I_t = I + I_m = 150kg.m^2 + 64,8kg.m^2 = 214,8kg.m^2$$

El momento angular final del sistema es:

$$L_f = I_t\omega$$

Aplicando la conservación del momento angular se obtiene la velocidad angular del tiovivo:

$$L_f = L_i \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{L_i}{I_t} = \frac{162kg.m^2/s}{214,8kg.m^2} = 0,754rad/s$$

Respuesta

$\omega = 0,754$ rad/s

PR-4.35. *Se desprende un trozo del borde del disco*

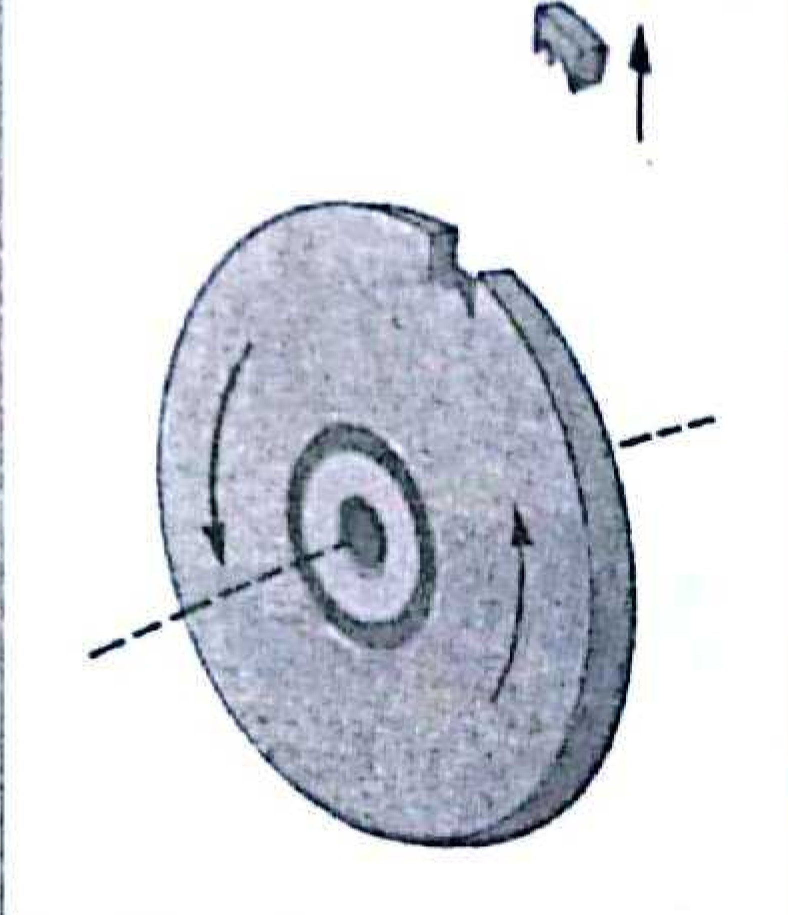
Un disco uniforme de masa M y radio R está girando en torno a un eje horizontal que pasa por su centro con una velocidad angular, ω_0.

a) ¿Cuál es su energía cinética y su momento angular?

Se desprende del borde del disco un pequeño trozo de masa m, en un instante tal que el trozo se eleva verticalmente sobre el punto en que se rompió.

b) ¿A qué altura se eleva el trozo antes de que comience a caer?

c) ¿Cuál es la velocidad angular final del disco roto? ¿Cuáles son el momento angular y la energía finales?



Solución: a) Inicialmente la energía cinética del disco en rotación es:

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

y su momento angular: $L_i = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$

b) La velocidad inicial del trozo que se desprende del disco es igual a la de rotación del borde del disco, $v_0 = \omega_0 R$ y al alcanzar la altura h se detiene:

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad 0 = \omega_0^2R^2 - 2gh$$

La altura que se eleva el trozo antes de que comience a caer es:

$$h = \frac{\omega_0^2R^2}{2g}$$

c) Aplicando la conservación de la energía, escribimos:

$$K_i = K_f + U_f$$

Donde la energía potencial del fragmento a la altura h es:

$$U_f = mgh = mg\frac{\omega_0^2R^2}{2g} = \frac{m\omega_0^2R^2}{2}$$

El momento de inercia final del disco es igual al inicial menos el que corresponde al pequeño fragmento que se desprende. Por lo tanto, la energía cinética de rotación del disco es:

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega_f^2$$

Sustituyendo K_i, K_f y U_f se tiene que la velocidad angular final es igual a la inicial:

$$\omega_f = \omega_0$$

El momento angular y la energía finales del disco roto son, respectivamente:

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M - m)R^2\omega_0^2$$

$$L_f = I_f\omega_f = (\frac{M}{2} - m)R^2\omega_0$$

Respuesta

a) $K_i = \frac{MR^2\omega_0^2}{4}$, $L_i = \frac{MR^2\omega_0}{2}$

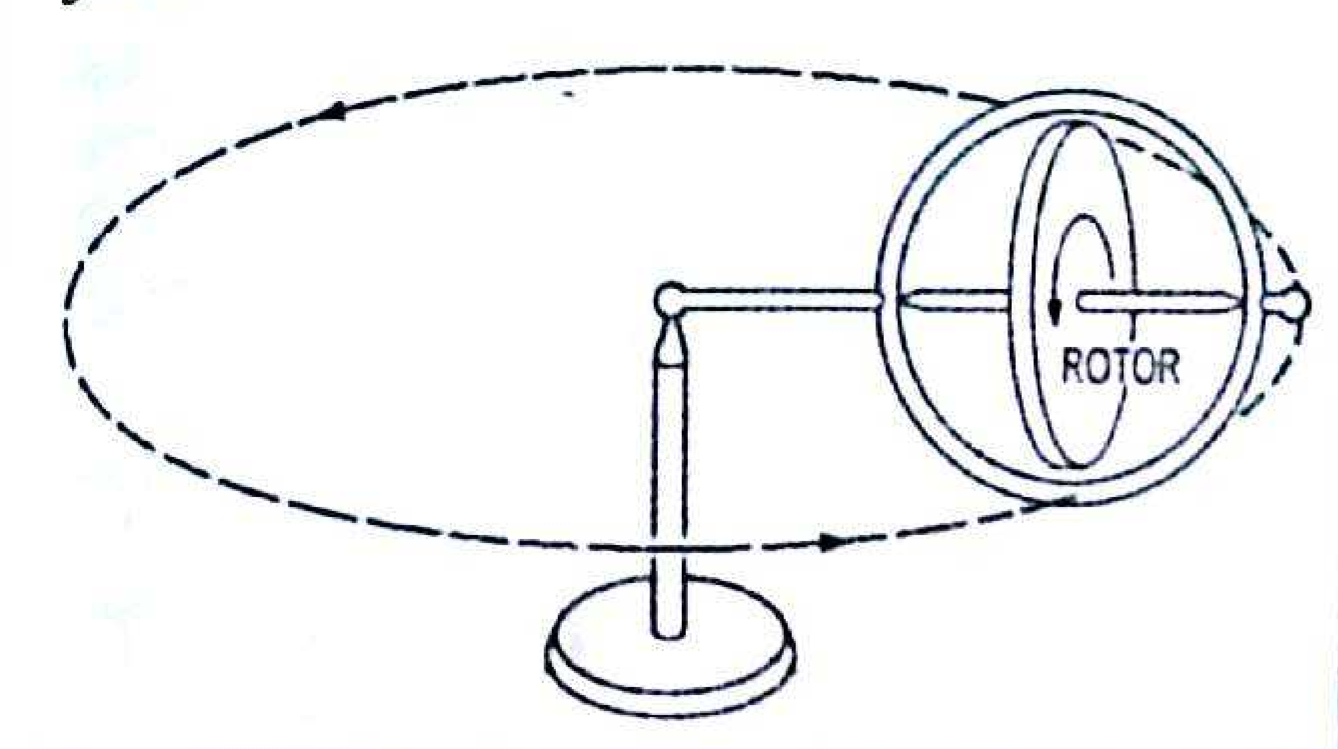
b) $h = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}$,

c) $\omega_f = \omega_0$, $L_f = (\frac{M}{2} - m)R^2\omega_0$

$K_f = \frac{1}{2}(\frac{M}{2} - m)R^2\omega_0^2$

PR-4.36. *Precesión de un giroscopio de juguete*

Un giroscopio consiste de un disco que se monta en cojinetes sin fricción de tal manera que el eje de rotación quede libre para seguir cualquier dirección. Considere el rotor de un giroscopio de juguete que tiene una masa m = 0,15 kg y un momento de inercia en torno a su eje $I = 1{,}5x10^{-4}\,\text{kg.m}^2$. Mediante un hilo enrollado se pone a girar el rotor en un marco metálico de masa M = 0,03 kg.



Cuando se coloca el giroscopio apoyado sobre un pivote con su centro de masa a una distancia d = 4 cm del pivote, adquiere un movimiento de precesión dando una revolución cada 2,5 s. en un plano horizontal

a) Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote.

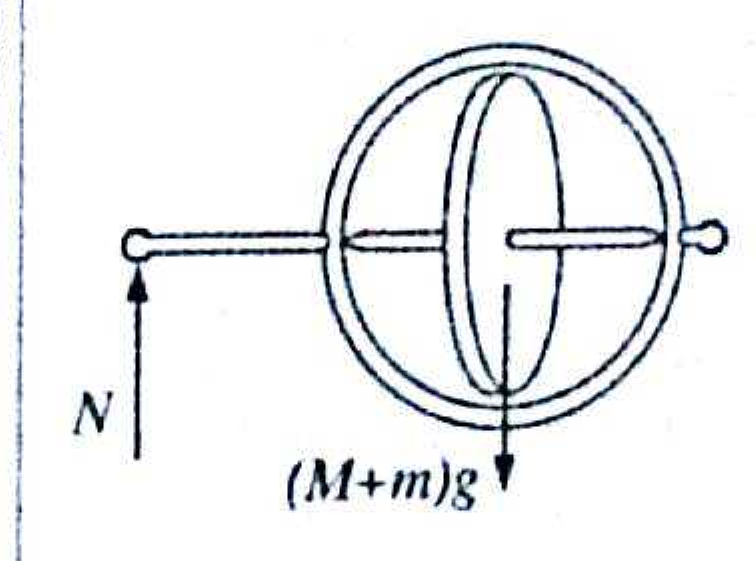
b) Calcule la velocidad angular con que el rotor gira sobre su eje.

c) Represente con vectores el momento angular del rotor y el torque que actúa sobre él.

Solución: a) Las únicas fuerzas externas sobre el giroscopio son: la fuerza normal N que actúa en el pivote, libre de fricción y el peso del rotor con su marco $M'g = (M+m)g$, que actúa en su centro de masa a distancia d del pivote. Como el rotor está en equilibrio vertical, se tiene:

$$\sum F_y = N - (M+m)g = 0$$

$$N = (M+m)g = (0{,}15\text{kg} + 0{,}03\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 1{,}76\text{N}$$



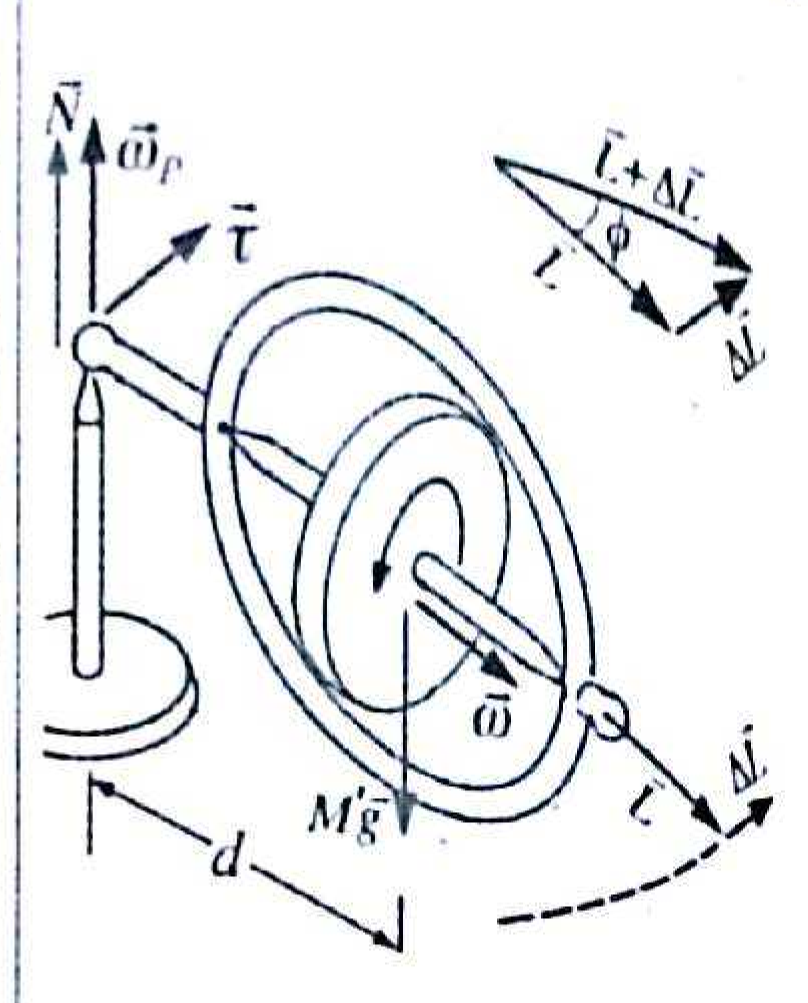
b) El par de fuerzas constituido por el peso y la normal ejercen un torque, $\vec{\tau} = \vec{d} \times M'\vec{g}$, sobre el volante.

Como se muestra en la figura, el vector torque, $\vec{\tau}$, tiene dirección horizontal, y perpendicular al eje de rotación y, por tanto, al vector momento angular, $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Como resultado del torque, el cambio en el momento angular, $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$, durante un corto intervalo de tiempo Δt, es paralelo a $\vec{\tau}$ y, por tanto, resulta perpendicular a $\vec{L}$. El cambio en la dirección de $\vec{L}$ se manifiesta en la precesión del rotor con respecto al eje vertical. La razón a la cual se mueve el eje del rotor es la velocidad angular de precesión:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{|\Delta L/L|}{\Delta t} = \frac{\tau}{L} = \frac{(M'g)d}{I\omega} = \frac{(M+m)gd}{I\omega}$$

$$\omega_p = \frac{(0{,}15\text{kg} + 0{,}03\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}04\text{m})}{(1{,}5x10^{-4}\ \text{kg.m}^2)(2\pi\text{rad}/2{,}5\text{s})} = 187\text{rad/s}$$

$$\omega_p = (187\frac{\text{rad}}{\text{s}})(60\frac{\text{s}}{\text{min}})(\frac{1}{2\pi}\frac{\text{rev}}{\text{rad}}) = 1790\frac{\text{rev}}{\text{min}}$$



Respuesta

$\omega_p = 187\text{rad/s} = 1790\text{rev/min}$

PR-4.37. *¿Por qué no se cae la bicicleta en marcha?*

El momento de inercia de la rueda delantera de una bicicleta alrededor de su eje es $I = 0{,}085\text{kg.m}^2$, su radio es R = 0,33 m y la rapidez hacia delante es 5 m/s. Suponga que el ciclista de masa M = 60 kg está situado una distancia d = 0,040 m horizontalmente a un lado de la línea de contacto de las ruedas y el suelo.

¿Con qué velocidad angular debe girarse esa rueda alrededor de un eje vertical para contrarrestar el torque de volcadura debido al peso del ciclista?

Solución: Cuando nos montamos en una bicicleta que está parada, resulta muy difícil mantenerse en equilibrio a menos que uno sea un acróbata. Pero una vez que la bicicleta está andando, podemos mantener el equilibrio con relativa facilidad y cuanto más rápido giran las ruedas, más estabilidad se tiene.

Lo que permite mantener el equilibrio es la acción giroscópica sobre su momento angular. Supongamos que el ciclista inclina la bicicleta un poco hacia su izquierda. Entonces aparece un torque $|\vec{\tau}| = Mgd$ producido por el peso sobre la rueda delantera, que haría que la bicicleta se caiga si estuviese parada. Sin embargo, cuando la bicicleta está avanzando, la rueda delantera tiene un momento angular, $\vec{L} = I\vec{\omega}$, dirigido hacia la izquierda y el efecto del torque será crear una variación del momento angular de la rueda, $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$, dirigida hacia atrás.



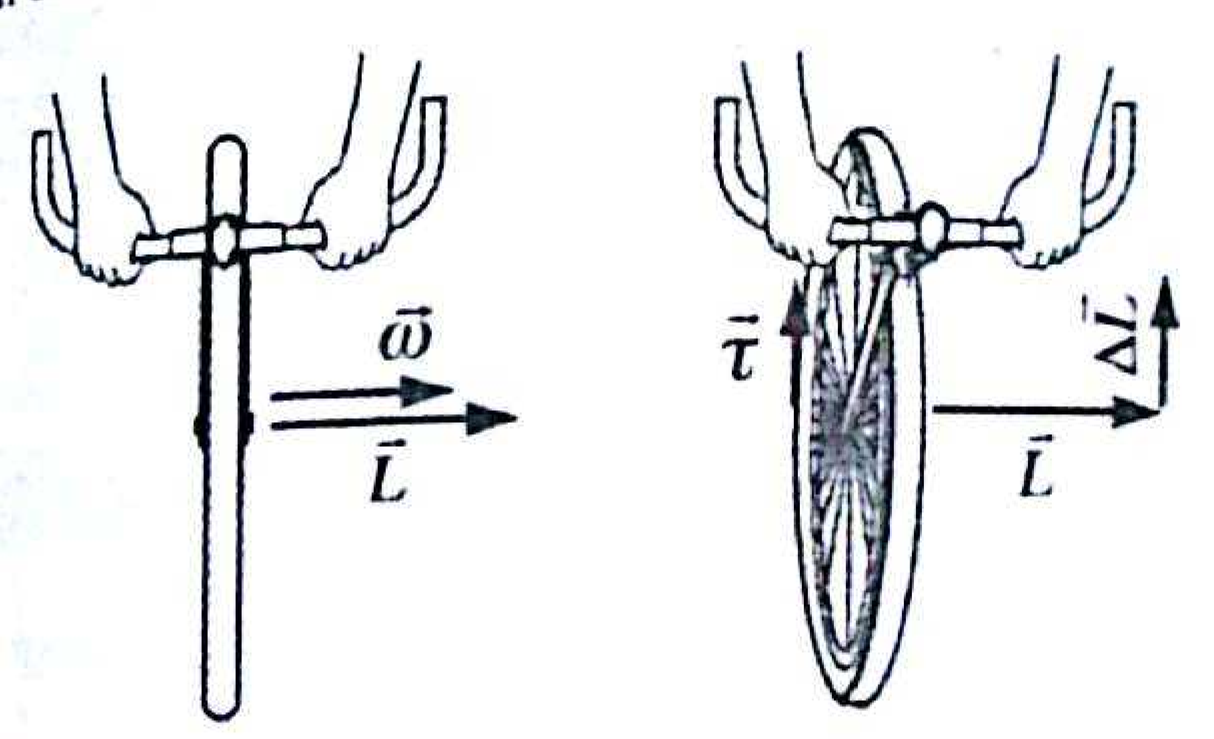
Esto quiere decir que la rueda delantera tiende a girar hacia la izquierda, como si se hubiese girado el manubrio hacia la izquierda y la bicicleta en vez de caer comienza a voltear en esa dirección.

Usando la expresión para la frecuencia angular de precesión, se obtiene:

$$\omega_p = \frac{Mgd}{I\omega} = \frac{Mgd}{I(v/R)} = \frac{(60\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}04\text{m})}{(0{,}085\text{kg.m}^2)(5\text{m/s}/0{,}33\text{m})}$$

$$\omega_p = (18{,}3\frac{\text{rad}}{\text{s}})(60\frac{\text{s}}{\text{min}})(\frac{1}{2\pi}\frac{\text{rev}}{\text{rad}}) = 175\frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

Sabemos por experiencia que si queremos virar una bicicleta en marcha hacia un lado, no es necesario girar el manubrio, y basta con que inclinemos la bicicleta un poco en esa dirección.



Respuesta

$\omega_p = 18{,}3\text{rad/s} = 175\text{rev/min}$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-4.01. ***Lo que siempre produce una fuerza es....***

Un cuerpo rígido está moviéndose libremente en el espacio y luego, se le aplica una fuerza externa. De entre los efectos que se mencionan a continuación, ¿cuál es el único que se produce con toda seguridad?

a) Provocarle rotación.
b) Aumentar su momento angular.
c) Aumentar su rapidez.
d) Modificar su momento lineal.
e) Modificar la dirección de su velocidad.

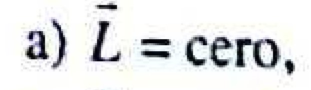
PE-4.02. ***¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera?***

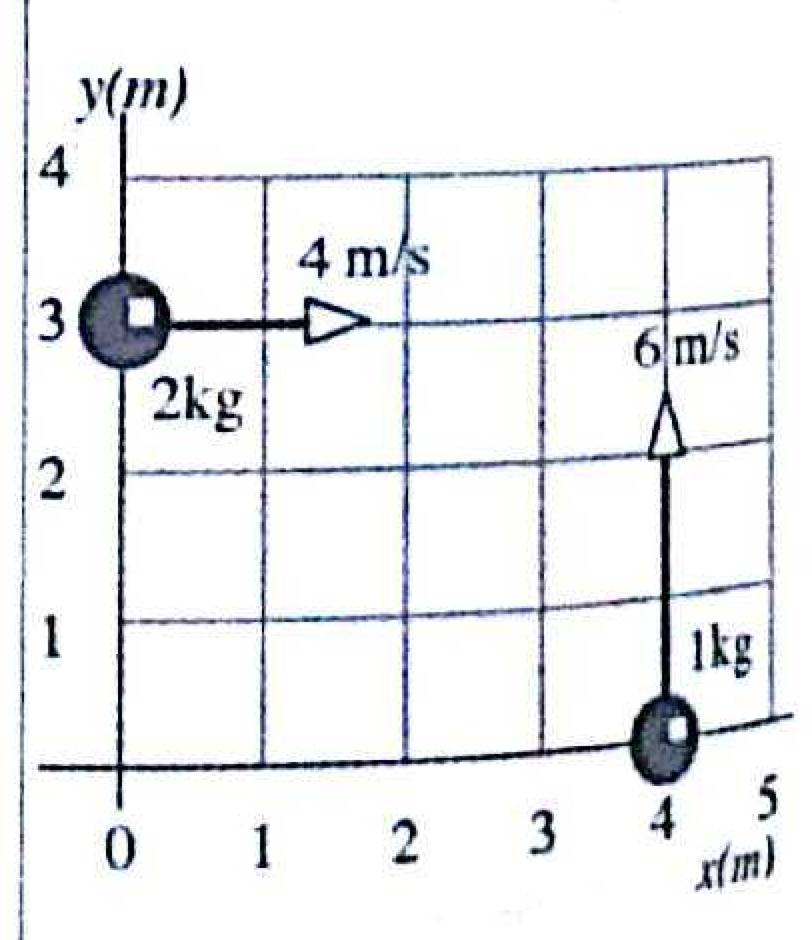
a) Si para un sistema de partículas $\vec{L} = 0$, todas las partículas deben estar en reposo.
b) Si para un sistema, $\vec{p}$ se conserva, entonces $\vec{L}$ también se conserva.
c) Para una partícula que se mueva en línea recta, $\vec{L}$ es cero.
d) Si para un sistema de partículas $\vec{p} = 0$, entonces $\vec{L} = 0$.
e) Para un sistema de partículas que están en movimiento, $\vec{L}$ total puede ser nulo.

PE-4.03. ***Momento angular total de dos partículas***

Dos partículas se están moviendo en el plano x-y como muestra la figura. El momento angular total (en kg.m^2/s) con respecto al origen de coordenadas es:

a) $\vec{L}$ = cero,
b) $\vec{L} = +8\hat{z}$,
c) $\vec{L} = 24\hat{x} - 24\hat{y}$
d) $\vec{L} = +16\hat{z}$,
e) $\vec{L} = 24\hat{x} + 24\hat{y}$

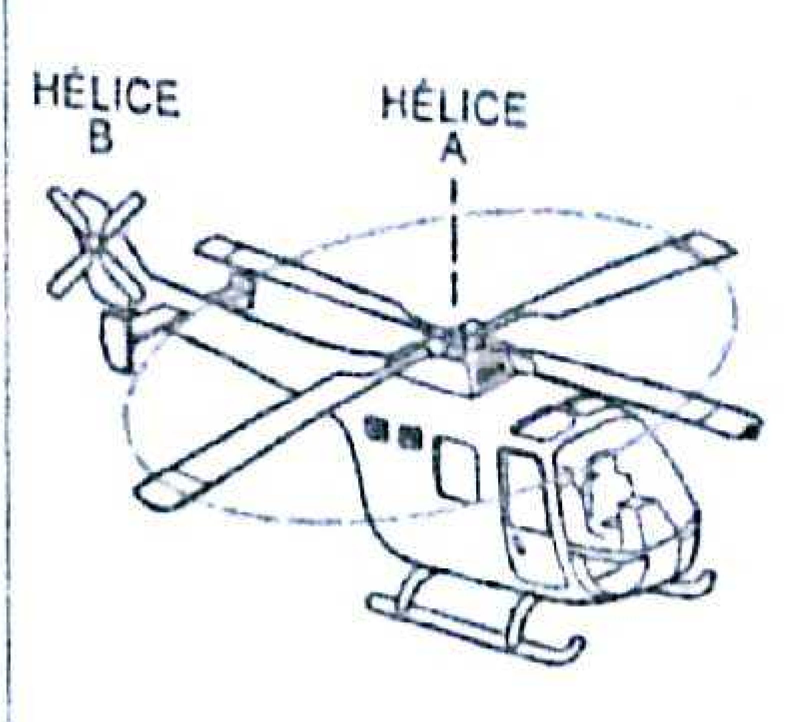




PE-4.04. ***¿Para qué sirve la hélice pequeña?***

Un helicóptero, además de su hélice principal (A), tiene una segunda hélice más pequeña montada en un eje horizontal en la parte de atrás (B). La función de esta hélice pequeña es .....

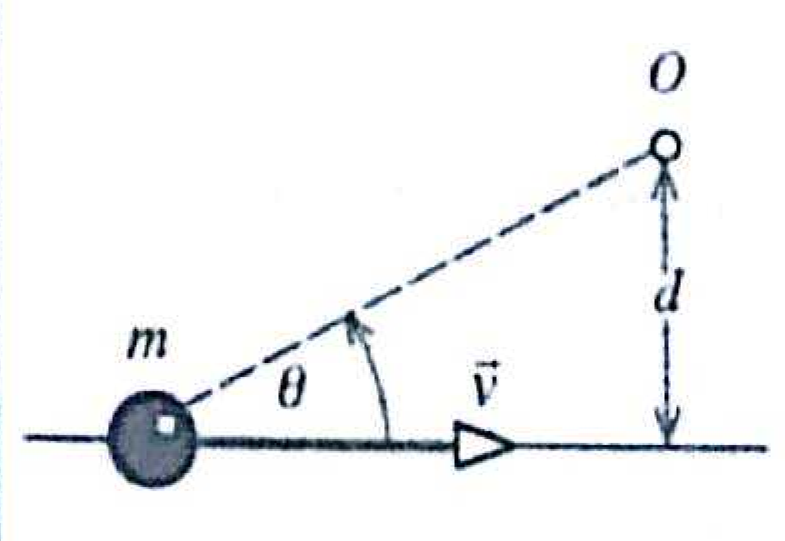
a) Para descender.
b) Para marchar hacia atrás.
c) Para emergencia en el caso que falle la hélice principal.
d) Para que cualquier cambio de la velocidad de la hélice principal no produzca rotación opuesta del helicóptero.
e) Para ventilación.



PE-4.05. ***¿En línea recta y con momento angular?***

Una partícula de masa m se mueve en línea recta con velocidad $\vec{v}$. Considerando un punto O a una distancia d de esta recta, el módulo del momento angular de la partícula respecto a ese punto es......

a) cero, b) mvd, c) varía con el ángulo θ



PE-4.06. ***Momento angular de sistema de partículas***

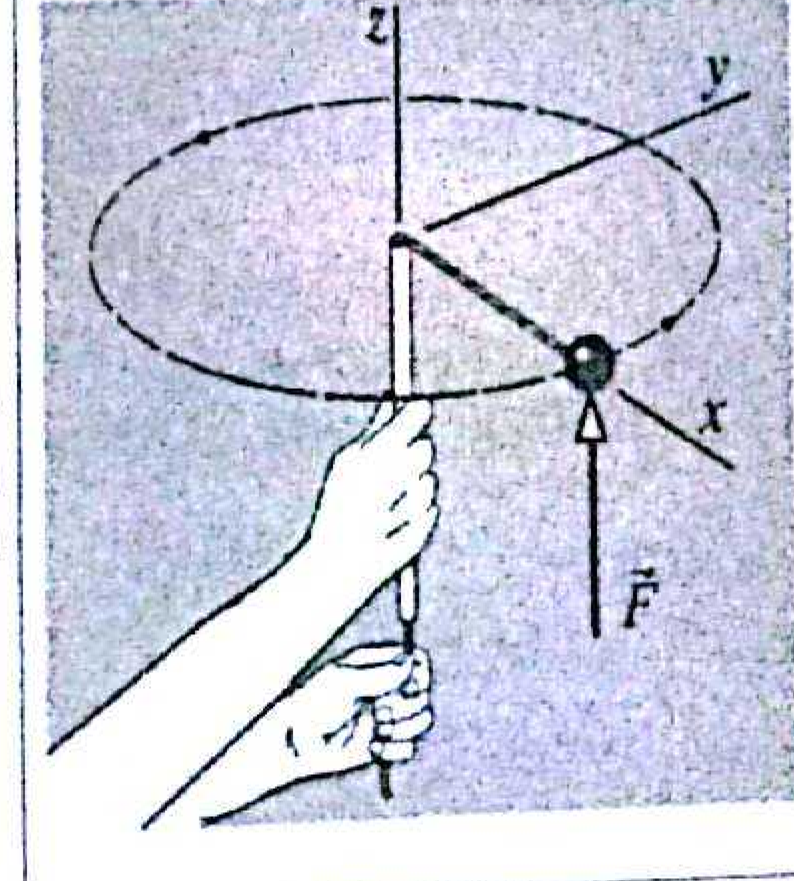
El momento angular de un sistema de partículas...

a) Se conserva bajo cualquier circunstancia.
b) Cambia si actúa una fuerza neta sobre el sistema.
c) Cambia si actúa un torque neto sobre el sistema.
d) Puede cambiar si actúa un torque neto externo sobre el sistema, dependiendo de la dirección de este torque.

PE-4.07. ***Golpe sobre pelota que da vueltas en círculo***

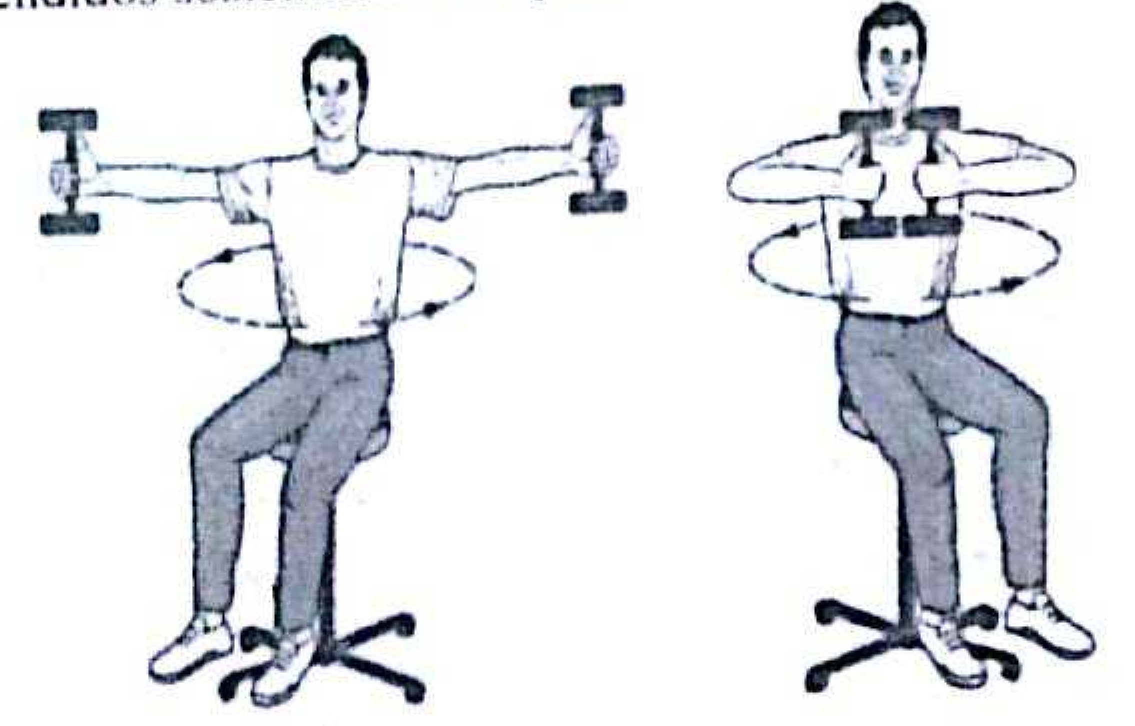
Una persona está girando una esferita atada a un hilo en un círculo horizontal, de manera que el eje de rotación es vertical. En el instante indicado, la pelota va en la dirección +y se le comunica un golpe en la dirección +z. El cambio $\Delta\vec{L}$ de su momento angular en ese instante queda en la dirección:

a) $-\hat{x}$, b) $-\hat{y}$, c) $+\hat{z}$, d) $+\hat{x}$, e) $-\hat{z}$



PE-4.08. *Moviendo pesas sobre un taburete giratorio*

En una demostración de física, un alumno está sentado dando vueltas sobre una silla giratoria, con sus brazos extendidos sosteniendo dos pesas.



Cuando el alumno lleva las pesas hasta su pecho, entonces su...

a) momento de inercia aumenta.

b) velocidad angular disminuye.

c) velocidad angular queda igual.

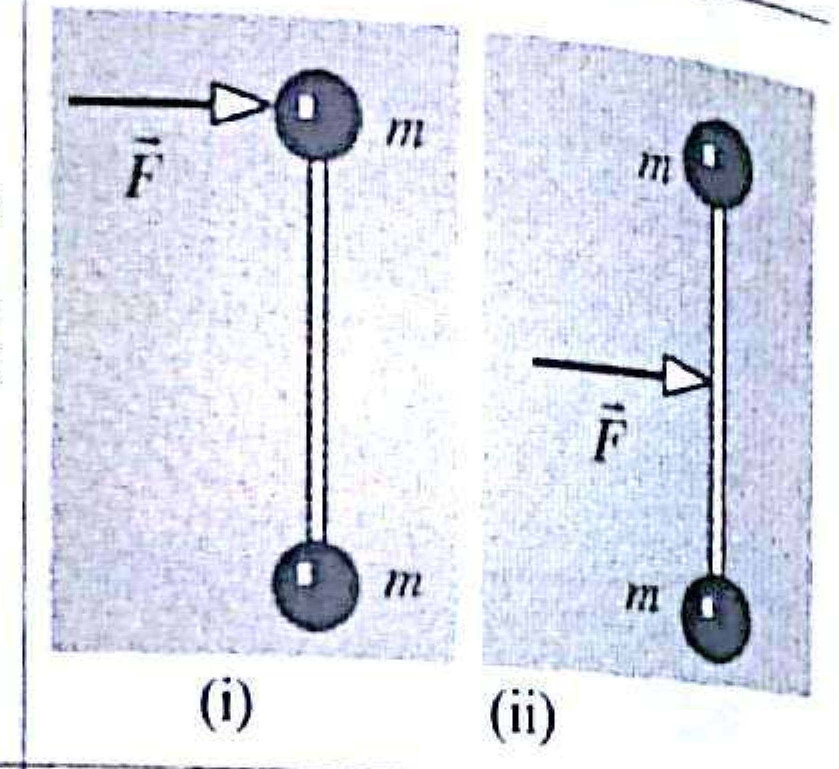
d) energía cinética disminuye.

e) energía cinética aumenta.

PE-4.09. *¿En cuál caso es mayor la velocidad del CM?*

Dos esferitas idénticas están conectadas por una barra y se aplica una fuerza $\vec{F}$ durante un intervalo de tiempo Δt, primero en la situación (i) y luego en la situación (ii). ¿En cuál caso alcanzará mayor velocidad el centro de masa?

a) En el caso (i)
b) En el caso (ii)
c) Igual en ambos casos



(i) (ii)

PE-4.10. *¿En cuál caso tendrá mayor energía cinética?*

Considere de nuevo la situación anterior de las dos esferitas que están conectadas por una barra y se aplica una fuerza $\vec{F}$ durante un intervalo de tiempo Δt, primero en la situación (i) y luego en la situación (ii). ¿En cuál caso, el sistema alcanzará mayor energía?

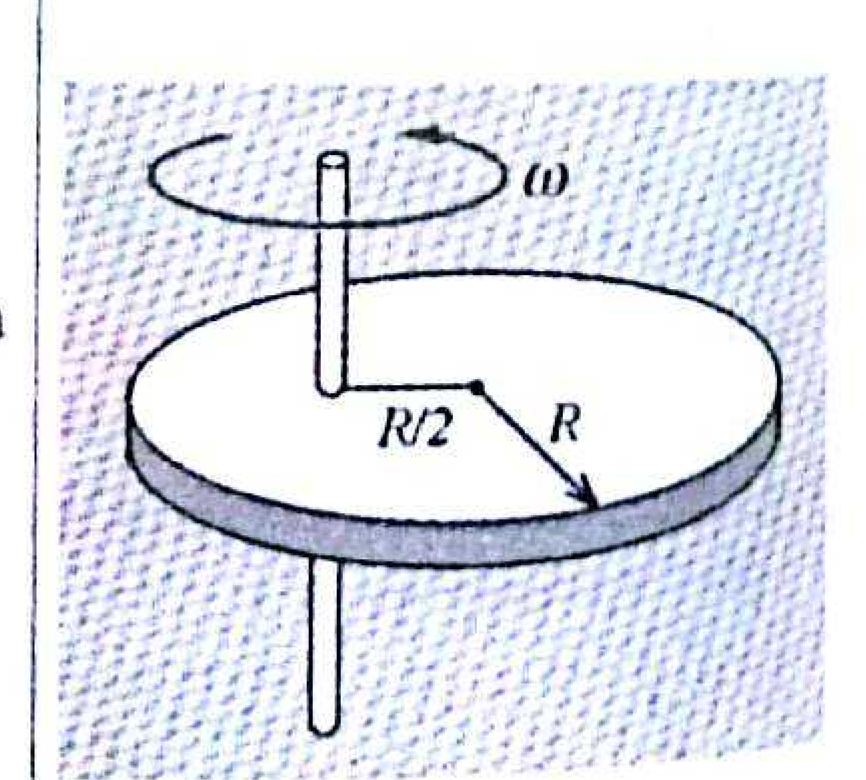
a) En el caso (i),
b) En el caso (ii),
c) Igual en los dos casos

PE-4.11. *Disco rotando alrededor de un eje excéntrico*

Un disco de masa M y radio R está girando con velocidad angular ω alrededor de un eje perpendicular a su plano y a distancia $R/2$ de su centro. ¿Cuál es su momento angular?

a) $MR^2\omega$ b) $\frac{3}{2}MR^2\omega$ c) $\frac{1}{2}MR^2\omega$

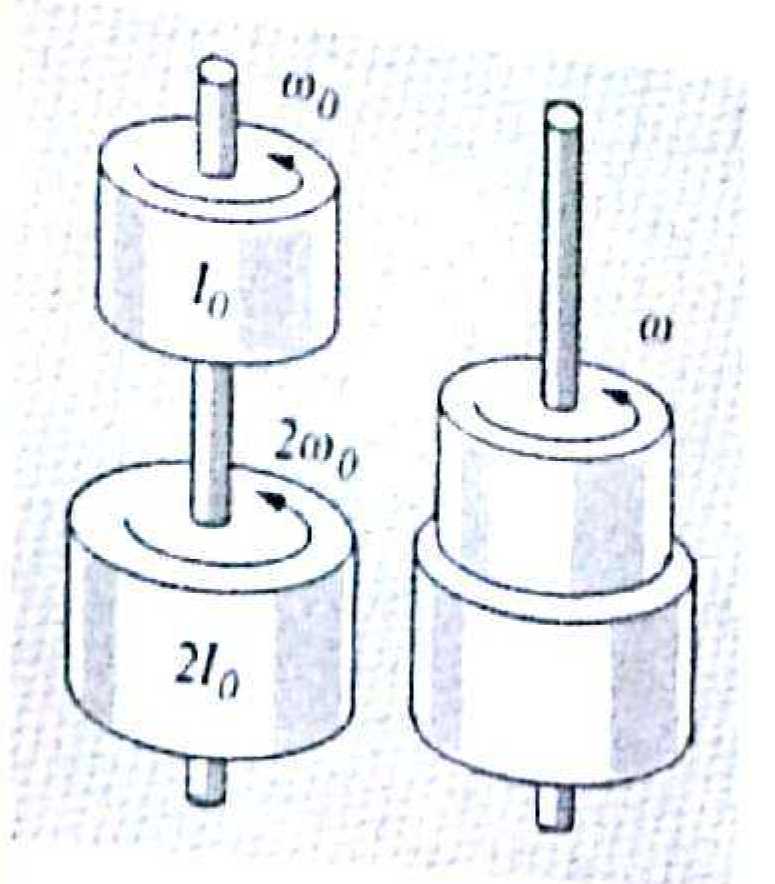
d) $\frac{1}{4}MR^2\omega$ e) $\frac{3}{4}MR^2\omega$



PE-4.12. *Acoplamiento entre discos que están girando*

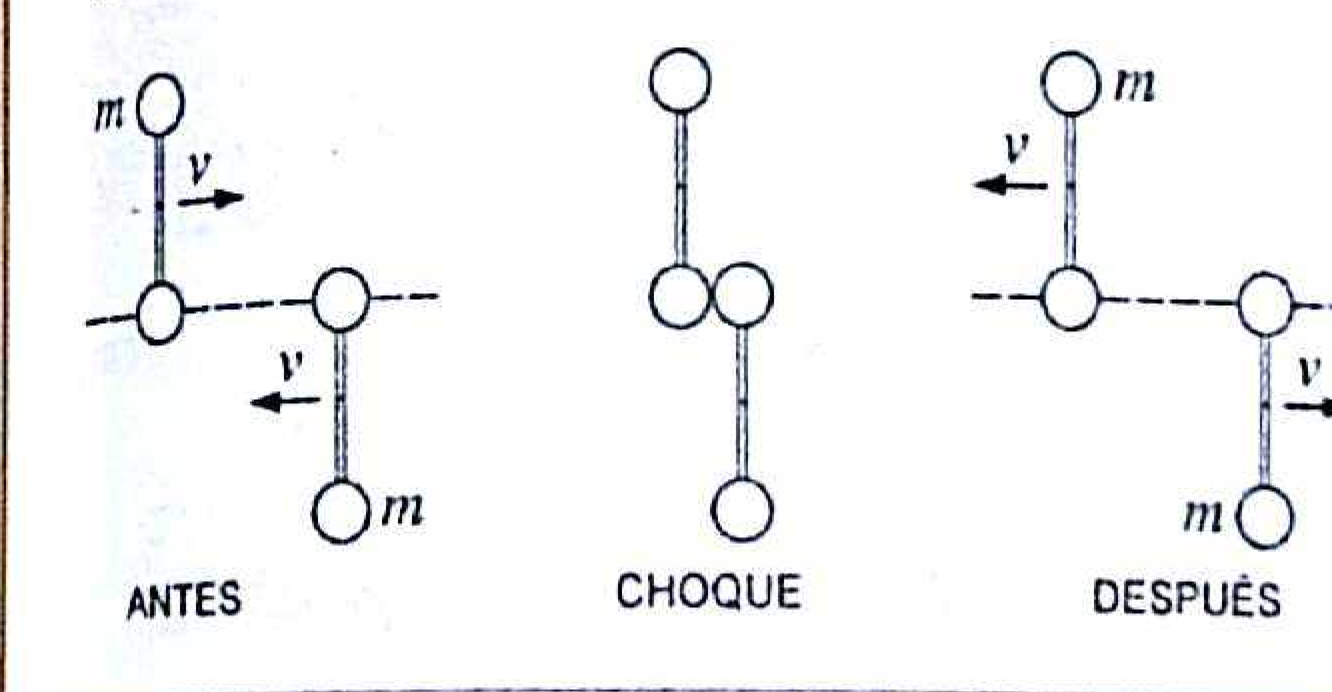
Dos discos están montados sobre un eje vertical común, girando en el mismo sentido sin fricción. El disco superior tiene un momento de inercia I_o y una velocidad angular ω_o. El disco inferior tiene un momento de inercia $2I_o$ y una velocidad angular $2\omega_o$. El disco superior cae gradualmente hasta que los dos discos quedan acoplados y alcanzan una velocidad angular común, ω. Podemos afirmar que la velocidad angular común será:

a) ω_0 b) $3\omega_O$ c) $\frac{2}{3}\omega_0$ d) $\frac{3}{2}\omega_0$ e) $\frac{5}{3}\omega_0$



PE-4.13. *Imposible que ocurra esta colisión*

Dos sistemas idénticos constituidos por dos bolitas de igual masa, unidas por una barra ligera se aproximan con igual velocidad, y en sentidos contrarios como se indica:

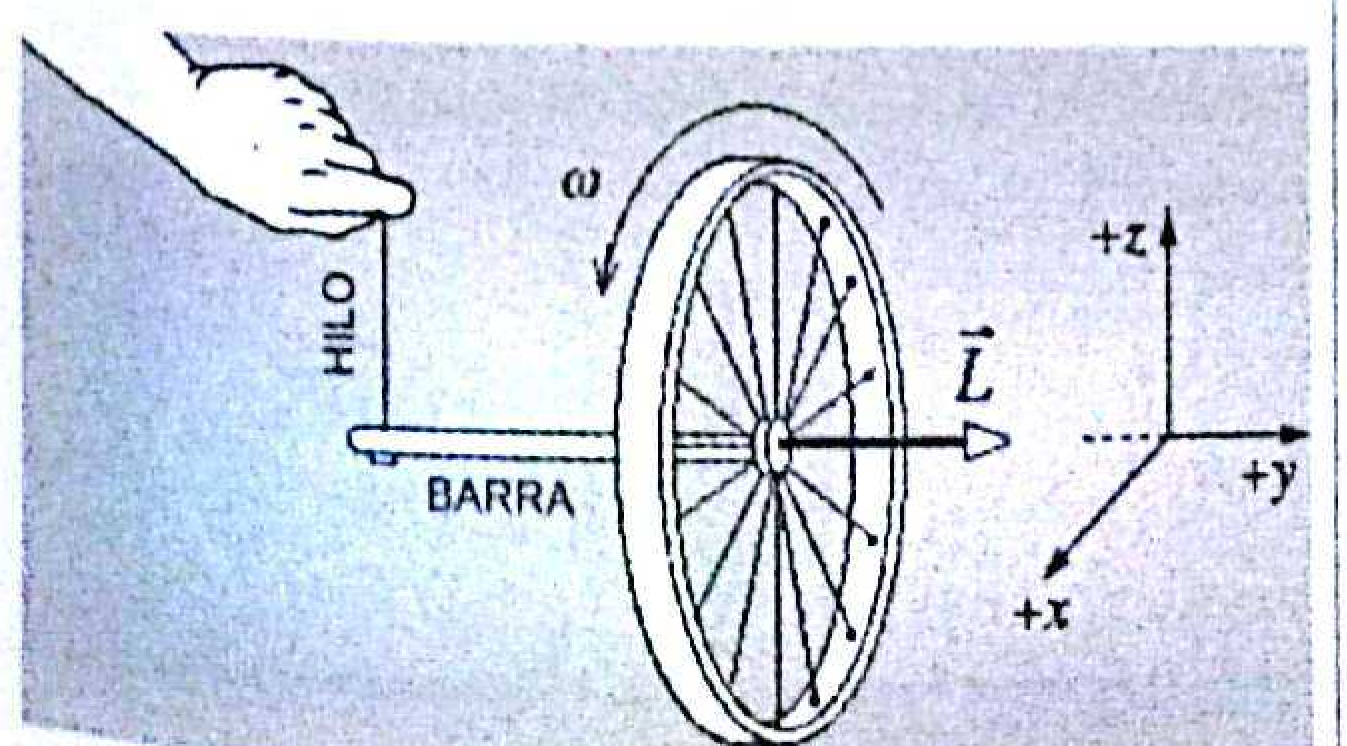


La colisión tal como se ilustra en la figura sería imposible que ocurra porque violaría la conservación de. ....

a) La energía
b) El momento lineal
c) El momento angular
d) Todas estas
e) Ninguna de estas

PE-4.14. *Precesión de una rueda de bicicleta*

En una demostración de física el profesor pone a girar una rueda de bicicleta montada en el extremo de una barra ligera, de modo que inicialmente tiene un momento angular que apunta en dirección $+y$.



Cuando el profesor suspende el otro extremo de la barra por un hilo, de acuerdo a la expresión $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, en ese instante la barra de la rueda tiende a girar....

a) En la dirección $+x$.
b) En la dirección $-z$.
c) En la dirección $+z$.
d) En la dirección $-x$.
e) En la dirección $-z$.

PE-4.15. ***Si los capas de hielo polares se derritiesen...***

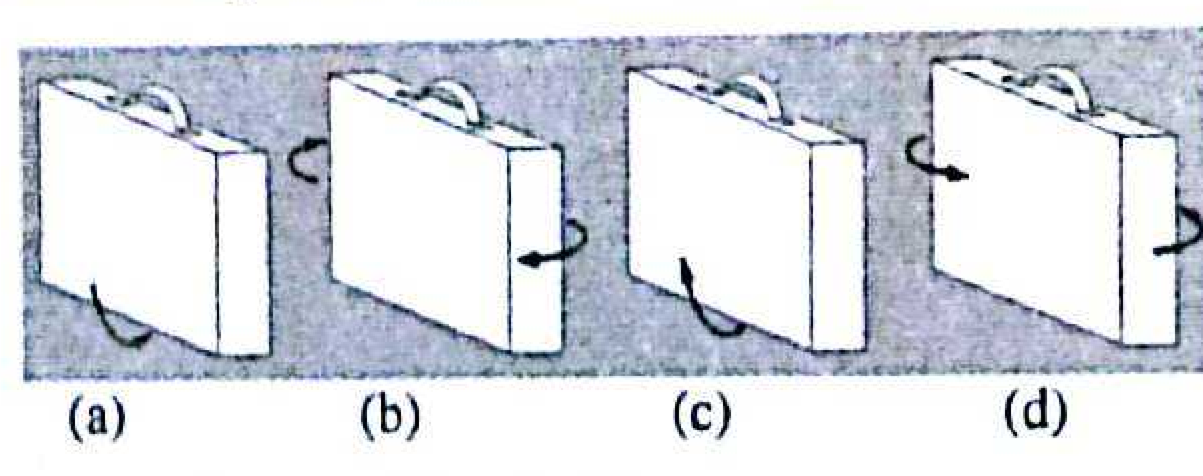
Suponga que los casquetes de hielo en los polos terrestres se llegasen a derretir totalmente, de tal manera que el agua se distribuya por todos los océanos. De acuerdo al principio de conservación del momento angular, el efecto sobre la rotación de la Tierra es que…

a) Los días serían mas cortos.
b) Los días serían mas largos.
c) No habría ninguna variación.



PE-4.16. ***Se necesita un voluntario para llevar la maleta***

En una demostración de física, dentro de una maleta, ponemos a girar una pesada rueda que está colocada con su eje fijo, y, rápidamente cerramos la maleta para que la audiencia no vea lo que hay adentro. Luego se le pide a un voluntario que tome la maleta por el asa, camine en línea recta y luego trate de doblar en una esquina hacia su izquierda. Lo que sucede es que, sorpresivamente la maleta se rebela y no se deja llevar, girando bruscamente en otra dirección y exponiendo al alumno a una situación embarazosa y muy divertida ante sus compañeros. ¿En cuál de los siguientes sentidos tiende a girar la maleta?



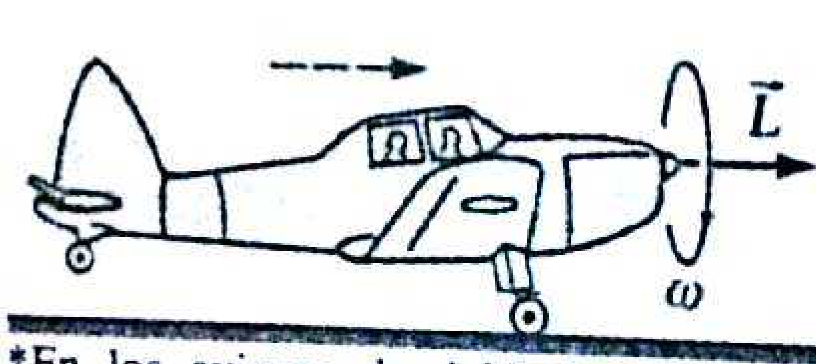
(a) (b) (c) (d)

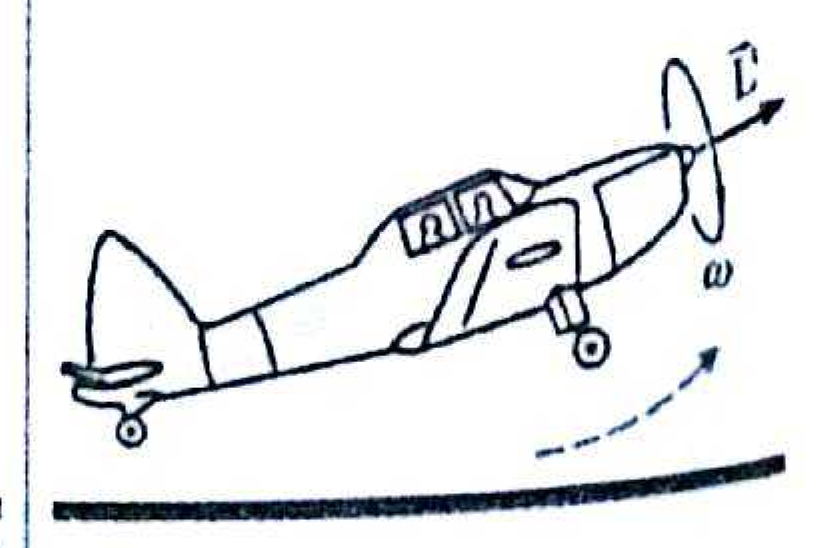
$\vec{L}$

PE-4.17. ***Al despegar, la avioneta se va hacia un lado***

En una avioneta, el giro de la hélice es en el sentido horario, según la mira el piloto. El piloto decide despegar desde la horizontal subiendo la nariz de la avioneta abruptamente y prescindiendo del control de estabilidad.

¿Hacia qué lado tiende a desviarse la avioneta?
a) Hacia la izquierda del piloto
b) Hacia la derecha del piloto.

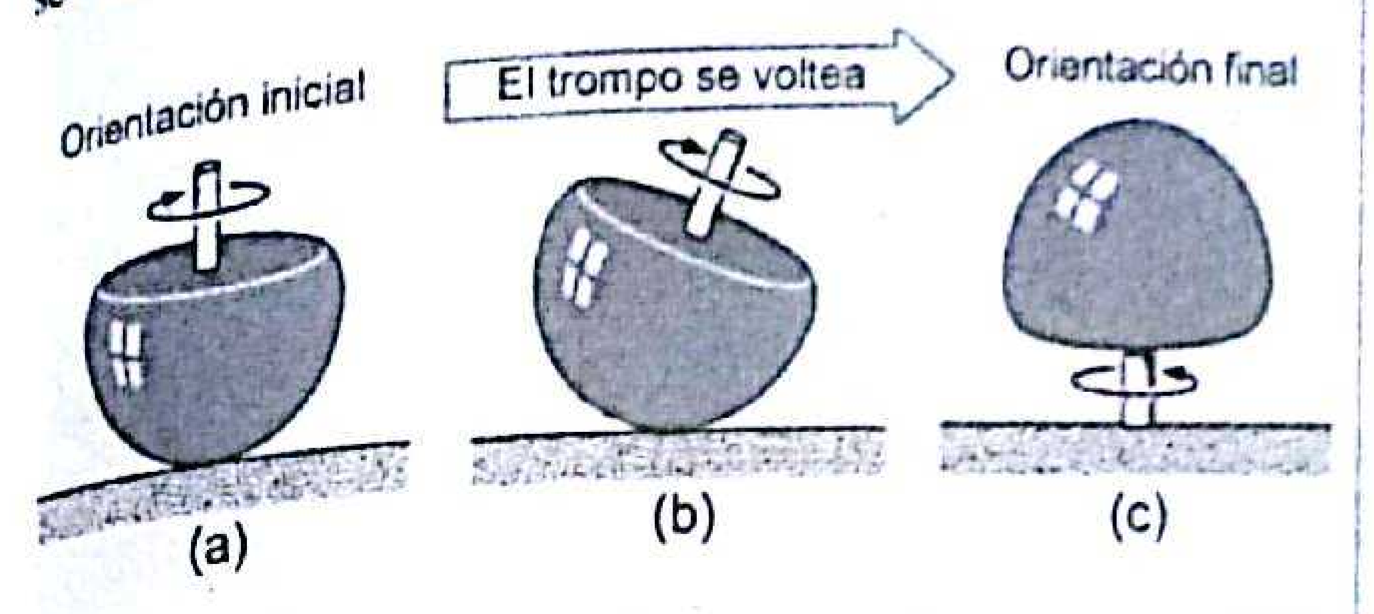




*En los aviones de doble hélice, las dos hélices giran en sentidos opuestos para evitar este efecto giroscópico.

PE-4.18. ***Increíble: Este trompo se voltea por si solo***

Este curioso juguete llamado Tippe-top consiste de un hemisferio esférico provisto de un tubito cilíndrico, por donde lo agarramos para hacerlo girar. Cuando lo ponemos a rotar apoyado sobre su parte redonda (fig a), tan pronto inclina su eje un poco (Fig. b), sorpresivamente se voltea quedando girando sobre el tubito (Fig. c).



¿Qué es lo que provoca que el trompo se voltee?

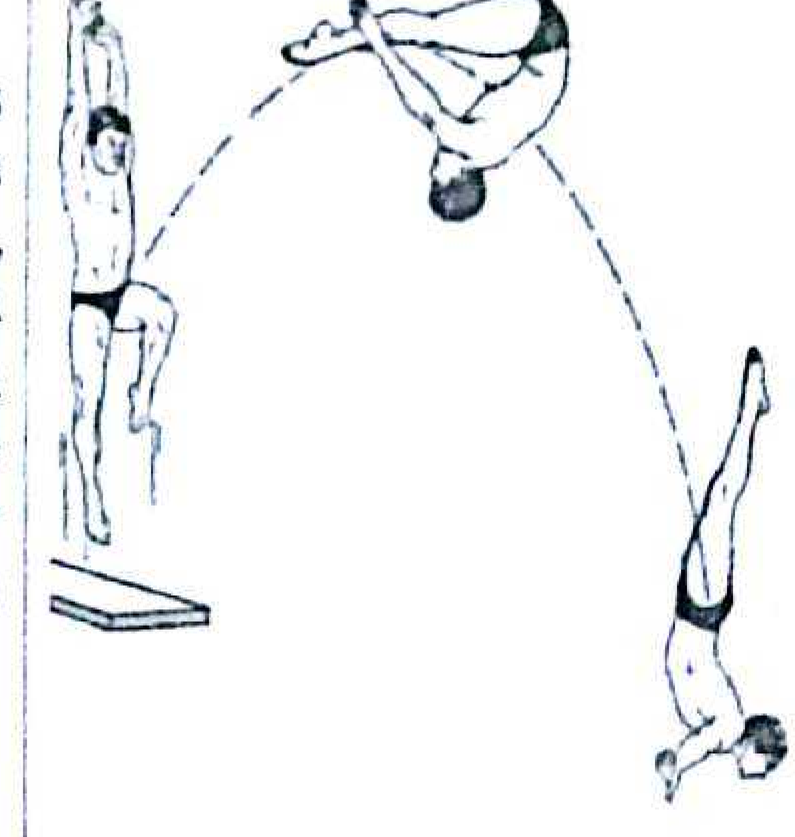
a) La fuerza de gravedad que reduce su energía potencial para mayor estabilidad.

b) El torque ejercido por la fuerza de rozamiento en el punto de contacto de la parte redonda con la superficie donde gira.

c) Solo es posible con la ayuda de algún mecanismo interno.

PE-4.19. ***El clavadista quiere dar dos vueltas en el aire***

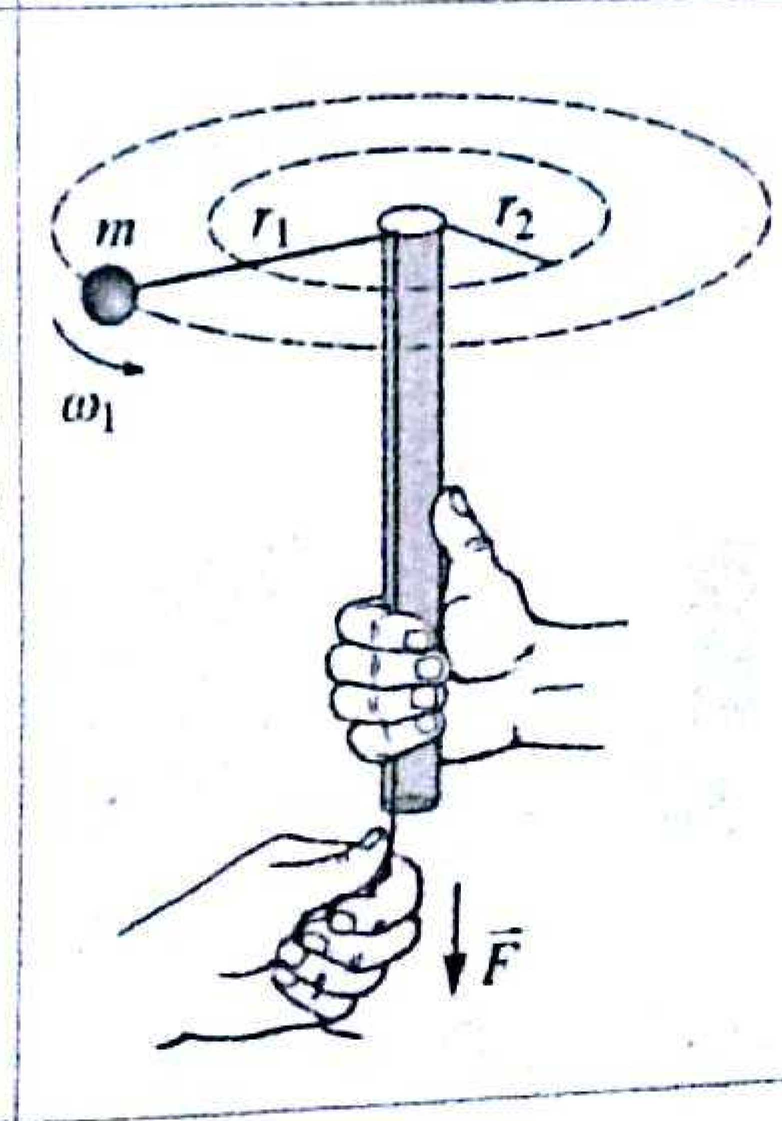
Cuando un clavadista abandona el trampolín, con los brazos hacia arriba y las piernas estiradas, su inercia rotacional respecto el eje horizontal que pasa por su CM, I_0, es tal que, con cierta velocidad angular inicial logra girar *media vuelta* antes de llegar al agua. Si él quisiera dar exactamente *dos vueltas* en el mismo intervalo de tiempo, una vez en el aire debería encoger sus brazos y piernas para modificar su momento de inercia a un valor…



a) $\frac{1}{3}I_0$, b) $\frac{1}{4}I_0$, c) $\frac{1}{5}I_0$ d) $\frac{1}{6}I_0$, e) $\frac{2}{5}I_0$

PE-4.20. ***Masa dando vueltas en una cuerda***

Un pequeño objeto de masa m se fija a una cuerda ligera que pasa por un tubo hueco se hace girar en un circulo de radio r_1 con una velocidad angular ω_1. Después, la cuerda se jala hacia abajo acortando el radio de la trayectoria hasta la mitad ($r_2 = r_1/2$). La nueva velocidad angular será…



a) $\omega_2 = \omega_1$, b) $\omega_2 = 2\omega_1$, c) $\omega_2 = 4\omega_1$,

d) $\omega_2 = \omega_1/2$, e) $\omega_2 = \omega_1/4$

CAP. 4: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
4.01				√	
4.03	√				
4.05		√			
4.07		√			
4.09			√		
4.11					√
4.13			√		
4.15		√			
4.17	√				
4.19		√			

	a	b	c	d	e
4.02					√
4.04				√	
4.06			√		
4.08					√
4.10	√				
4.12					√
4.14				√	
4.16			√		
4.18		√			
4.20			√		

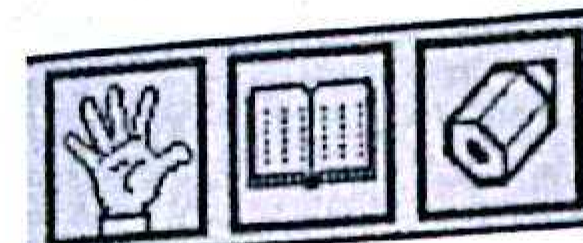
5

EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO

En este tema aplicaremos las ecuaciones de dinámica en una situación particular, la del equilibrio de un cuerpo rígido. Un cuerpo rígido está en equilibrio en un sistema de referencia inercial, cuando se encuentra en reposo o cuando su centro de masa se mueve con velocidad constante. Si el cuerpo está en reposo, se denomina equilibrio estático y si el cuerpo tiene un movimiento uniforme (velocidad constante) se denomina equilibrio dinámico. El estudio del equilibrio de un cuerpo rígido consiste básicamente en buscar cuáles son las restricciones que deben imponerse a las fuerzas que actúan sobre él y las condiciones geométricas para mantener ese estado. La determinación de las fuerzas necesarias para mantener un sistema en equilibrio estático es un tema de importancia práctica en el diseño de estructuras en arquitectura e ingeniería tales como edificios y puentes. En el diseño de maquinarias y vehículos es muy importante conocer los principios que gobiernan el equilibrio dinámico. El análisis del desempeño de músculos, tendones, huesos y articulaciones en los seres vivos es de gran valor tanto en la medicina, como en las actividades atléticas y deportivas.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Condiciones de equilibrio
- Centro de gravedad
- Estrategia para resolver problemas de equilibrio
- Estabilidad del equilibrio
- Sistemas estáticamente indeterminados
- Elasticidad



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

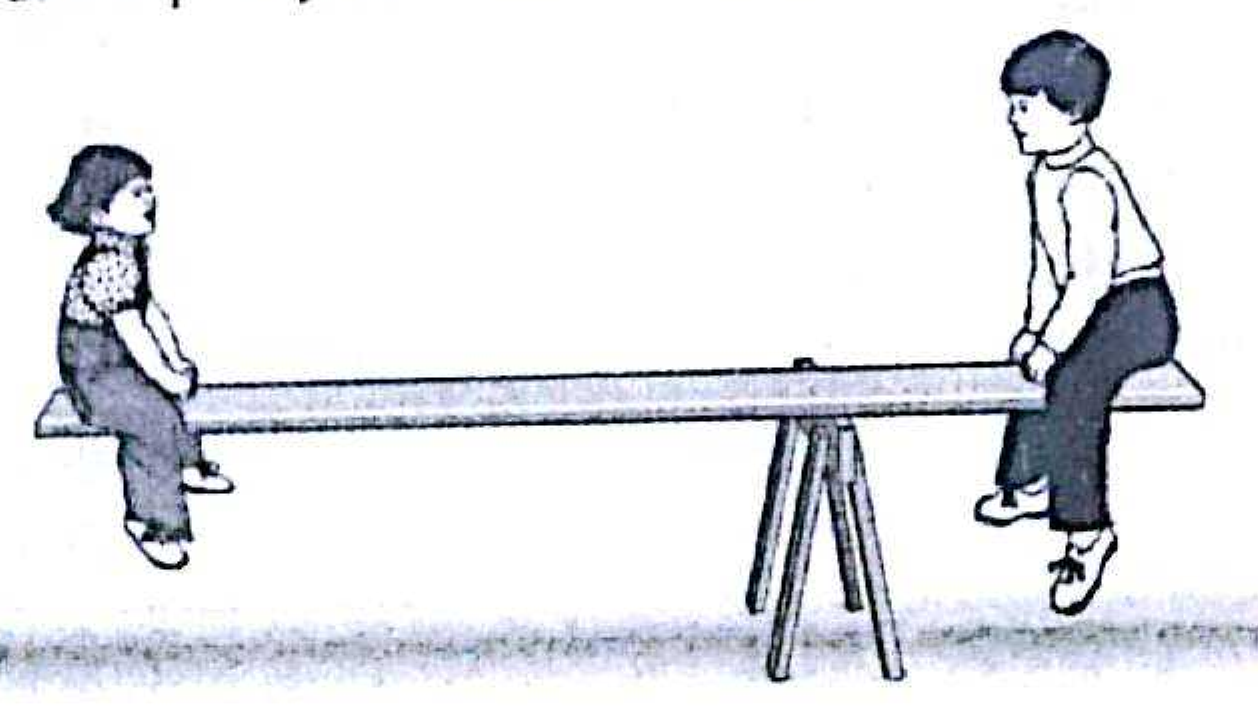
EQUILIBRIO

Un sistema se dice que está en equilibrio con relación a algún marco de referencia inercial, si y sólo si, se cumplen los dos siguientes requisitos simultáneamente:

1) *Equilibrio de traslación:* La aceleración del centro de masa es cero: $\vec{a}_{cm} = 0$.

2) *Equilibrio de rotación*: La aceleración angular respecto de cualquier eje fijo en el marco inercial es cero: $\vec{\alpha} = 0$.

> *En equilibrio*
> $\vec{a}_{cm} = 0$,
> $\vec{\alpha} = 0$



Un sistema no necesita estar en reposo para que se encuentre en equilibrio. El equilibrio implica que las velocidades lineal, $\vec{v}_{cm}$ y angular, $\vec{\omega}$, son constantes tanto en módulo como en dirección y sentido.

El caso en que no hay movimiento respecto a un marco de referencia se llama *equilibrio estático*.

> *Equilibrio estático*
> $\vec{v}_{cm} = 0$
> $\vec{\omega} = 0$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Como un cuerpo en equilibrio no tiene aceleración lineal ni angular, entonces tanto la fuerza neta como el torque neto que actúan sobre él deben ser nulos:

Balance de fuerzas: $\sum \vec{F} = 0$

Balance de torques: $\sum \vec{\tau} = 0$

> *Equilibrio de traslación*
> $\sum \vec{F} = 0$

> *Equilibrio de rotación*
> $\sum \vec{\tau} = 0$

En general, las dos ecuaciones vectoriales para el equilibrio equivalen a *seis* ecuaciones escalares. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones que vamos a estudiar, todas las fuerzas se encuentran en un plano, (plano x-y) y los torques sólo podrían provocar rotaciones alrededor de un eje paralelo al eje z. En estos casos las condiciones se reducen a *tres ecuaciones escalares*:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau_z = 0$$

Una propiedad importante de las ecuaciones de equilibrio, es que, para el cálculo de los torques, podemos escoger como origen cualquier punto. En efecto, supongamos que el cuerpo está en equilibrio de traslación y el torque neto es cero con respecto a un punto arbitrario O.

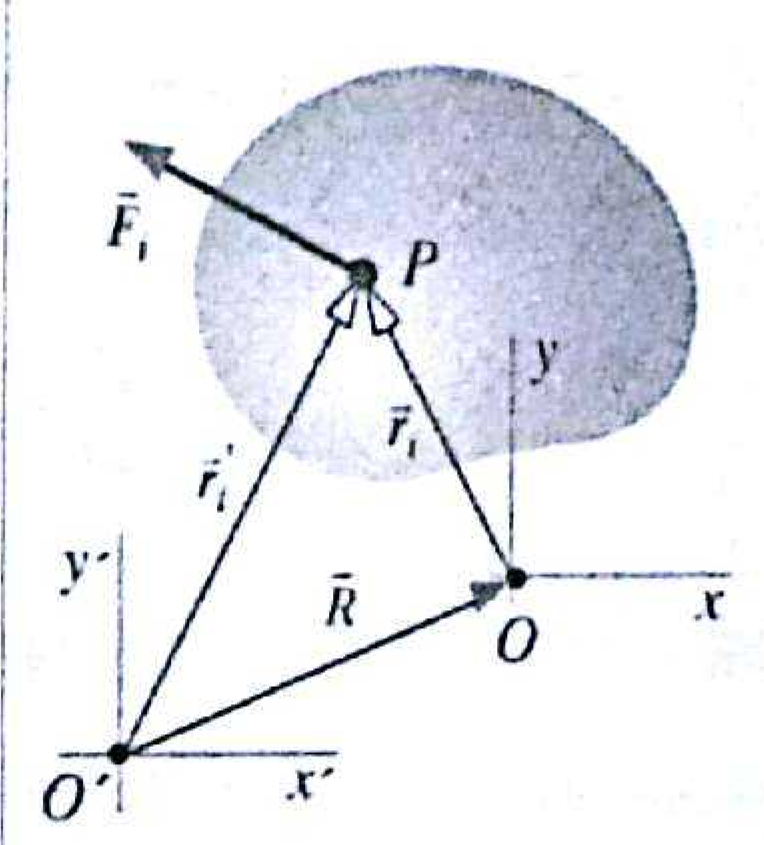
$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \sum \vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Si calculamos la suma de los torques respecto a *cualquier otro punto*, O´, entonces.

$$\sum \vec{\tau}_{O'} = \sum \vec{r}_i^{\,'} \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_i + \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_O + 0 = 0$$

Es decir, si un cuerpo está en equilibrio traslacional y el torque neto en torno a un punto es cero, entonces también será cero respecto a cualquier otro punto.



$$\vec{r}_i^{\,'} = \vec{r}_i + \vec{R}$$

> *En el equilibrio, podemos escoger cualquier origen para calcular los torques*

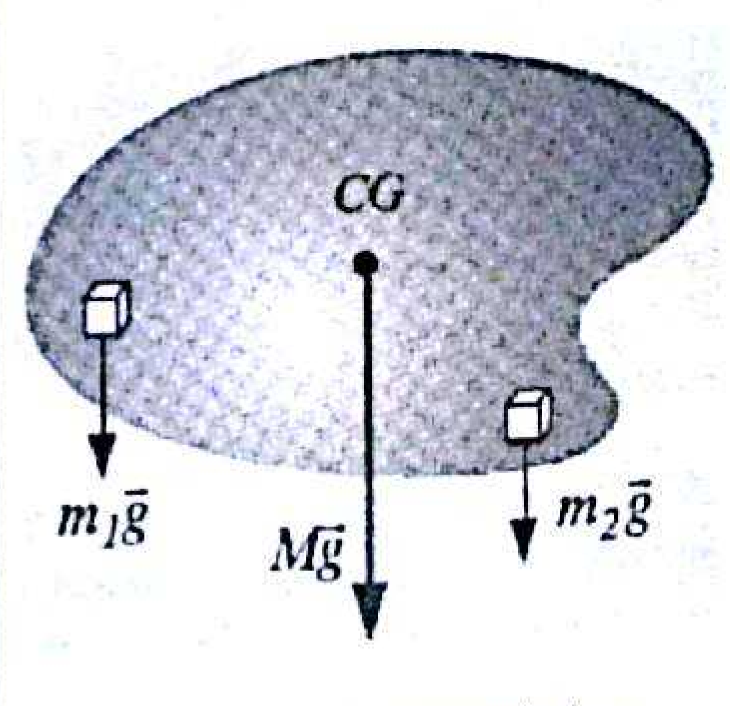
EL CENTRO DE GRAVEDAD

En un cuerpo constituido por un gran número de partículas, la resultante de todas las fuerzas de gravedad individuales es, por definición, el peso del cuerpo:

$$m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + .. = (\sum m_i)\vec{g} = M\vec{g} \qquad \text{(el peso)}$$

El peso es aquella fuerza que reemplazaría la acción de las infinitas pequeñas fuerzas $m_i\vec{g}$ que son las que existen físicamente.

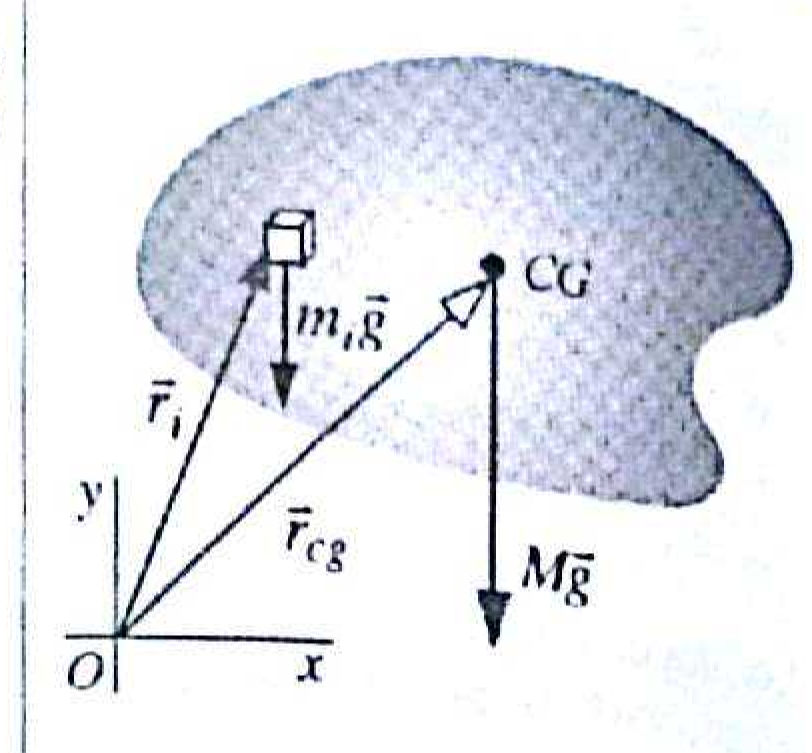
Definiremos el *centro de gravedad* (CG) como aquel punto donde actuaría la fuerza de gravedad y respecto al cual su torque produciría los mismos efectos rotacionales que los producidos a las partículas individuales.



El centro de gravedad es el punto donde actuaría el peso

Si suponemos que la aceleración de la gravedad, $\vec{g}$ es constante y calculamos el torque gravitacional resultante de las infinitas pequeñas fuerzas respecto a un punto O arbitrario, resulta:

$$\vec{\tau}_{grav} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + .. = (\sum m_i\vec{r}_i) \times \vec{g}$$



Esta expresión se puede escribir en la forma:

$$\vec{\tau}_{grav} = \vec{r}_{cg} \times M\vec{g}$$

Siendo $\vec{r}_{cg}$ vector de posición del centro de gravedad:

$$\vec{r}_{cg} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{grav} = \vec{r}_{cg} \times M\vec{g}}$$

CENTRO DE GRAVEDAD Y CENTRO DE MASA

La relación anterior para la ubicación del centro de gravedad, $\vec{r}_{cg}$, coincide con la definición del centro de masa del cuerpo. Por lo tanto, cuando la aceleración $\vec{g}$ es la misma en todas las partes del cuerpo, el torque de la fuerza de gravedad es $\vec{r}_{cg} \times M\vec{g}$ y el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Esta condición se cumple, si consideramos objetos pequeños en la vecindad de la superficie terrestre (campo gravitatorio uniforme). Cuando esto no sucede, el CG y el CM son puntos diferentes. Este es el caso por ejemplo, al considerar la Luna en el campo gravitatorio terrestre.

Centro de gravedad

$$\boxed{\vec{r}_{cg} = \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i}$$

En un campo gravitacional uniforme, el centro de gravedad coincide con el centro de masa

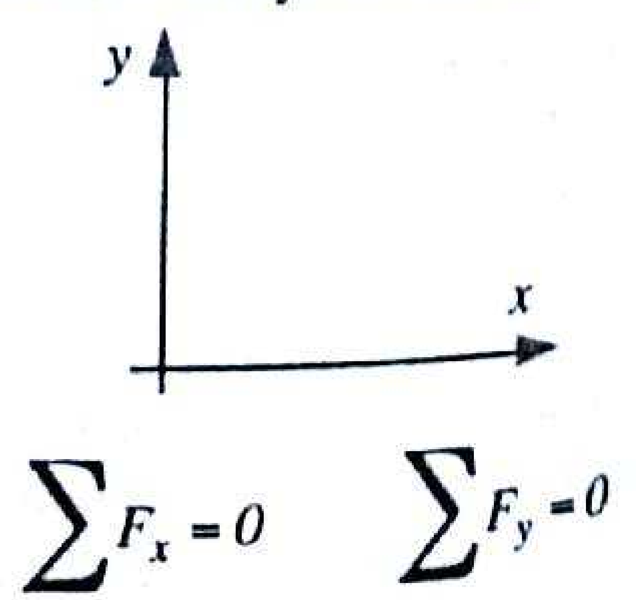
RESOLVIENDO PROBLEMAS DE EQUILIBRIO

En un sistema constituido por varios cuerpos, se puede analizar por separado el equilibrio de cada uno de sus cuerpos componentes, tomando en cuenta las conexiones que los mantienen ligados. Se recomienda la siguiente estrategia:

1) Seleccione un solo cuerpo a la vez y haga un cuidadoso diagrama de cuerpo libre. Identifique todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, mostrando correctamente sus puntos de aplicación y líneas de acción.

2) Dibuje los ejes *x-y* de un sistema de coordenadas. conveniente, procurando que al menos un eje sea paralelo a una o más de las fuerzas incógnitas.

Selección de ejes de coordenadas



$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

3) Descomponga las fuerzas en sus componentes y escriba las ecuaciones de equilibrio traslacional.

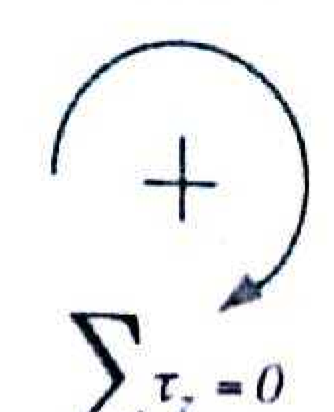
4) Escoja un eje de rotación conveniente para calcular los torques, indicando cuál es el sentido de rotación positiva (horario o anti horario). La selección es arbitraria, y generalmente es deseable aquel eje para el cual resulte nulo el torque ejercido por una o más de las fuerzas que intervienen.

5) Escriba la ecuación de equilibrio rotacional.

6) El número de ecuaciones independientes que resulta debe coincidir con el número de incógnitas. Resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones.

7) Finalmente, sustituya los números y unidades de las cantidades conocidas para hallar los valores numéricos de las incógnitas. Si el resultado de alguna fuerza es negativo, significa que el sentido que originalmente fue escogido es en realidad opuesto.

Selección de ejes de rotación



$$\sum \tau_z = 0$$

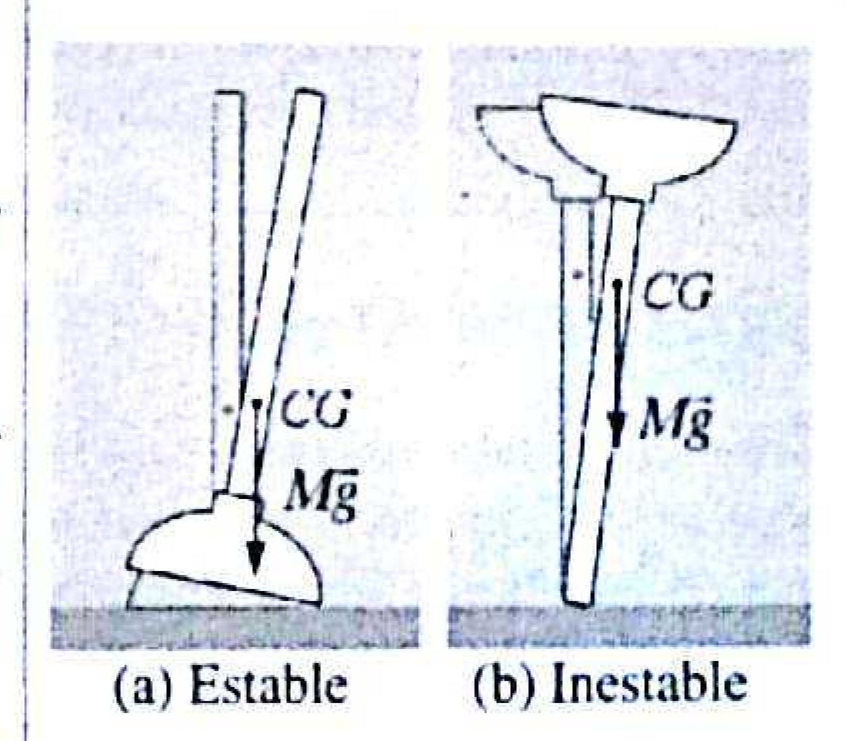
ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

El estado de equilibrio de un cuerpo se puede clasificar según tres categorías: Estable, inestable e indiferente.

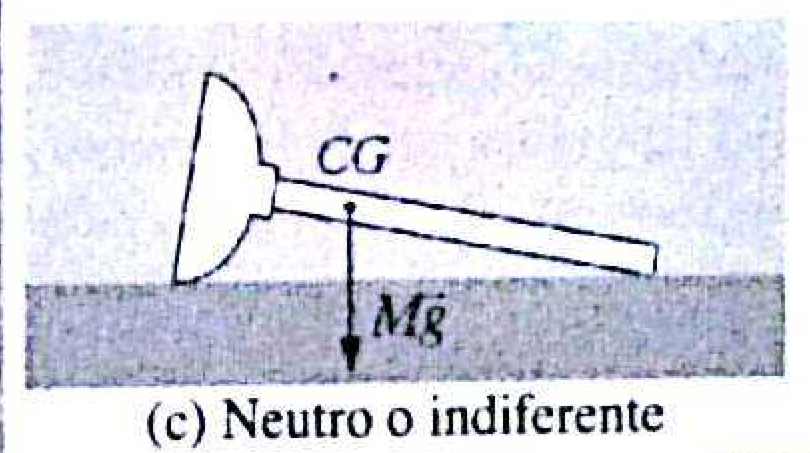
Equilibrio Estable: Cuando al cuerpo se le perturba ligeramente respecto a su posición de equilibrio, surgen fuerzas o torques que lo obligan a recuperar su posición original (Figura a).

Equilibrio Inestable: Cuando se le perturba ligeramente, surgen fuerzas o torques que lo obligan a alejarse de su posición original (Figura b).

Equilibrio Neutro o Indiferente: Cuando se le perturba, no existen fuerzas ni torques que lo obligan a recuperar su posición original ni tampoco a alejarse de ella (Figura c).



(a) Estable (b) Inestable



(c) Neutro o indiferente

Un cuerpo en equilibrio estable regresará a su posición inicial siempre que la vertical que pasa por su centro de gravedad caiga dentro del área de la base de sustentación. Pero si el desplazamiento de la vertical que pasa por su CG es grande y se sale de la base de soporte, al soltarlo, el cuerpo volcará. Esto significa que podemos mejorar la estabilidad del equilibrio de un cuerpo, bien bajando su CG o incrementando el área de la base de sustentación.

EL EQUILIBRIO Y LA ENERGÍA POTENCIAL

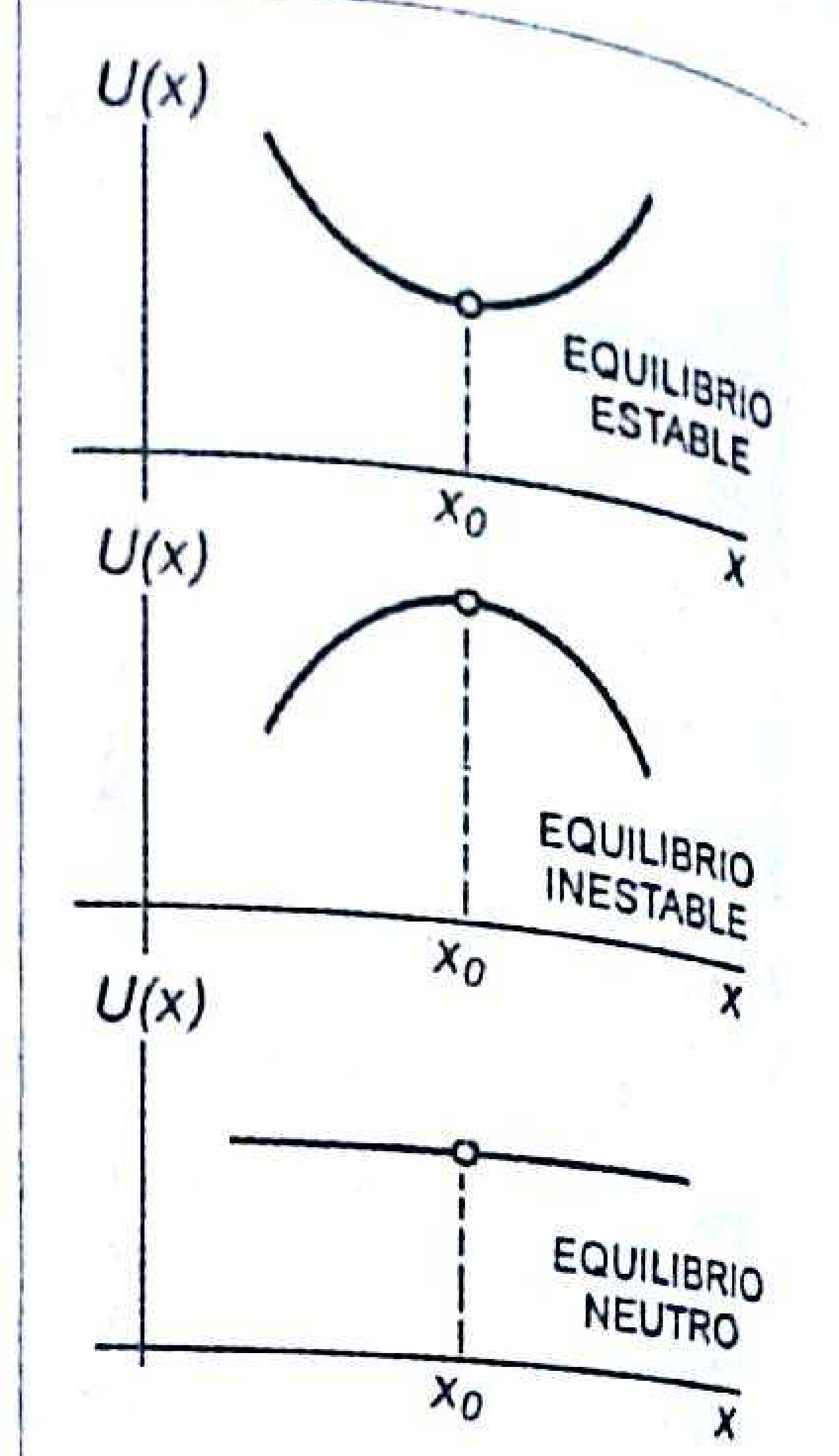
Al igual que para una partícula, la estabilidad del equilibrio de un cuerpo es una función de su energía potencial.

En el caso del equilibrio *estable* observamos que si apartamos el palo de la vertical de equilibrio (fig.a), su CG se eleva y así aumenta la energía potencial.

Por el contrario, en el equilibrio *inestable*, al apartar el palo de la vertical (Fig. b), su CG queda mas bajo que en la posición original y su energía potencial disminuye.

En el equilibrio *neutro* o *indiferente*, si el cuerpo es sometido a un desplazamiento (Fig. c), el CG ni se eleva ni desciende y la energía potencial es constante.

La figura de enfrente muestra el comportamiento de la energía potencial $U(x)$ en función de una coordenada x, para el caso de una partícula próxima a la posición de equilibrio. Se observa que la energía potencial es mínima para el equilibrio estable, es máxima en el equilibrio inestable y no varía si el equilibrio es neutro o indiferente.

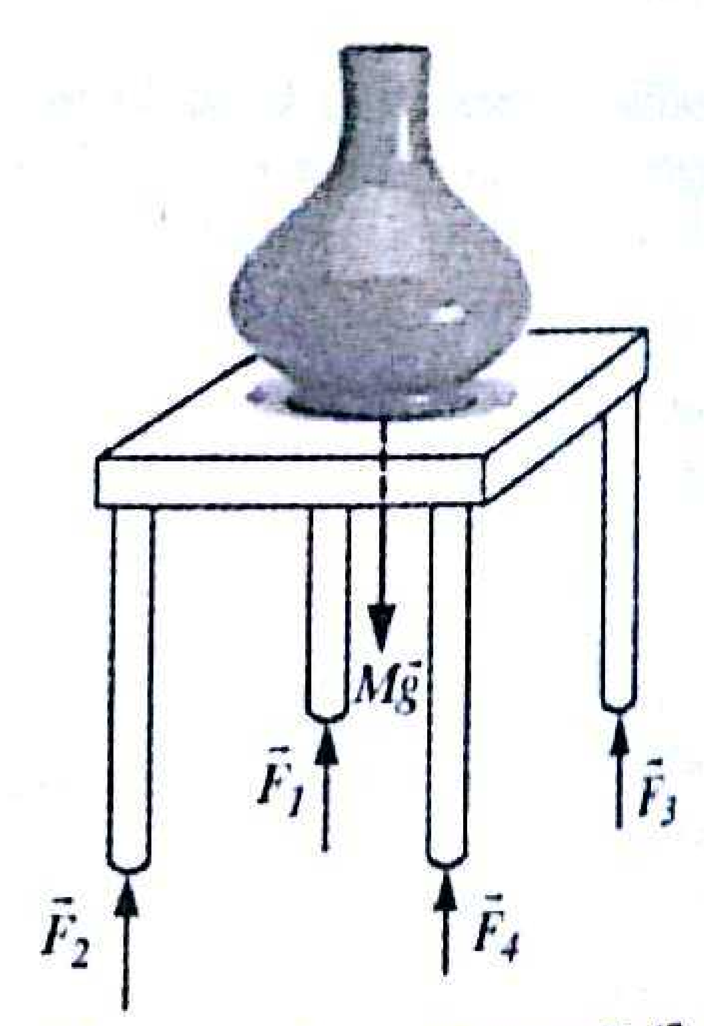


La energía potencial es mínima para el equilibrio estable, máxima para el equilibrio inestable y constante en el equilibrio neutro

SISTEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

Cuando en un problema hay tantas incógnitas como ecuaciones disponibles y se pueden hallar todas, se dice que el problema es estáticamente determinado. Sin embargo, existen muchos casos de equilibrio de estructuras rígidas que son imposibles de resolver usando solamente las leyes del equilibrio, porque se dispone de mas incógnitas que de ecuaciones independientes. Se dice entonces que el problema es *estáticamente indeterminado*.

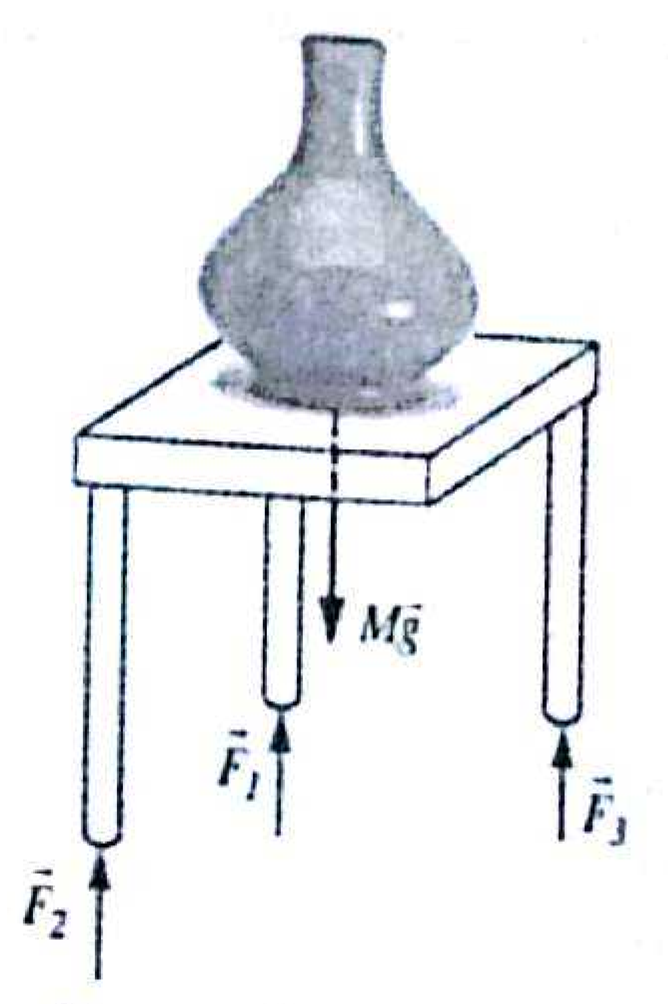
Por ejemplo, en la figura se muestra una mesa de cuatro patas con un jarrón encima. Sobre el sistema actúa, el peso $M\vec{g}$ aplicado sobre el centro de gravedad del sistema y las cuatro fuerzas de contacto que ejerce el piso en las patas ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$), dirigidas verticalmente hacia arriba. Estas cuatro fuerzas normales de apoyo, en general son distintas y constituyen las incógnitas. Pero, solamente podemos escribir tres ecuaciones independientes: Una ecuación de la sumatoria de fuerzas verticales y dos ecuaciones de sumatoria de torques respecto a dos ejes perpendiculares, los cuales quedan en el plano horizontal.



Una mesa de cuatro patas es un sistema estáticamente indeterminado. Tiene 4 incógnitas para 3 ecuaciones.

La dificultad para resolver este tipo de problema puede obviarse si tomamos en cuenta que la rigidez de los llamados cuerpos rígidos es tan solo un modelo ideal. En el mundo real no existen estructuras perfectamente rígidas porque todo cuerpo tiende a deformarse. Las patas de la mesa se comprimen ligeramente y en cantidades diferentes. Se podría obtener la cuarta relación matemática que falta entre las fuerzas normales a partir de las propiedades elásticas del material.

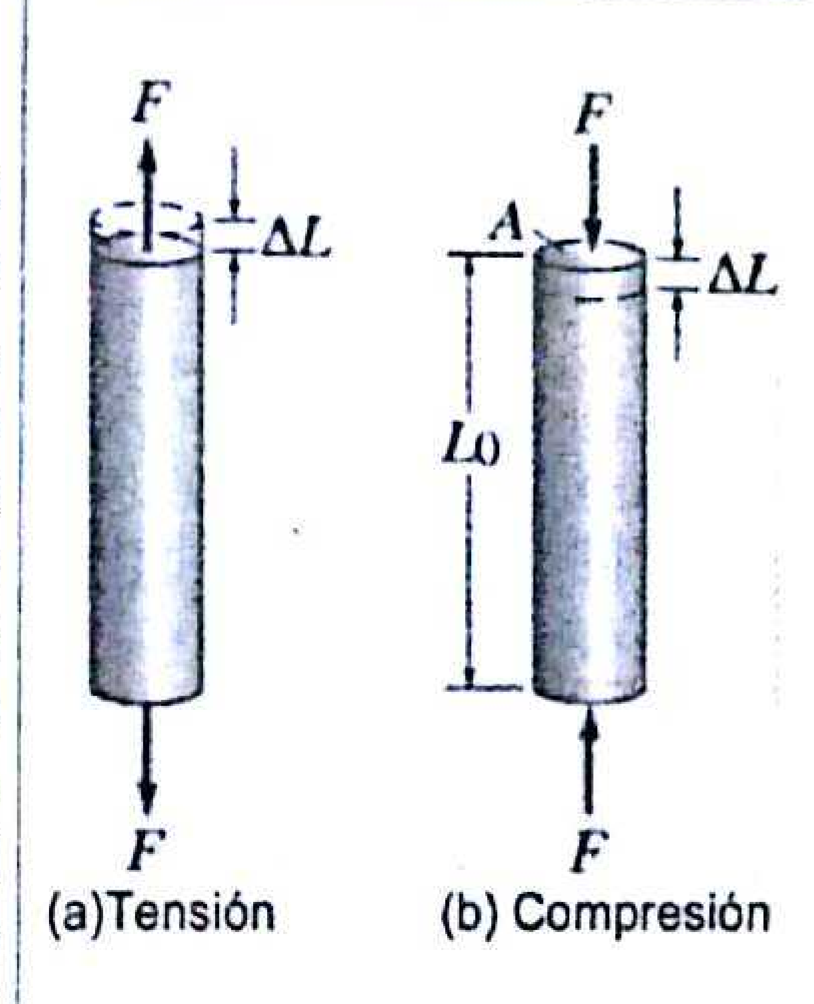
Suponga que eliminamos una de las patas, y colocamos el jarrón apenas fuera del centro de la mesa hacia el lado de la pata faltante, obviamente la mesa tiende a caerse hacia ese lado. Por otra parte, si el jarrón hubiese sido colocado mas hacia el lado opuesto a la pata que falta, entonces la estructura tendrá estabilidad. La mesa de tres patas constituye un sistema estáticamente determinado porque las tres ecuaciones de equilibrio nos permiten hallar las tres incógnitas ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$).



Una mesa de tres patas es un sistema estáticamente determinado. Tiene 3 incógnitas para 3 ecuaciones.

ELASTICIDAD DE LOS SÓLIDOS

Cuando una barra de longitud L_0 es sometida a una fuerza de tensión F, se alargará en una cantidad ΔL. Si la fuerza no es muy grande, para la mayor parte de los materiales, ΔL resulta proporcional a F, y la barra regresará a sus dimensiones originales al retirar la fuerza. Se dice que, en este rango de tensiones aplicadas, la barra es *elástica*. No obstante, cuando se aplica a la barra una fuerza muy grande, ΔL deja de ser proporcional a F y la gráfica de ΔL vs F comienza a desviarse de la línea recta. Al ser eliminada la fuerza, la barra no retornará a su longitud original, y queda alargada mas allá de su limite elástico; e incluso puede llegar a romperse si la fuerza se incrementa mucho mas allá de este límite.

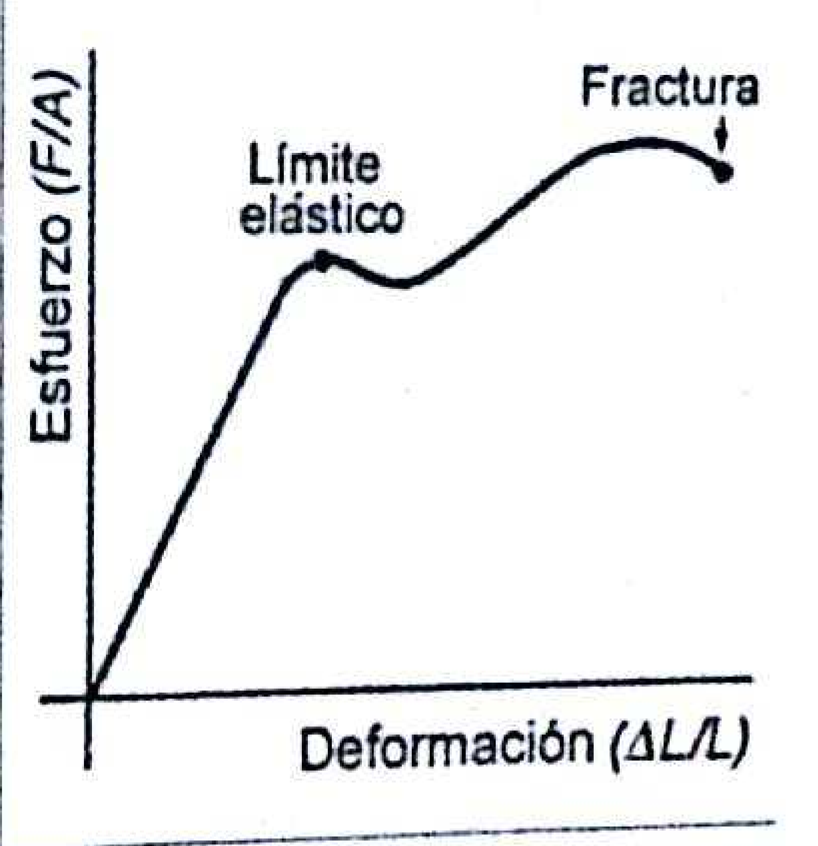


Describimos la elasticidad de un material usando los conceptos de esfuerzo y deformación. *Esfuerzo* es la fuerza aplicada por unidad de área transversal del cuerpo:

$$\text{Esfuerzo} = F/A$$

Deformación unitaria es el cambio fraccionario de longitud que resulta:

$$\text{Deformación} = \Delta L / L_0$$

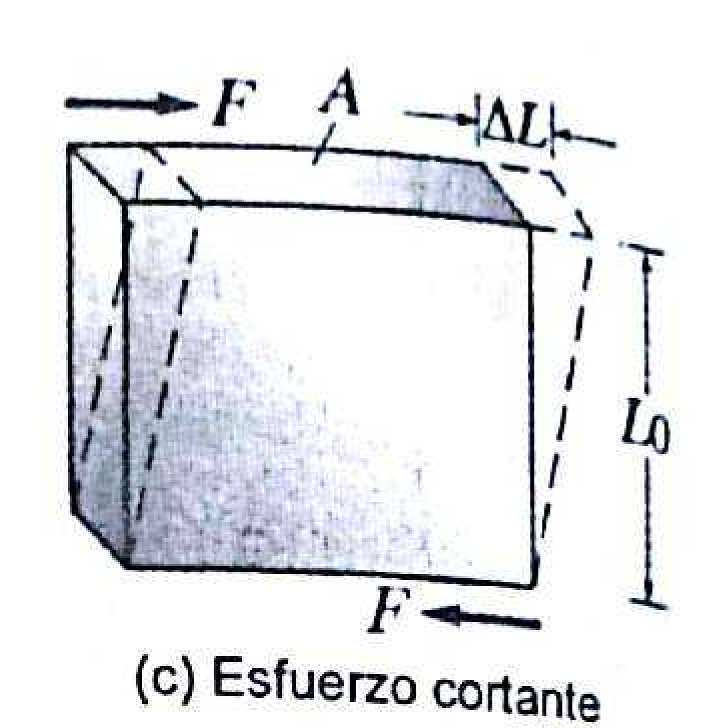


La relación entre el esfuerzo y la deformación se llama módulo de elasticidad.

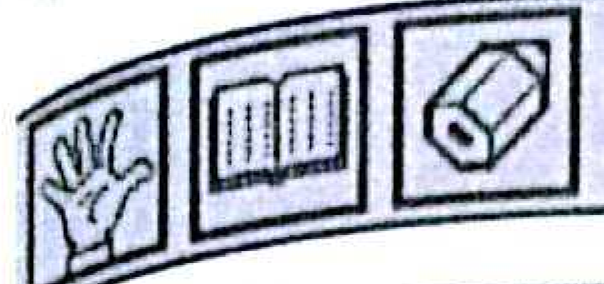
$$\text{Módulo de elasticidad: } = \frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} \qquad E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

Este módulo para la tensión y la compresión es lo que se conoce como el *módulo de Young*. Es una propiedad única del material e independiente del tamaño y forma del objeto y es constante para determinado material cuando este se deforma dentro de su región elástica.

El esfuerzo puede ser de tres tipos: compresión, tensión y cortante. Un objeto bajo esfuerzo cortante tiene fuerzas iguales y opuestas aplicadas en caras opuestas, estando el vector fuerza en el plano de la cara y no perpendicular a ella. El módulo de elasticidad recibe el nombre de *módulo del esfuerzo cortante*.



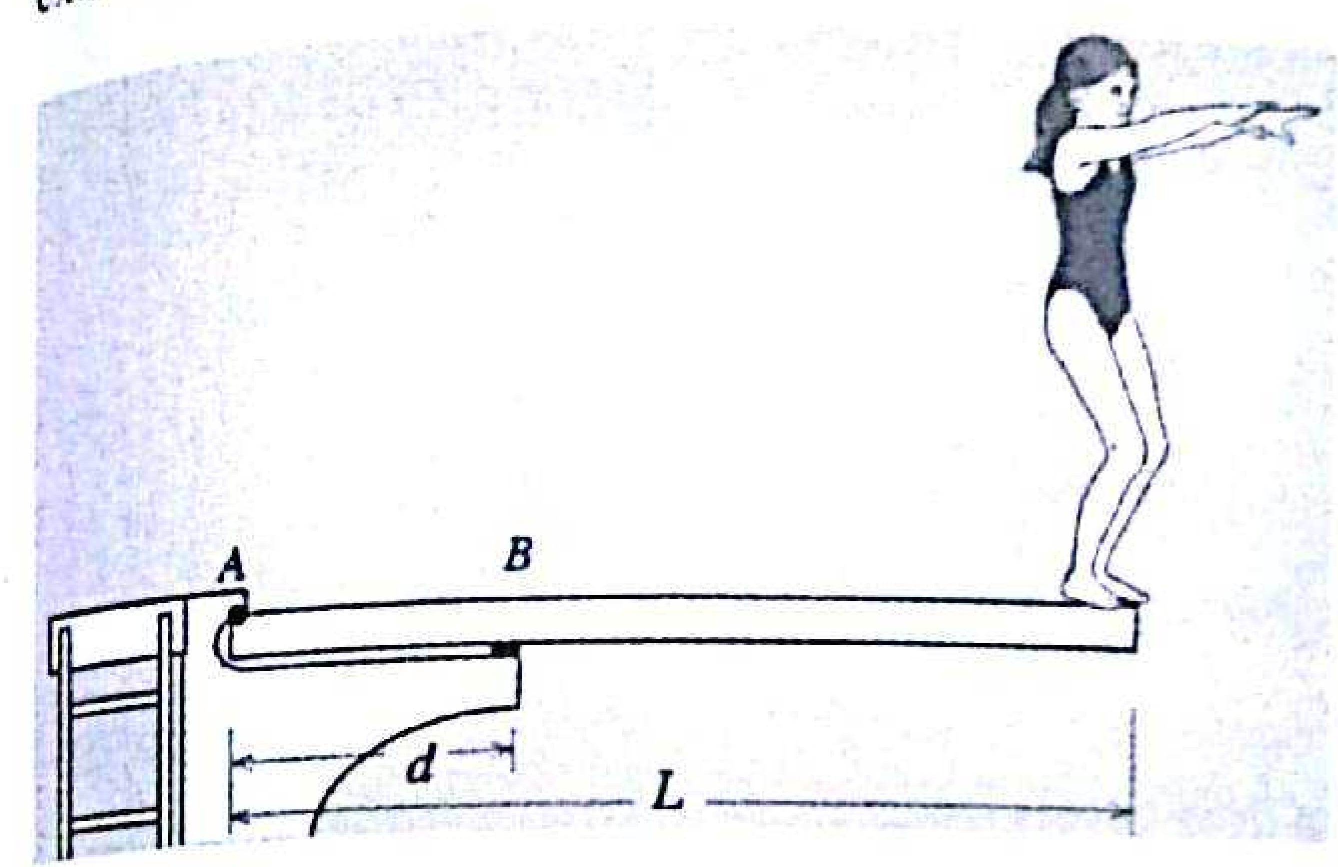
(c) Esfuerzo cortante



PROBLEMAS RESUELTOS

PR-5.01. *Clavadista lista para saltar en el trampolín*

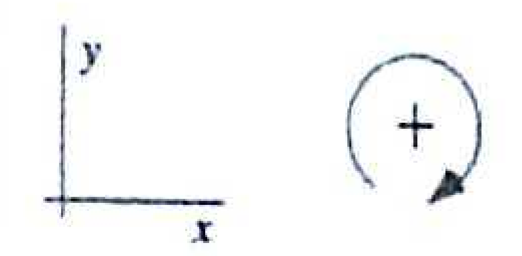
Una clavadista de peso mg = 550 N, está de pie sobre el extremo de un trampolín uniforme que pesa Mg = 300 N.

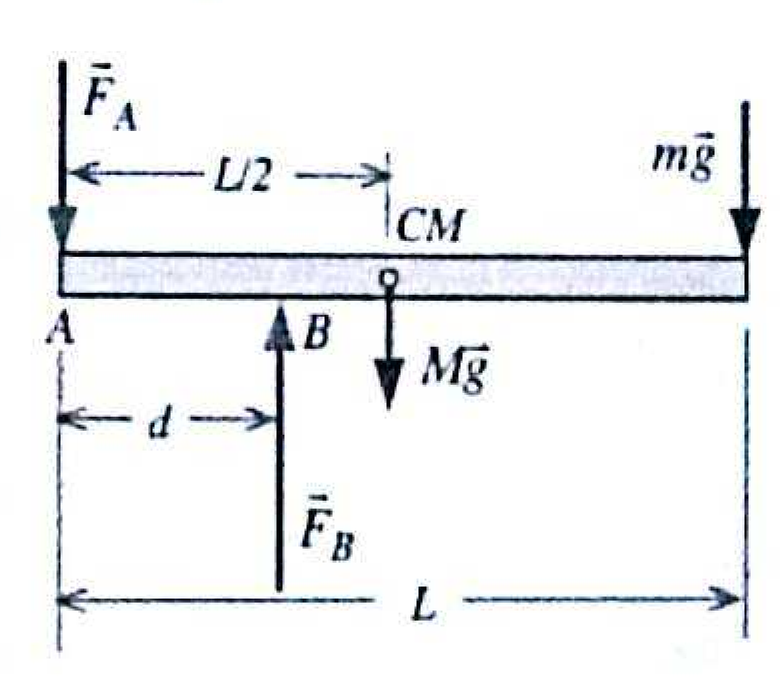


La viga del trampolín es de longitud L = 3 m y está sujeta en los puntos A y B, separados por una distancia d = 1 m, como se ilustra en la figura. Determine la fuerza sobre la viga en cada uno de los puntos de soporte, A y B. Suponga que la viga no se flexiona.

Solución: Elegimos como sistema la viga, y su diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura. El peso Mg de la viga actúa hacia abajo en su centro de masa. Igualmente el peso mg de la clavadista actúa en el otro extremo de la viga. El soporte A empuja en el extremo con una fuerza F_A hacia abajo y el soporte en B empuja con una fuerza F_B hacia arriba. La condición de equilibrio de traslación vertical es :

$$\sum F_y = F_B - F_A - Mg - mg = 0 \qquad (1)$$





Para aplicar la condición de equilibrio rotacional, elegimos un eje que pasa por el extremo A de la viga, de modo que en la ecuación de la sumatoria de los torques no aparezca la fuerza incógnita F_A.

$$\sum \tau_A = -F_B d + Mg\frac{L}{2} + mgL = 0 \qquad (2)$$

$$F_B = \left(\frac{Mg}{2} + mg\right)\frac{L}{d} = \left(\frac{300\text{N}}{2} + 550\text{N}\right)\frac{3\text{m}}{1\text{m}} = 2100\text{N}$$

Sustituyendo F_B en la primera ecuación, hallamos F_A:

$$F_A = F_B - Mg - mg = 2100\text{N} - 300\text{N} - 550\text{N} = 1250\text{N}$$

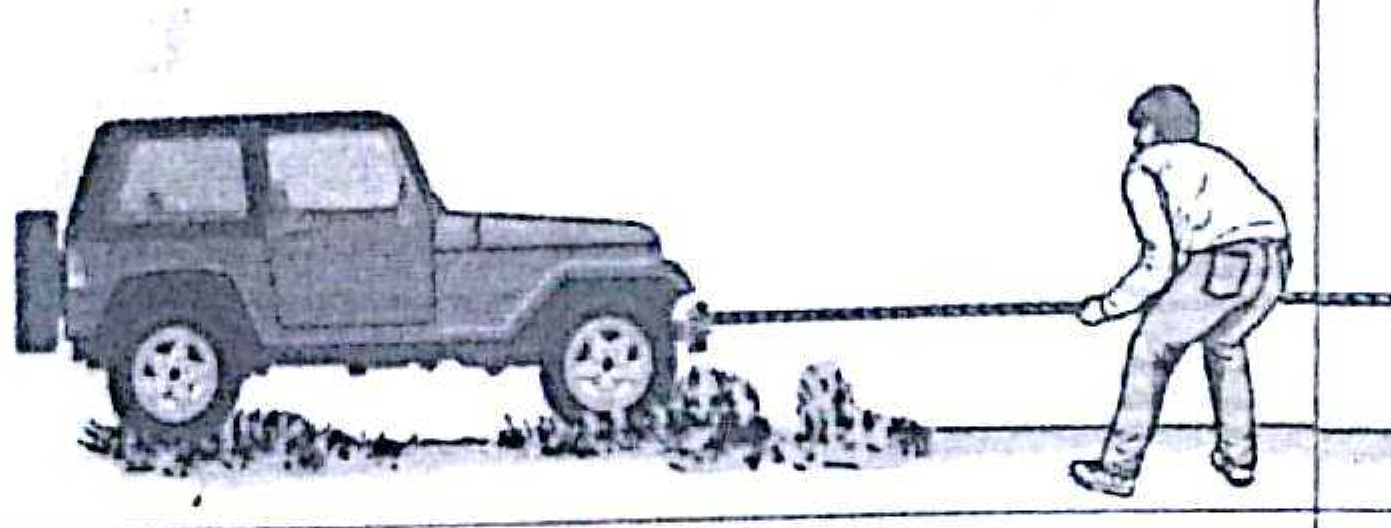
Respuesta:

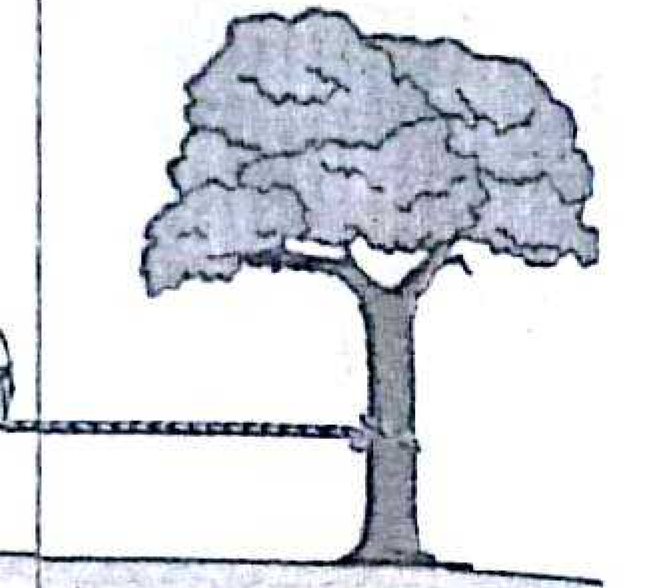
F_A = 1250 N,
F_B = 2100 N

PR-5.02. *Un truco para amplificar fuerzas*

A un estudiante se le queda atascado su carro en un pantano y después de varios intentos de tratar de empujarlo directamente, no consigue moverlo. Afortunadamente él recuerda que en el curso de física le enseñaron una técnica muy sencilla. Amarra una cuerda tensa entre el carro y un árbol cercano y luego aplica una fuerza al centro de la cuerda, y transversal a ésta.

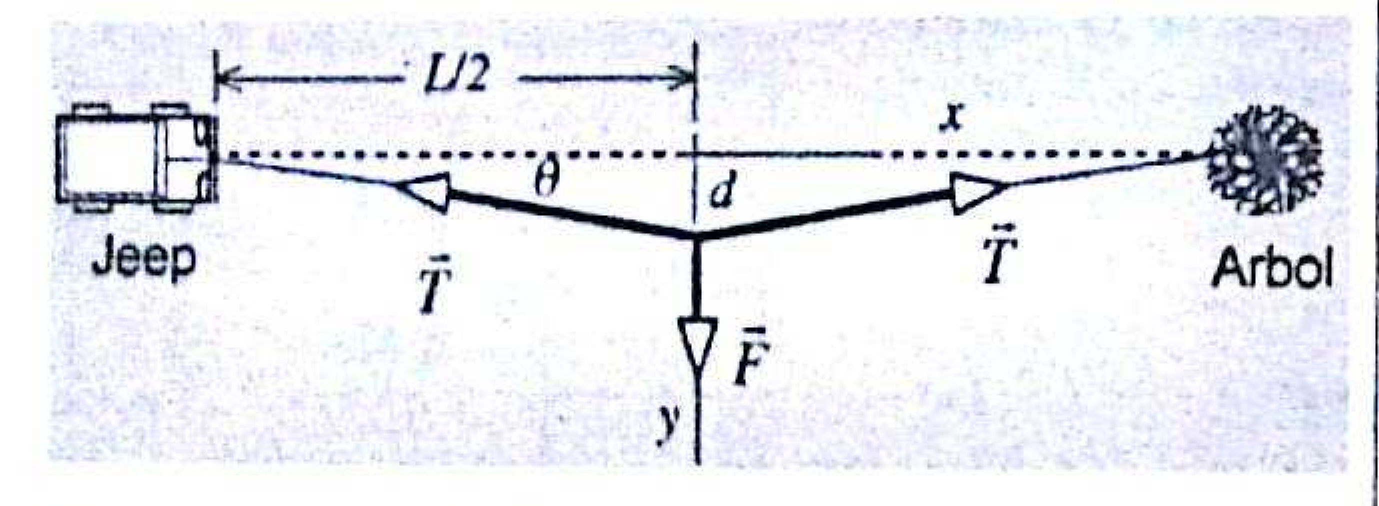
Suponga que la cuerda tiene un largo $L = 10$ m y al aplicar una fuerza $F = 400$ N, la deflexión de la cuerda es $d = 40$ cm. ¿Cuál será la fuerza efectiva que es aplicada por la cuerda sobre el carro?





Solución: Escogemos el punto medio de la cuerda como el objeto y por ser este un punto, aquí no hay torques. Considerando que la fuerza es aplicada en forma cuasi-estática, podemos aplicar la condición de equilibrio.

$$\sum F_y = F - 2T sen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{F}{2sen\theta}$$



El ángulo de desviación está determinado por el triángulo rectángulo del diagrama con catetos d y $L/2$:

$$tg\theta = \frac{d}{L/2} = \frac{0{,}4\text{m}}{3\text{m}} = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \theta = 4{,}57°$$

Por lo tanto, la tensión de la cuerda es:

$$T = \frac{400\text{N}}{2sen4{,}57°} = 2510\text{N}$$

¡Es decir, la magnitud de la fuerza sobre el carro que efectivamente se aplica mediante la cuerda resulta ser mas de seis veces la que está ejerciendo el joven!

Respuesta:

$T = 2510$ N

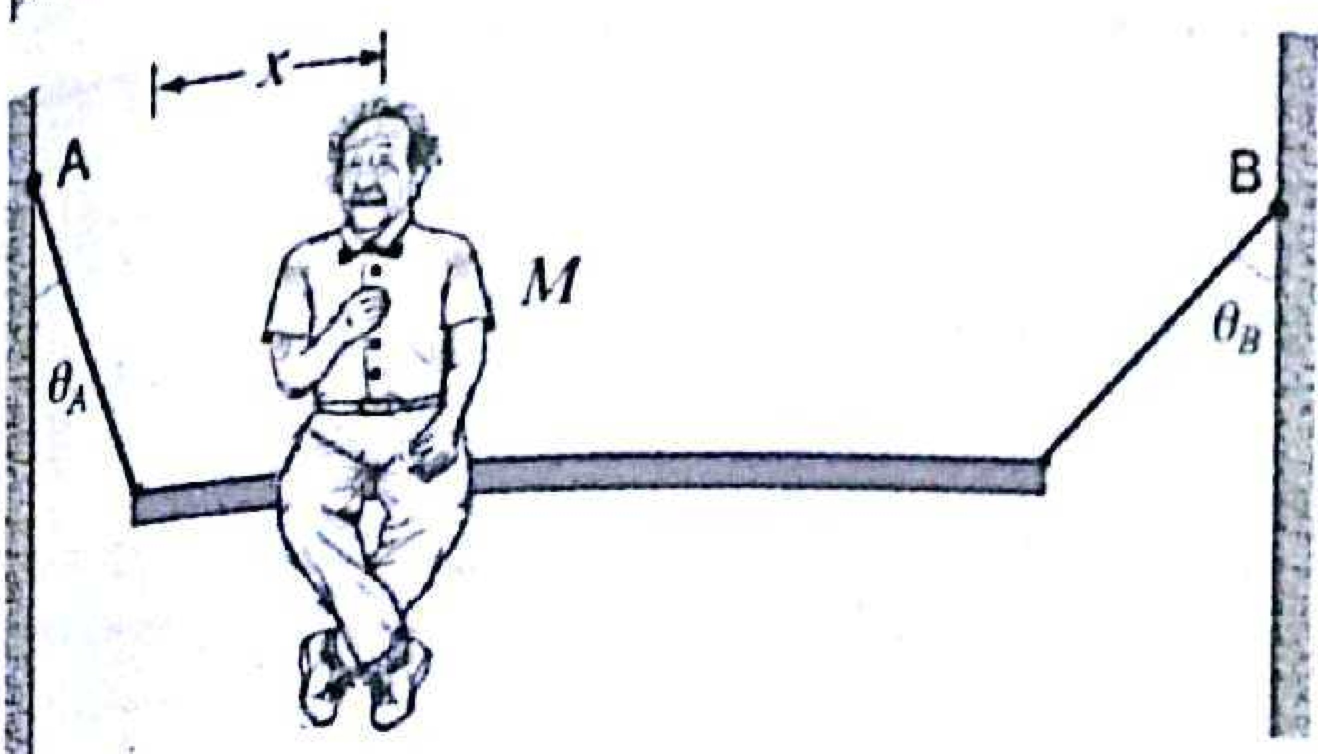
PR-5.03. *La tabla debe quedar horizontal*

Una tabla de longitud L y masa despreciable está suspendida por dos cuerdas livianas que están atadas a las paredes a cada lado.

El profesor de masa M se coloca sobre la tabla de forma tal que ésta se mantenga perfectamente horizontal, en cuyo caso la cuerda de la izquierda forma un ángulo $\theta_A = 30°$ con la vertical y la de la derecha un ángulo $\theta_B = 60°$.

a) ¿Cuáles son las tensiones de las cuerdas?

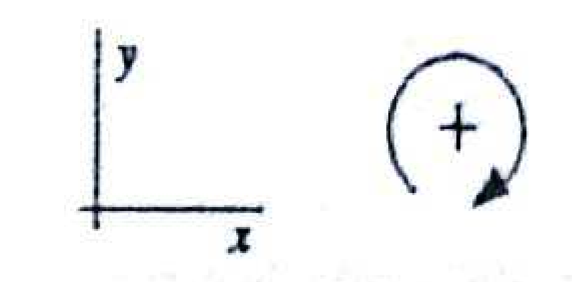
b) ¿A qué distancia x debería colocarse el profesor?

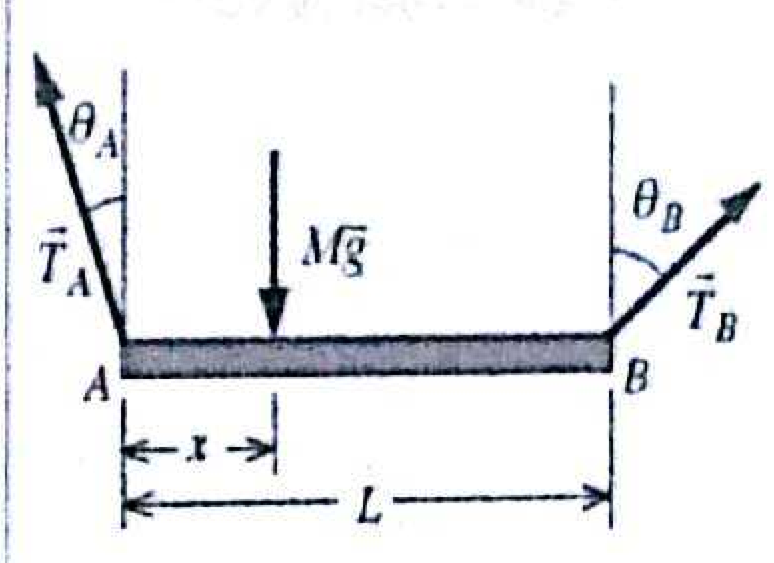


Solución: a) En el diagrama de cuerpo libre se muestran las fuerzas que actúan sobre la tabla. Para el equilibrio de translación horizontal y vertical, tenemos:

$$\sum F_x = -T_A sen\theta_A + T_B sen\theta_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = T_A cos\theta_A + T_B cos\theta_B - Mg = 0 \qquad (2)$$





Multiplicando la ecuación (1) por $cos\theta_A$ y la ecuación (2) por $sen\theta_A$ y luego sumándolas, se cancelan los términos que contienen la tensión T_A y se obtiene:

$$T_B(sen\theta_B cos\theta_A + cos\theta_B sen\theta_A) = Mg sen\theta_A$$

$$T_B sen(\theta_A + \theta_B) = Mg sen\theta_A$$

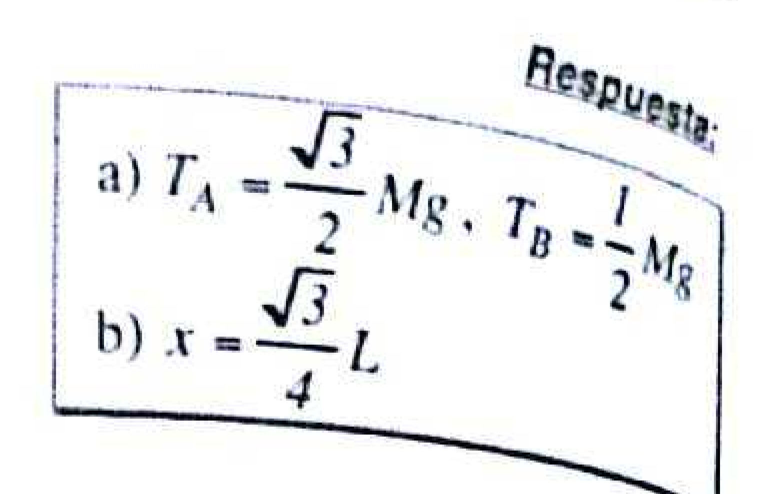
Por lo tanto, las tensiones buscadas son, respectivamente:

$$T_B = \frac{sen\theta_A}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg = \frac{sen 30^0}{sen(30^0 + 60^0)} Mg = \frac{Mg}{2}$$

$$T_A = \frac{sen\theta_B}{sen\theta_A} T_B = \frac{sen60^0}{sen30^0} \frac{Mg}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg$$

b) Para hallar la distancia x donde debería colocarse el profesor, escribimos la ecuación de equilibrio rotacional en torno al punto A:

$$\sum \tau_A = Mgx - T_B L\cos\theta_B = 0$$



Sustituyendo T_B encontramos:

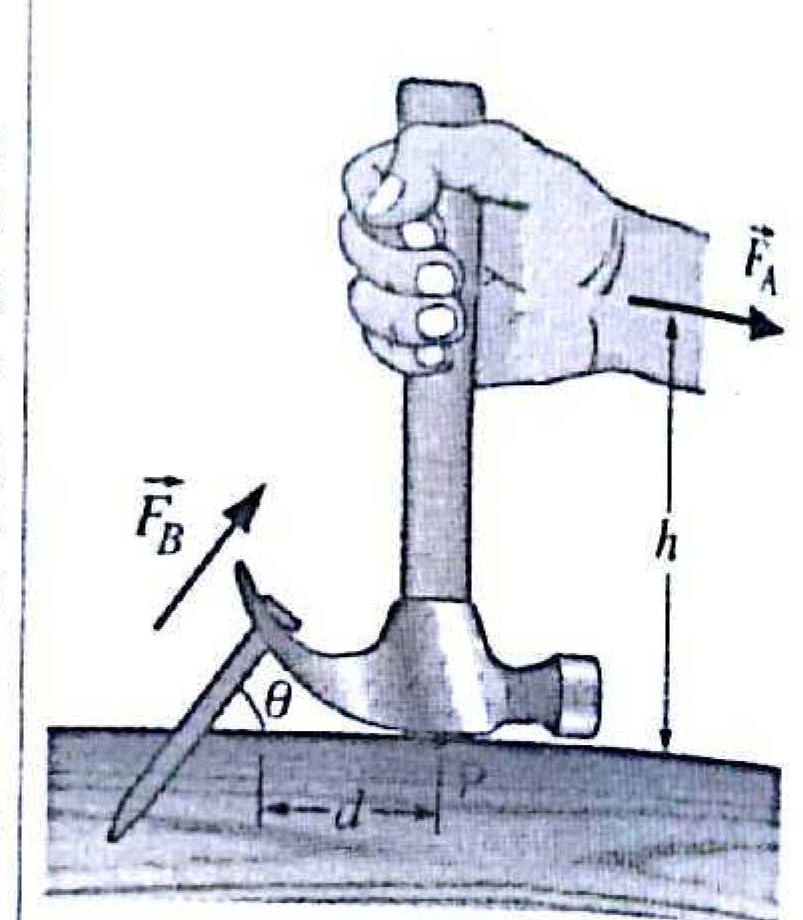
$$x = \frac{L\cos\theta_B}{Mg}T_B = \frac{L\cos 60^0}{Mg}\frac{Mg}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L$$

PR-5.04. *Fuerza que se necesita para extraer un clavo*

Un martillo está en la posición de extraer un clavo de una tabla horizontal. El clavo forma un ángulo $\theta = 60°$ con la superficie y la cabeza del martillo hace contacto con la tabla en un punto P ubicado a una distancia horizontal d = 0,05m de la cabeza del clavo. Para sacar el clavo de la madera se requiere una fuerza F_B = 1000 N. Se aplica al mango del martillo una fuerza horizontal F_A a una distancia h = 0,3 m por encima de la tabla.

a) ¿Cuál debe ser la magnitud de esta fuerza?

b) Determine la fuerza ejercida por la tabla sobre el punto P de contacto con la cabeza del martillo.



Solución: a) En la figura se muestra el diagrama de cuerpo libre del martillo, suponiendo que su peso es despreciable. Conviene tomar torques respecto al punto P de contacto, para que no aparezcan las fuerzas incógnitas $\vec{F}_r$ y $\vec{N}$ en la ecuación de equilibrio rotacional:

$$\sum \tau_P = F_A h - F_B d\,sen\theta = 0$$

$$F_A = \frac{F_B d\,sen\theta}{h} = \frac{(1000\text{N})(0{,}05\text{m})\text{sen}60°}{0{,}3\text{m}} = 144\text{N}$$

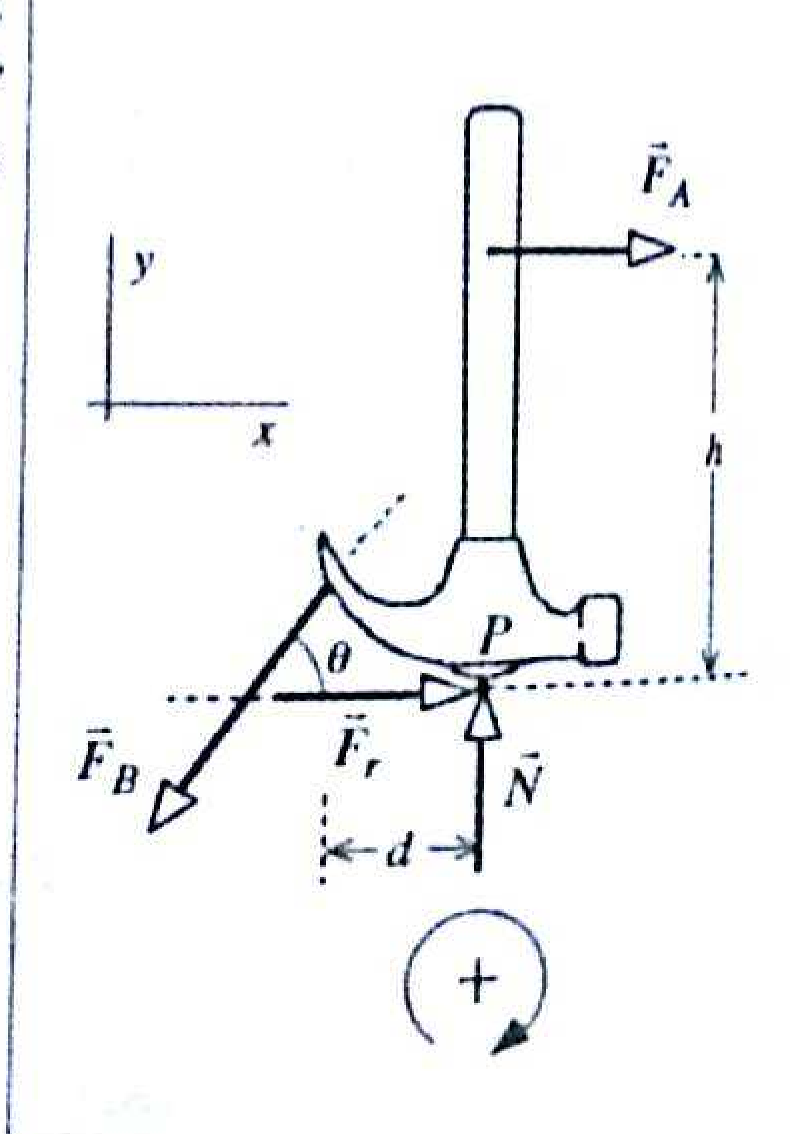
b) La condición para el equilibrio horizontal es:

$$\sum F_x = F_A + F_r - F_B\cos\theta = 0$$

$$F_r = F_B\cos\theta - F_A$$

$$F_r = (1000\text{N})\cos 60° - 144\text{N} = 356\text{N}$$

La ecuación para el equilibrio vertical es:



$$\sum F_y = N - F_B sen\theta = 0$$

$$N = F_B sen\theta = (1000\text{N})\text{sen}60° = 866\text{N}$$

La fuerza ejercida sobre la cabeza del martillo es la suma vectorial de las fuerzas de rozamiento y la fuerza normal:

$$\vec{F}_P = F_r\hat{x} + N\hat{y} = (356\hat{x} + 866\hat{y})N$$

Respuesta:

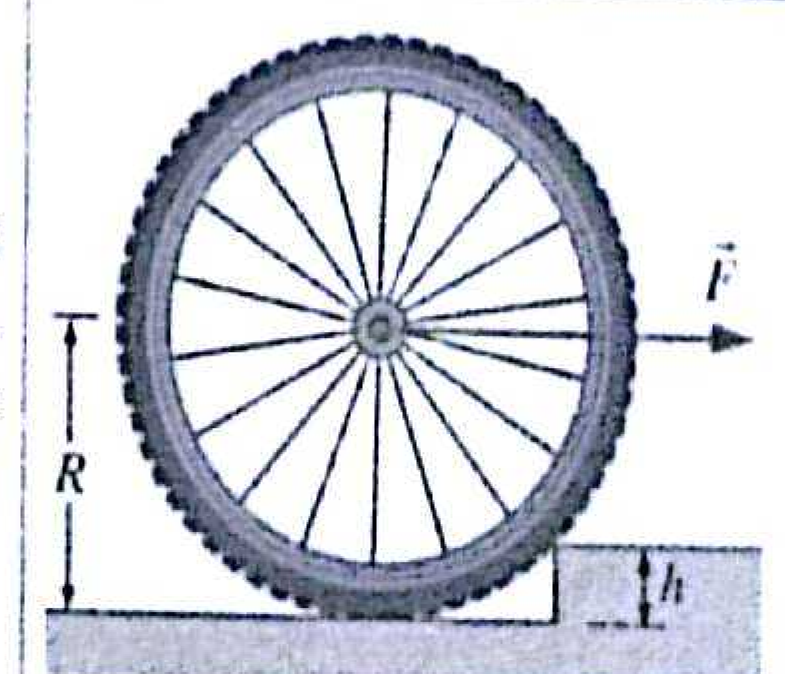
$F_A = 144$N.
$\vec{F}_P = (356\hat{x} + 866\hat{y})N$

PR-5.05. *Fuerza mínima para remontar un escalón*

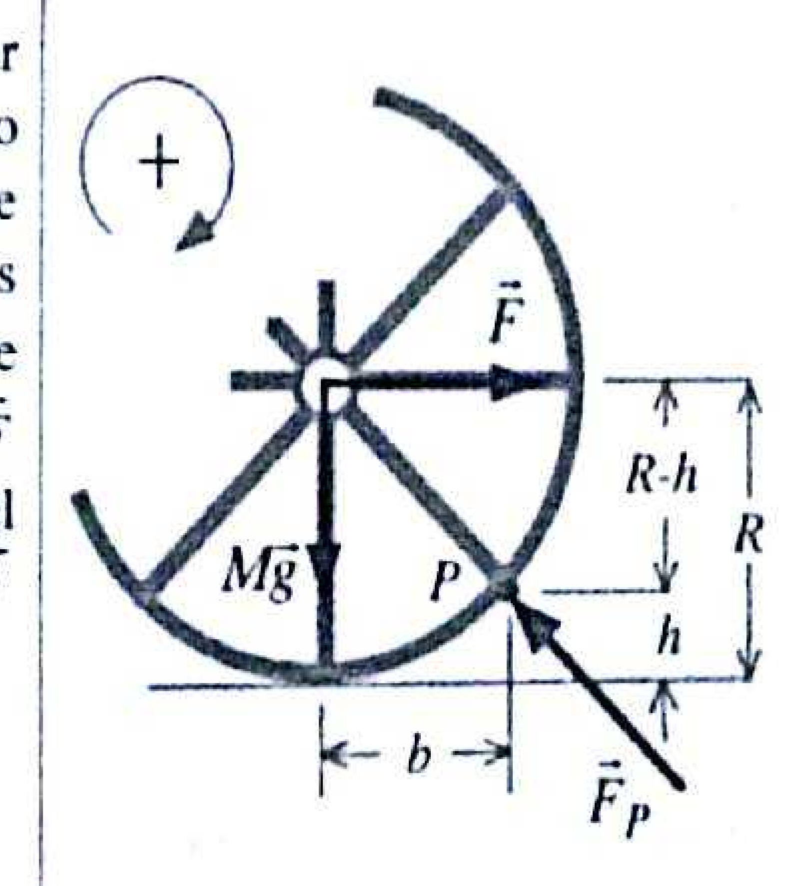
Una rueda de bicicleta de masa M = 2 kg y radio R = 28 cm se encuentra con un escalón brusco de altura h = 8 cm.

a) ¿Cuál es el mínimo valor de la fuerza horizontal $\vec{F}$ que se debe aplicar a la rueda para poder remontar el escalón?

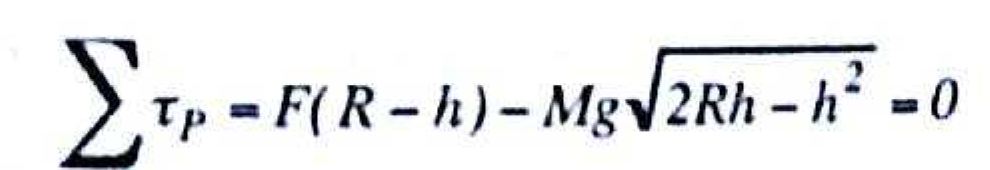
b) ¿Qué fuerza horizontal se requeriría si fuese $h = R$?



Solución: Para remontar la cuesta es necesario causar una rotación de la rueda alrededor del punto de contacto P. Cuando la rueda está a punto de levantarse, pierde contacto con el suelo y en ese momento hay solo las tres fuerzas indicadas. La fuerza de contacto $\vec{F}_P$ no tiene brazo con respecto al punto P, la fuerza horizontal $\vec{F}$ aplicada tiene un brazo de palanca $(R-h)$, mientras que el peso $M\vec{g}$ tiene un brazo: $b = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$



La condición para el equilibrio rotacional es:



$$\sum \tau_P = F(R-h) - Mg\sqrt{2Rh - h^2} = 0$$

Por lo tanto, el valor crítico de la fuerza $\vec{F}$ es:

$$F = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R-h}Mg$$

$$F = \frac{\sqrt{2(0{,}28\text{m})(0{,}08\text{m}) - (0{,}08\text{m})^2}}{0{,}28\text{m} - 0{,}08\text{m}}(5\text{kg})(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 49\text{N}$$

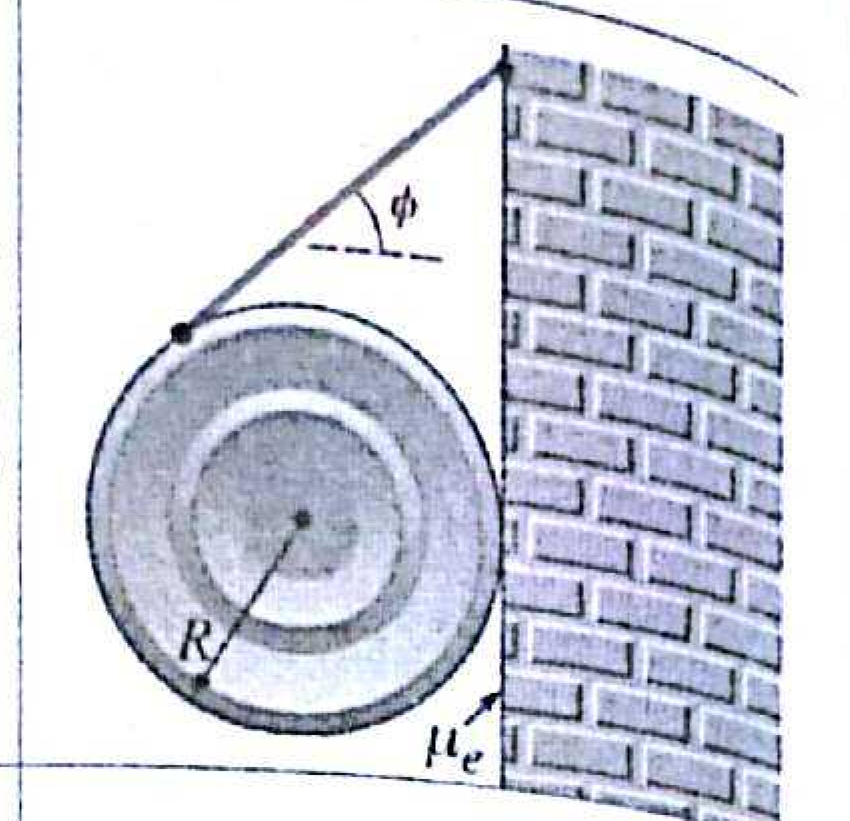
b) De acuerdo a la expresión anterior, si la altura del escalón fuese igual al radio de la rueda, $(h = R)$, la fuerza requerida sería infinita.

Respuesta:

a) $F \cong 49$N
b) $F = \infty$

PR-5.06. *Rozamiento para que el cilindro no resbale*

Un cilindro de masa m y radio R se mantiene en la posición indicada aplicándole una fuerza mediante una cuerda que forma un ángulo con la dirección horizontal, ϕ. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático con la pared, μ_e para que el cilindro no se caiga?



Solución: De acuerdo al diagrama de cuerpo libre, la ecuación de equilibrio en la dirección horizontal, es:

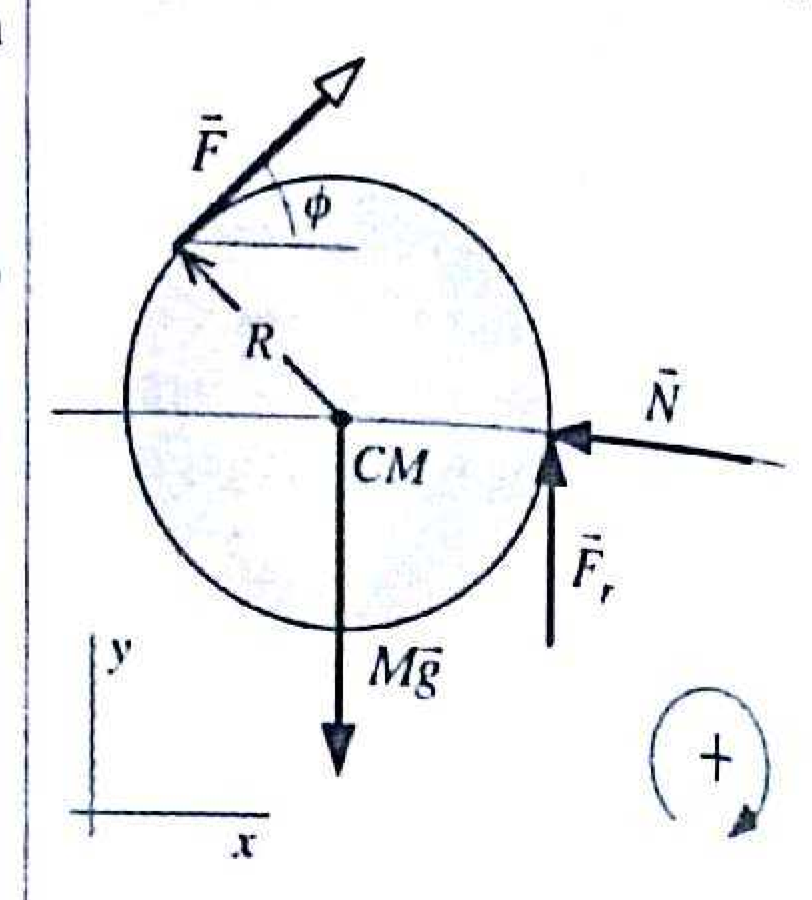
$$\sum F_x = F\cos\phi - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F\cos\phi \qquad \text{(i)}$$

Por otra parte, escogiendo el punto de rotación en el CM del cilindro, la ecuación de equilibrio rotacional es:

$$\sum \tau_{cm} = FR - F_r R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_r = F \qquad \text{(ii)}$$

La fuerza de rozamiento estática máxima es $F_r = \mu_e N$ de modo que combinando las ecuaciones (i) y (ii), obtenemos el coeficiente de roce mínimo:

$$N = \mu_e N\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \mu_e(\text{mín}) = \sec\phi$$

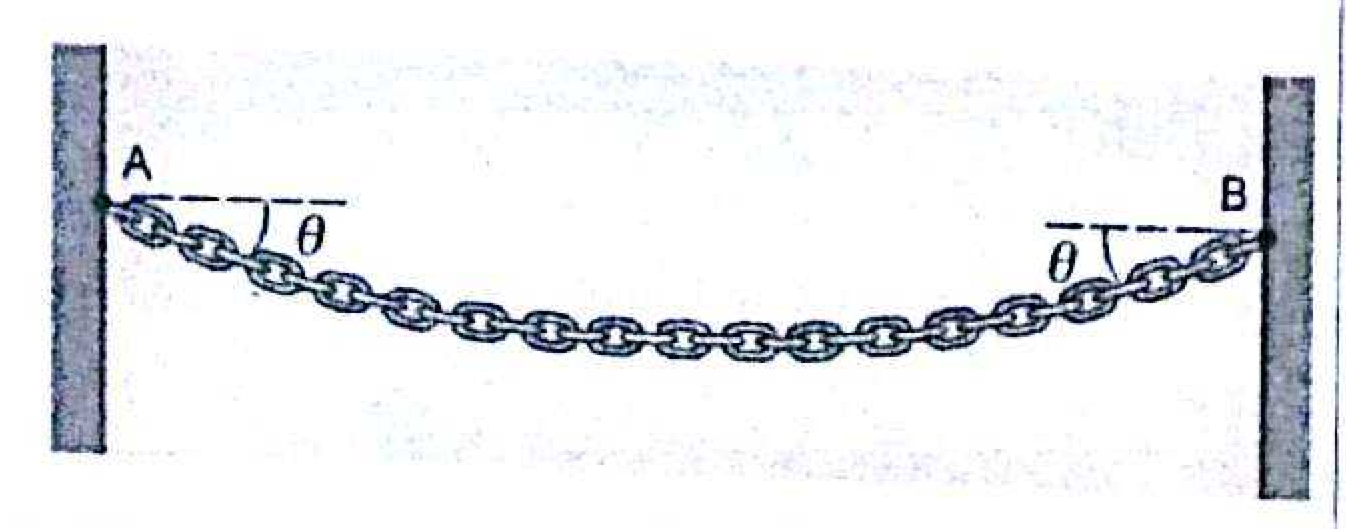


Respuesta:

$\mu_e(\text{mín}) = \sec\phi$

PR-5.07. *Tensión de una cadena suspendida*

Una cadena flexible de peso W está suspendida entre dos puntos fijos, A y B ubicados a la misma altura.



a) Halle la tensión en la cadena en su punto medio.

b) Halle la fuerza que cada soporte ejerce sobre la cadena.

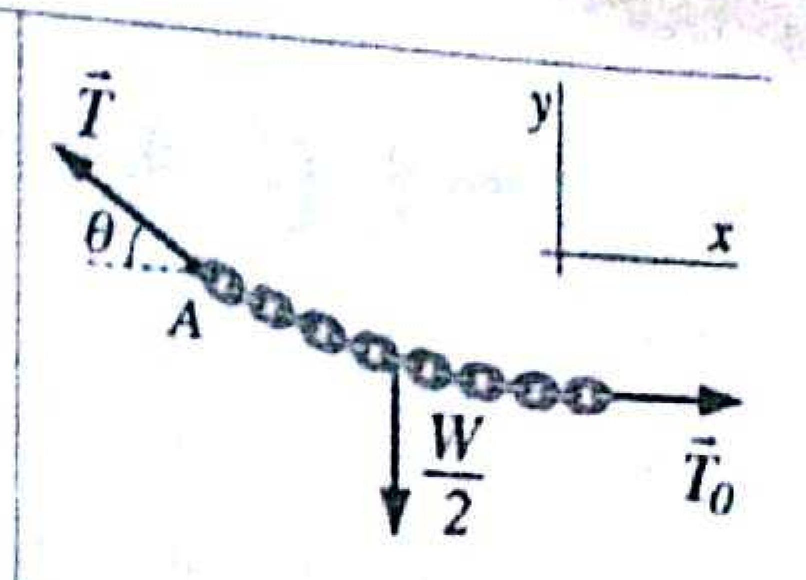
*La forma que adopta la cadena es una curva que se conoce como *catenaria*.

Solución: Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena. Sea $\vec{T}_0$ la tensión de la cadena en el punto más bajo y $\vec{T}$ la tensión en los puntos de soporte.

Las ecuaciones de equilibrio de translación son:

$$\sum F_x = T_0 - T\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = T\cos\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = -\frac{W}{2} + T\,sen\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{2} = T\,sen\,\theta \qquad (2)$$



Si dividimos estas dos ecuaciones tenemos:

$$\frac{T_0}{W/2} = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta} = ctg\,\theta \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{W}{2tg\,\theta}$$

b) Sustituyendo T_0 en la ecuación (1) tenemos la tensión en los puntos de soporte:

$$T = \frac{T_0}{\cos\theta} = \frac{W}{2sen\,\theta}$$

Respuesta:

a) $T_0 = \dfrac{W}{2tg\,\theta}$

b) $T = \dfrac{W}{2sen\,\theta}$

PR-5.08. *¿Se podrá determinar cuánto pesa la cuerda?*

El extremo izquierdo de la cuerda mostrada está amarrado a una pared vertical.



Al aplicar a su extremo derecho una fuerza horizontal $F = 30$ N, en equilibrio la cuerda queda formando un ángulo $\theta = 37°$ con la pared.

a) Halle la tensión de la cuerda.

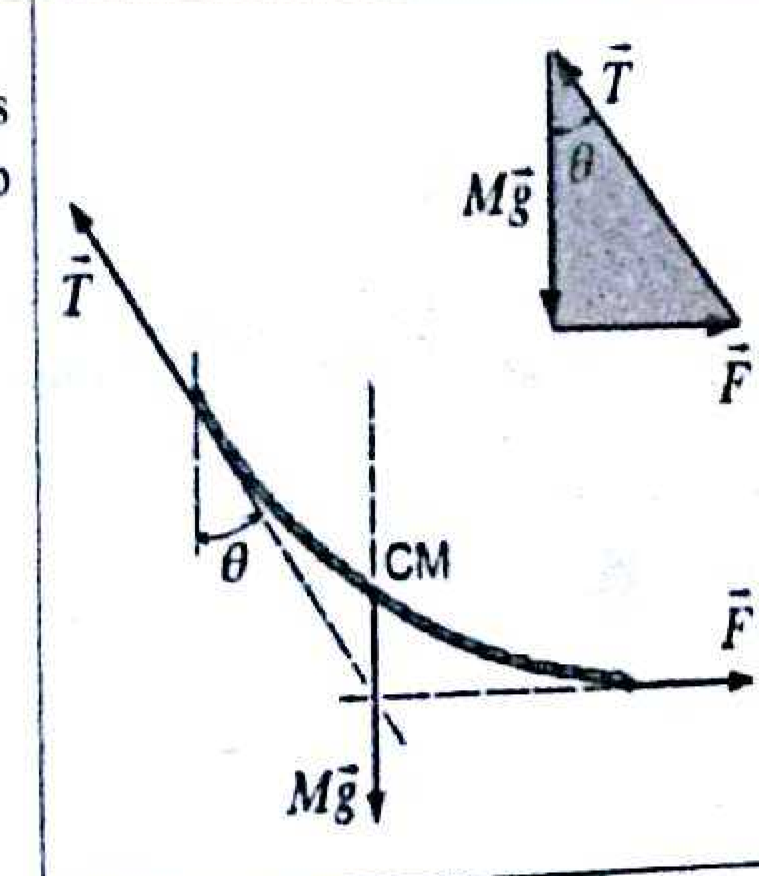
b) ¿Con esta información se podrá determinar cuánto pesa la cuerda?

Solución: a) En equilibrio, los vectores de las tres fuerzas aplicadas sobre la cuerda forman el triángulo rectángulo mostrado en la figura, según la relación.

$$\vec{F} + \vec{T} + M\vec{g} = 0$$

La tensión de la cuerda es:

$$T = \frac{F}{sen\,\theta} = \frac{30\text{N}}{sen37°} = 50\text{N}$$



b) Con la información dada podemos determinar el peso que tiene la cuerda:

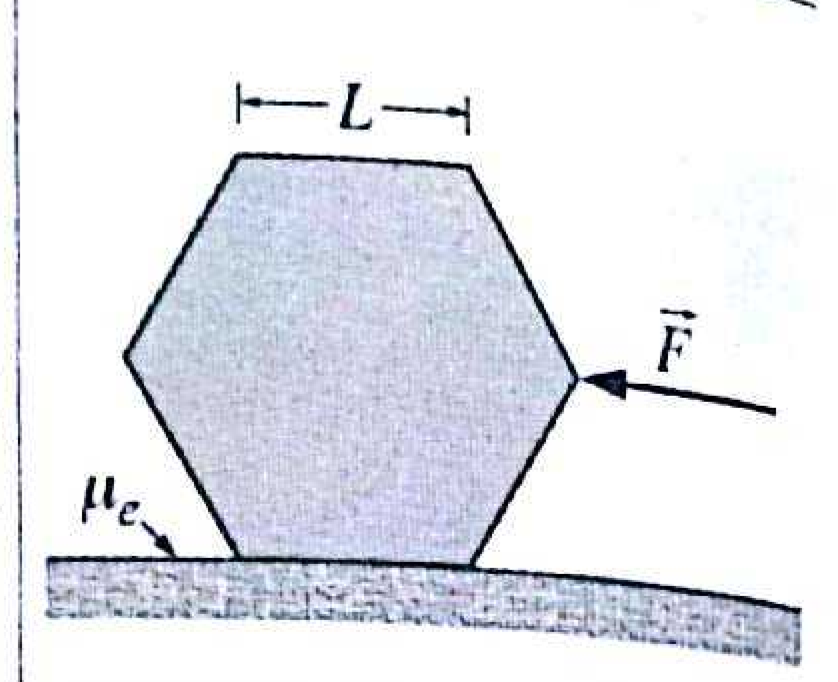
$$Mg = T\cos\theta = 50\text{N}\cos 37^\circ = 40\text{N}$$

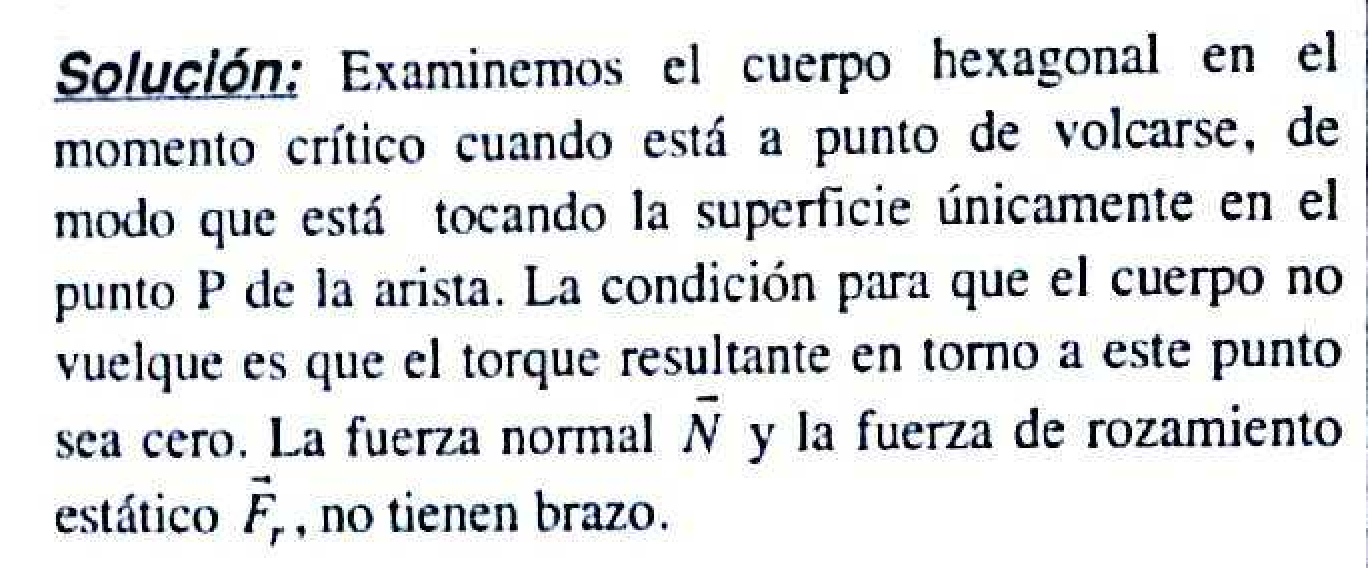
Respuesta:

a) T = 50 N
b) $Mg = 40\text{N}$

PR-5.09. *Empujando el lápiz hexagonal sin volcarlo*

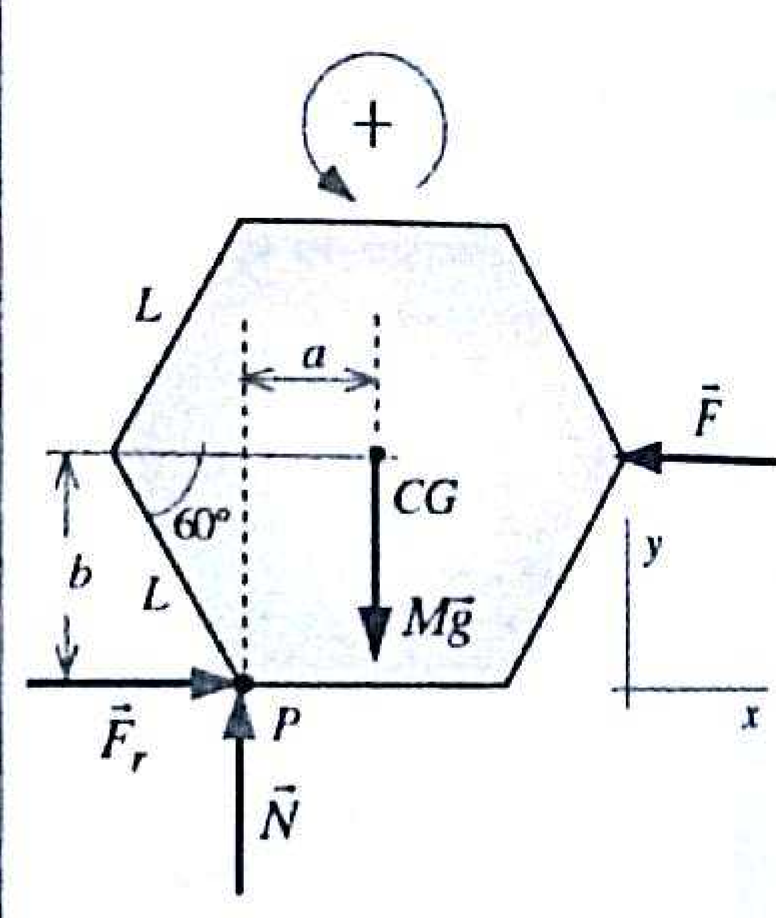
Un lápiz de sección transversal hexagonal de lados L, está siendo empujado a lo largo de una superficie horizontal aplicándole una fuerza horizontal por uno de sus vértices. ¿Qué valor debe tener coeficiente de fricción estática μ_e entre la superficie y el lápiz para que éste se desplace sin que se vuelque?





Solución: Examinemos el cuerpo hexagonal en el momento crítico cuando está a punto de volcarse, de modo que está tocando la superficie únicamente en el punto P de la arista. La condición para que el cuerpo no vuelque es que el torque resultante en torno a este punto sea cero. La fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento estático $\vec{F}_r$, no tienen brazo.

El torque de la fuerza aplicada $\vec{F}$ le provoca un giro en sentido anihorario, mientras que el peso $M\vec{g}$ lo hace girar en sentido horario.



$$\sum \tau_P = Fb - Mga = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{a}{b}Mg$$

Para que el hexágono se deslice, el valor de la fuerza aplicada debe ser mayor que el de la fuerza de rozamiento máxima, $F_r(max) = \mu_e N$:

$$F \geq \mu_e N = \mu_e Mg \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}Mg \geq \mu_e Mg$$

Las distancias a y b están relacionadas con el lado L del hexágono, según el diagrama mostrado. Reemplazando estas distancias, se obtiene que el coeficiente de rozamiento estático debe ser :

$$\mu_e \leq \frac{a}{b} = \frac{L/2}{L\,sen 60^0} = \frac{L/2}{L\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

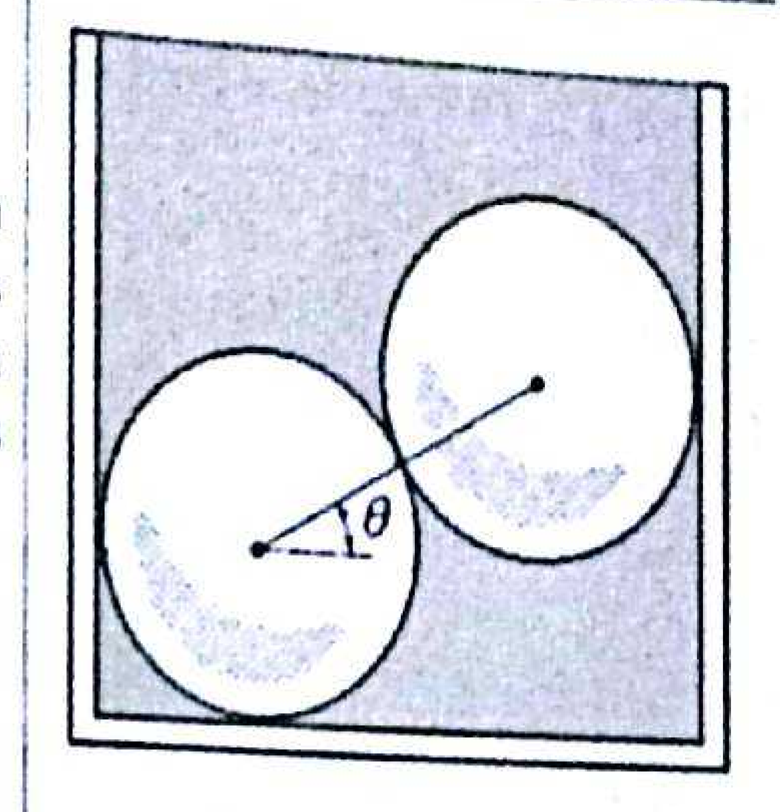
Respuesta:

El cuerpo no volcará si: $\mu_e < 1/\sqrt{3}$

PR-5.10. *Dos esferas apoyándose en un recipiente*

Dos esferas lisas idénticas, cada una de peso W, están apoyándose dentro de un recipiente de paredes lisas. Sus centros se encuentran sobre la línea recta que forma un ángulo θ con la horizontal. Determine las fuerzas ejercidas sobre las esferas:

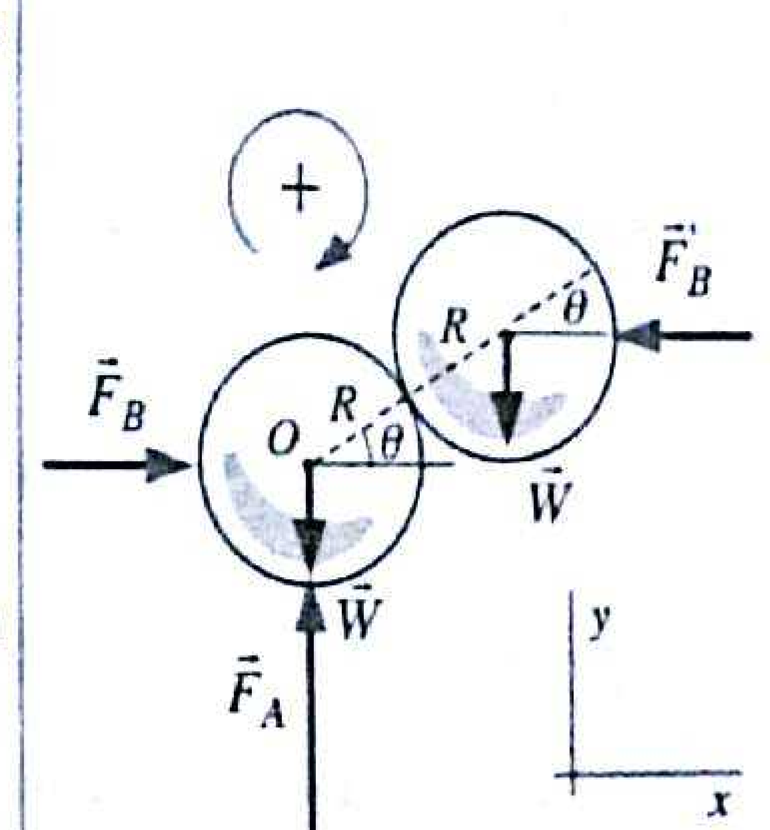
a) Por el fondo del recipiente.
b) Por los costados del recipiente.
c) La que ejerce una esfera sobre la otra.



Solución: a) Consideremos primero el diagrama de cuerpo libre de *las dos esferas* como un solo cuerpo. Sea $\vec{F}_A$ la fuerza del fondo del recipiente y $\vec{F}_B$ y $\vec{F}_B'$ las fuerzas de apoyo que ejercen las paredes a cada lado. Las ecuaciones de equilibrio de traslación son:

$$\sum F_x = F_B - F_B' = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = F_B' \qquad (1)$$

$$\sum F_y = F_A - 2W = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 2W \qquad (2)$$

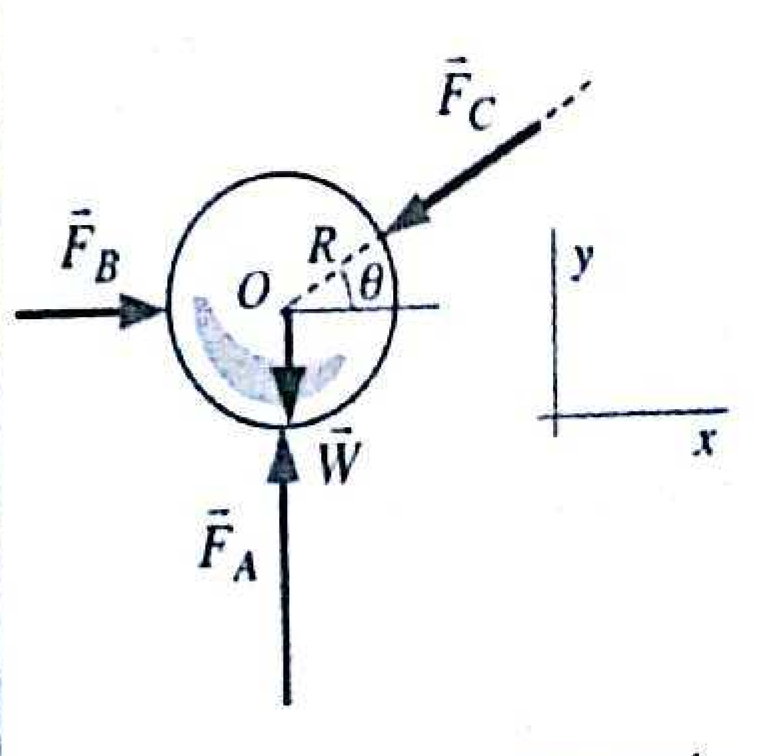


b) Si tomamos torques respecto al centro de la esfera inferior, la ecuación de equilibrio rotacional es:

$$\sum \tau_O = W(2R\cos\theta) - F_B'(2R sen\theta) = 0$$

Despejando F_B' y tomando en cuenta la ecuación (1), se obtiene:

$$F_B = F_B' = W\frac{\cos\theta}{sen\theta} = W ctg\theta$$



c) Para hallar la fuerza de contacto entre las esferas, F_C, consideramos el diagrama de cuerpo libre de la esfera inferior solamente. La ecuación para el equilibrio horizontal es:

$$\sum F_x = F_B - F_C\cos\theta = 0$$

Despejando F_C y sustituyendo el valor de F_B, tenemos:

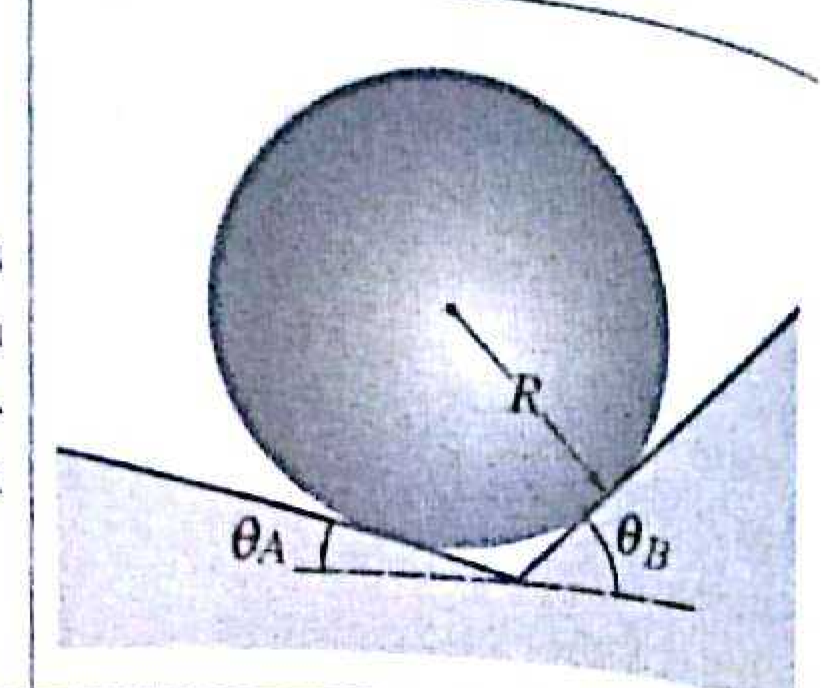
$$F_C = \frac{F_B}{\cos\theta} = \frac{W ctg\theta}{\cos\theta} = \frac{W}{sen\theta} = W\csc\theta$$

Respuesta:

a) $F_A = 2W$
b) $F_B = F_B' = W ctg\theta$
c) $F_C = W\csc\theta$

PR-5.11. *Fuerzas de apoyo sobre una esfera*

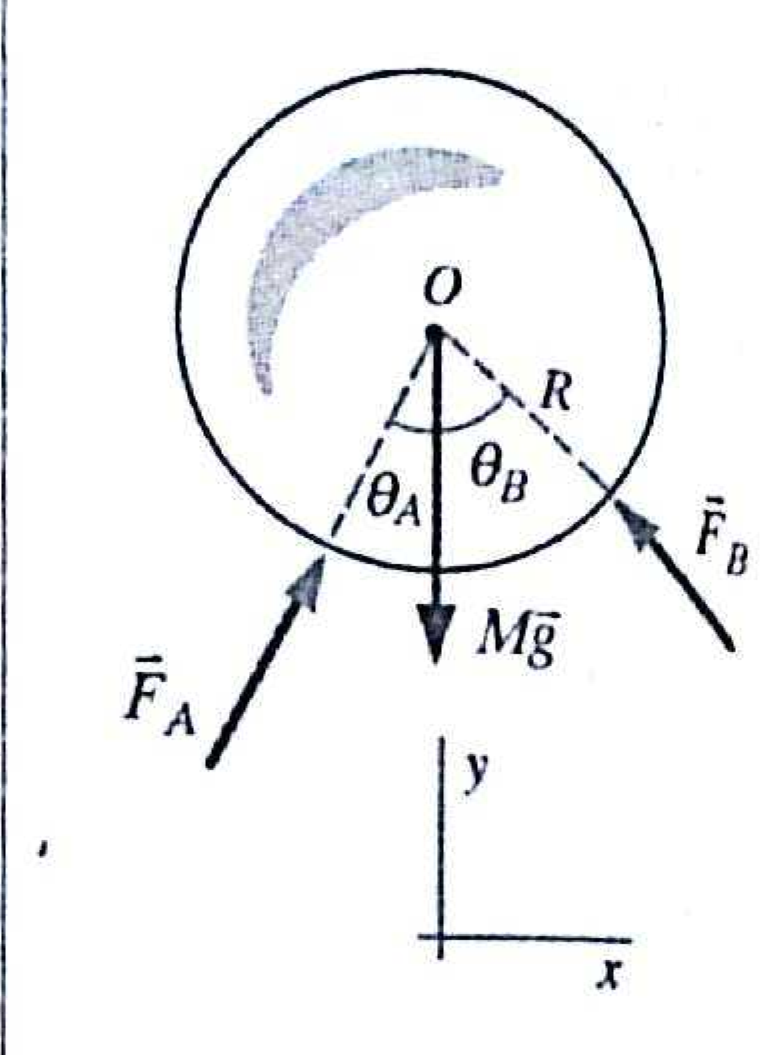
Una esfera uniforme de masa M descansa sobre dos superficies planas y lisas. Las dos superficies forman ángulos con la horizontal, θ_A y θ_B respectivamente. Determine la fuerza ejercida por cada superficie sobre la esfera en los puntos de contacto.



Solución: Las ecuaciones de equilibrio de translación horizontal y vertical son respectivamente:

$$\sum F_x = F_A sen\theta_A - F_B sen\theta_B = 0$$

$$\sum F_y = F_A cos\theta_A + F_B cos\theta_B - Mg = 0$$



Si despejamos F_B de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda, se obtiene:

$$F_A cos\theta_A + (F_A \frac{sen\theta_A}{sen\theta_B})cos\theta_B - Mg = 0$$

$$F_A(sen\theta_B cos\theta_A + sen\theta_A cos\theta_B) = Mgsen\theta_B$$

$$F_A sen(\theta_A + \theta_B) = Mgsen\theta_B$$

Por lo tanto, las fuerzas de apoyo son:

$$F_A = \frac{sen\theta_B}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg$$

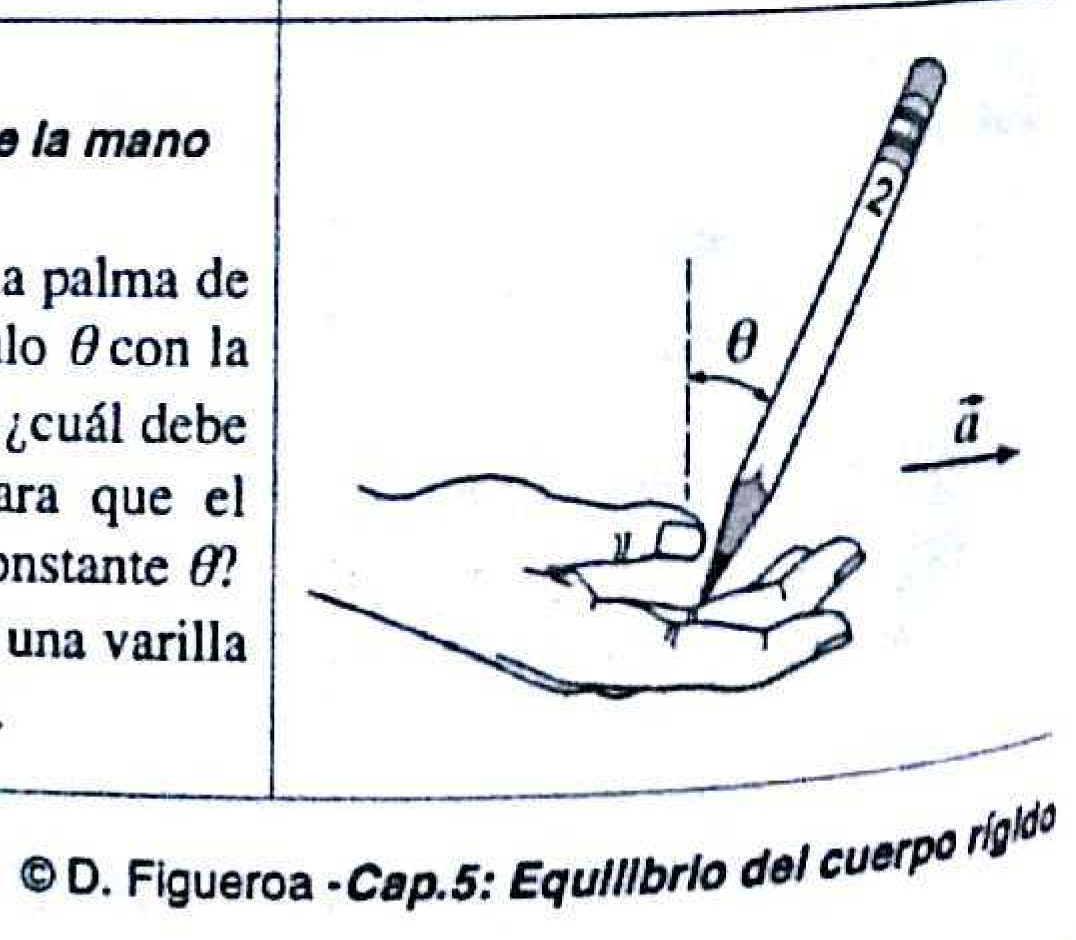
$$F_B = \frac{sen\theta_A}{sen\theta_B} \frac{sen\theta_B}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg = \frac{sen\theta_A}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg$$

Respuesta:

$$F_A = \frac{sen\theta_B}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg, \quad F_B = \frac{sen\theta_A}{sen(\theta_A + \theta_B)} Mg$$

PR-5.12. *Equilibrando un lápiz en la palma de la mano*

Una persona trata de mantener un lápiz sobre la palma de la mano en posición inclinada a un cierto ángulo θ con la vertical. Si el lápiz tiene longitud L y masa M, ¿cuál debe ser la aceleración horizontal de la mano para que el ángulo de inclinación siempre tenga un valor constante θ? Suponga que el lápiz puede considerarse como una varilla cuya masa está distribuida de manera uniforme.

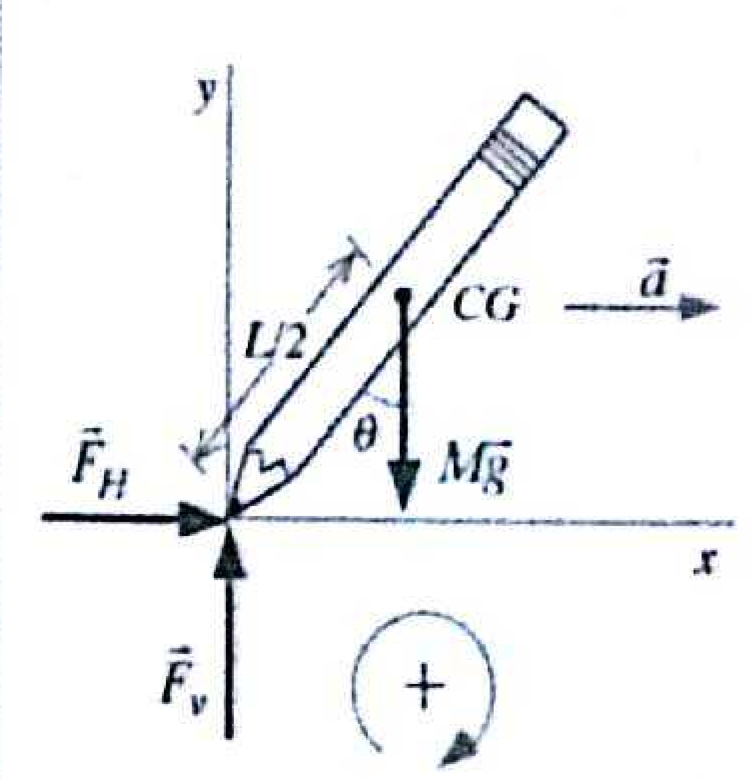


Solución: En el diagrama de cuerpo libre del lápiz hemos dibujado las fuerzas aplicadas: el peso $M\vec{g}$ y las componentes horizontal $\vec{F}_H$ y vertical $\vec{F}_V$ de la fuerza que ejerce la mano. El lápiz no se mueve verticalmente y la condición de equilibrio es:

$$\sum F_y = F_V - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_V = Mg$$

En la dirección horizontal el lápiz está acelerado y debemos aplicar la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = F_H = Ma \quad \Rightarrow \quad a = F_H / M$$



Ahora aplicamos la condición de equilibrio rotacional tomando rotaciones en torno al centro de gravedad (CG):

$$\sum \tau_{cm} = -F_H(\frac{L}{2}cos\theta) + F_V(\frac{L}{2}sen\theta) = 0$$

Simplificando:

$$F_H = F_V \frac{sen\theta}{cos\theta} = Mgtg\theta$$

La aceleración buscada es:

$$a = \frac{F_H}{M} = \frac{Mgtg\theta}{M} = gtg\theta$$

Respuesta:

$$a = gtg\theta$$

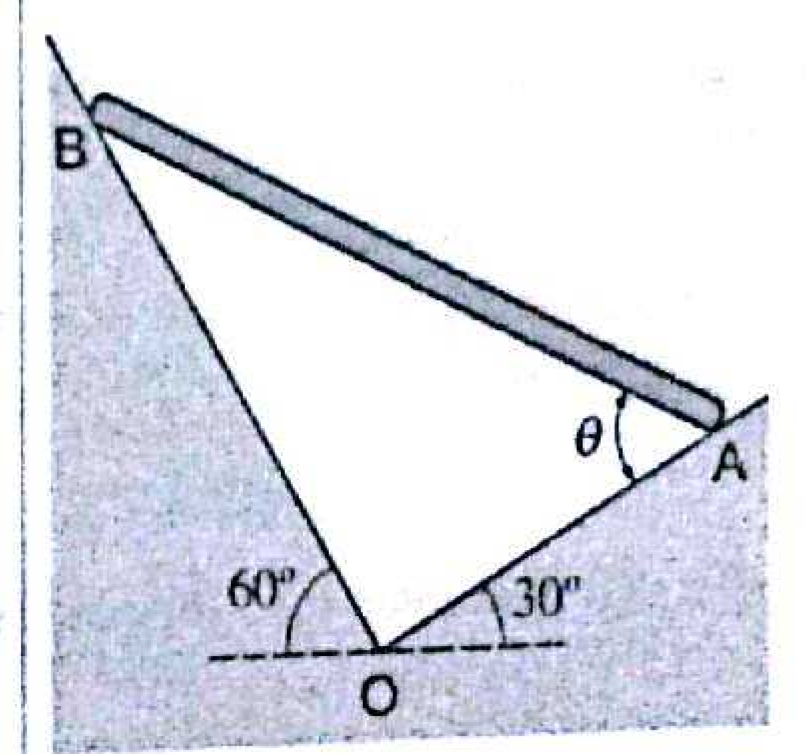
PR-5.13. *Equilibrio de una tabla sobre paredes lisas*

Una tabla de peso W y longitud L está colocada con sus extremos apoyándose sobre dos paredes ortogonales que no ofrecen rozamiento.

a) Determine las fuerzas de apoyo sobre las paredes.

b) Determine el ángulo θ de equilibrio de la tabla.

c) Verifique que el centro de gravedad de la barra debe ubicarse en la línea vertical arriba del punto O.



Solución: a) Sobre la tabla actúan tres fuerzas: Las fuerzas de apoyo $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ que son perpendiculares a las superficies y el peso de la tabla, $M\vec{g}$, que queda en la dirección vertical. Las ecuaciones de equilibrio horizontal y vertical son, respectivamente:

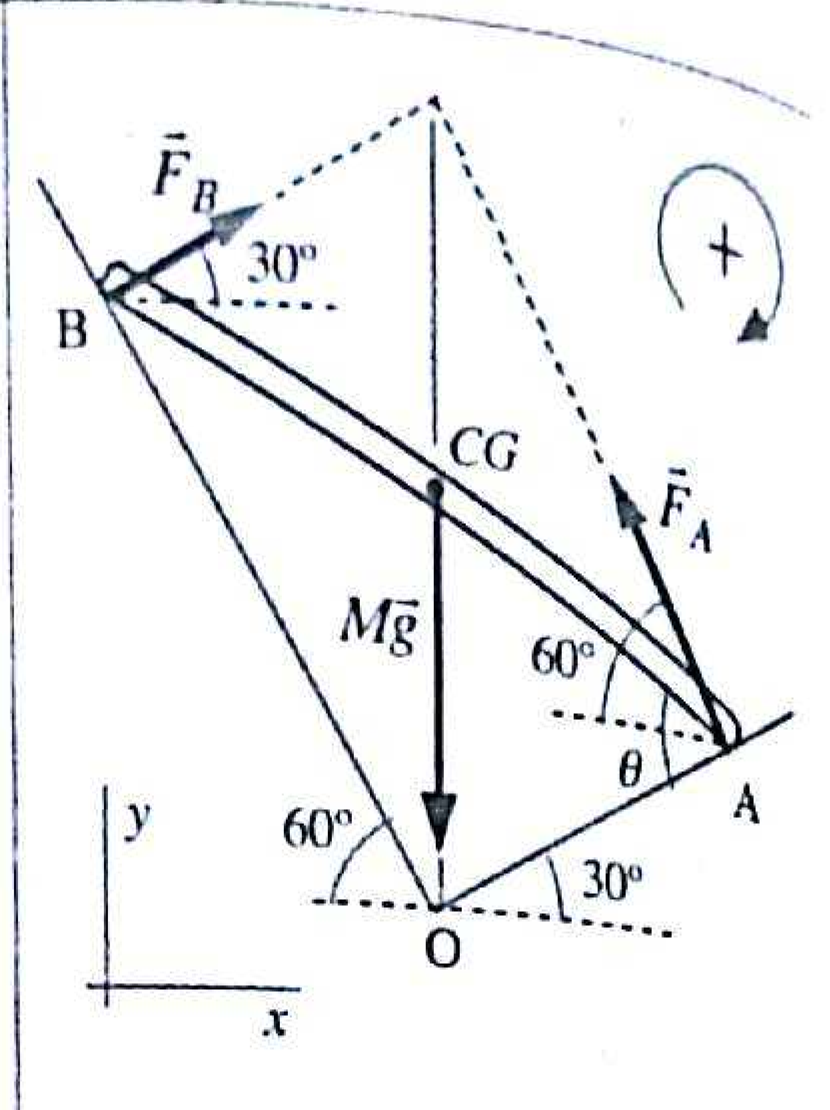
$$\sum F_x = -F_A \cos 60° + F_B \cos 30° = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{1}{\sqrt{3}} F_A$$

$$\sum F_y = F_A sen 60° + F_B sen 30° - Mg = 0$$

Sustituyendo F_B en esta última ecuación, se tiene:

$$F_A sen 60° + \frac{1}{\sqrt{3}} F_A sen 30° = Mg \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg$$

$$F_B = \frac{1}{\sqrt{3}} F_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} Mg = \frac{1}{2} Mg$$

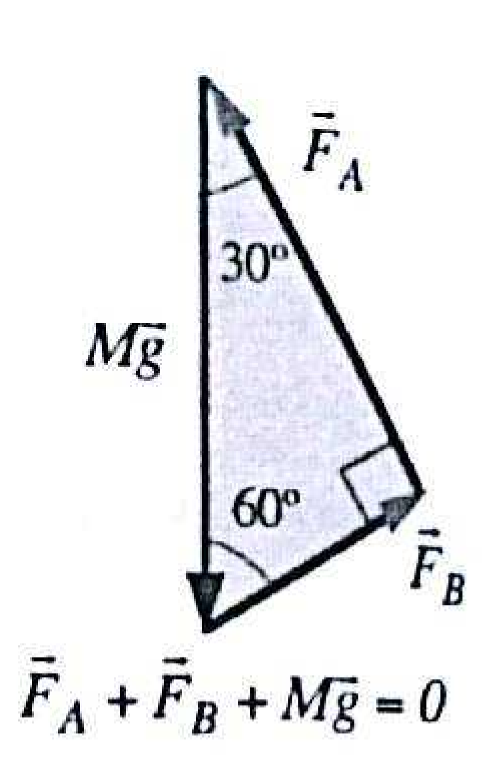


b) Para equilibrio rotacional tomamos torques en torno al CG de la tabla:

$$\sum \tau_{CG} = -F_A \frac{L}{2} sen(90° - \theta) + F_B (\frac{L}{2} sen\theta) = 0$$

$$F_A sen(90° - \theta) = F_A \cos\theta = F_B sen\theta$$

$$tg\theta = \frac{F_A}{F_B} = \frac{\sqrt{3} Mg/2}{Mg/2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60°$$



$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + M\vec{g} = 0$$

c) Como la tabla está en equilibrio, se cumple:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + M\vec{g} = 0$$

Luego los tres vectores forman un triángulo rectángulo ya que los vectores $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ son ortogonales y de acuerdo al diagrama mostrado, $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ deben interceptarse en un punto en la línea vertical por encima del CG de la barra y arriba del punto O

Respuesta:

a) $F_A = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg$; $F_B = \frac{1}{2} Mg$

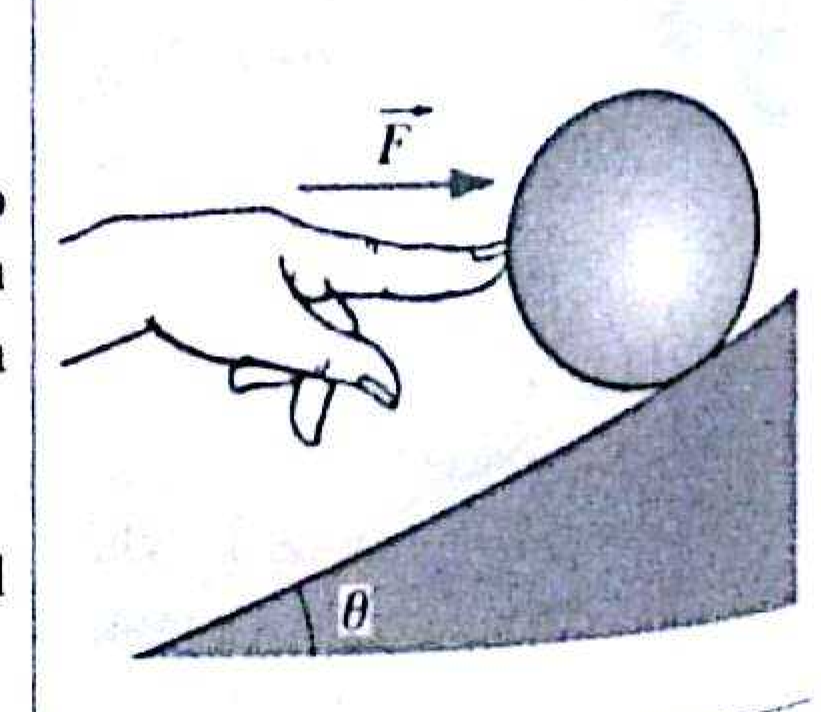
b) $\theta = 60°$

PR-5.14. *Mantén la esfera quieta en el plano inclinado*

Se coloca una esfera de radio R y masa M sobre un plano inclinado de ángulo θ y, para que se mantenga en equilibrio, se le aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ en la línea de su centro.

a) ¿Cuál debe ser el valor de F necesario?

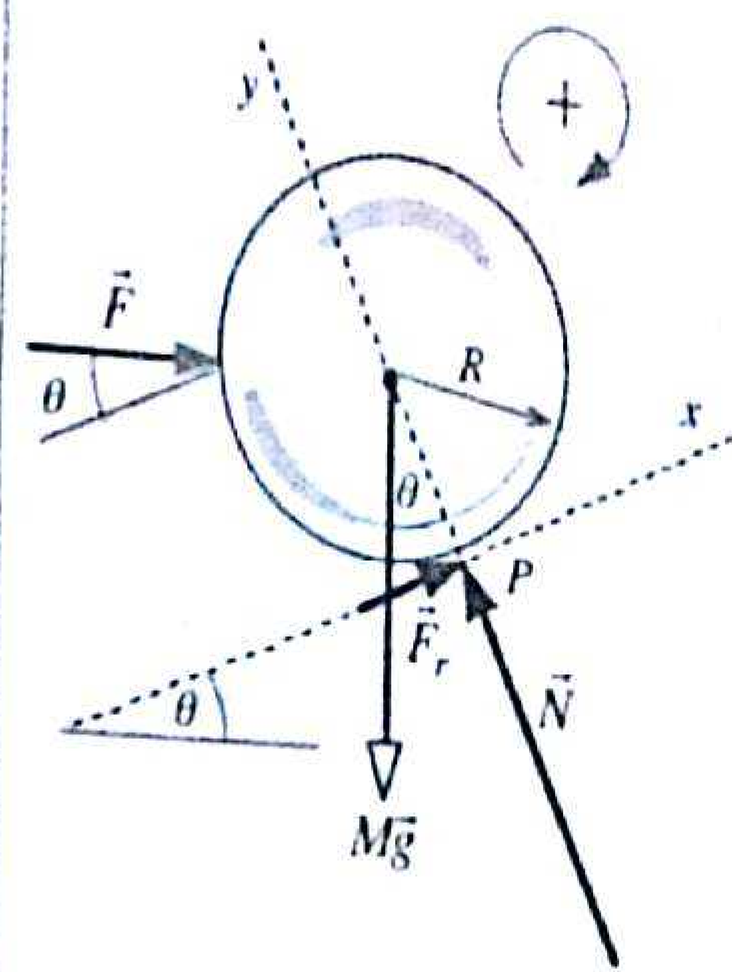
b) ¿Cuál es el valor de la fuerza de fricción que ejerce el plano sobre la esfera?



Solución: La figura muestra el diagrama de cuerpo libre de la esfera. Para aplicar la condición de equilibrio de rotación de la esfera elegimos un eje que pasa por el punto P de contacto con el plano. Esto hace que aparezca una sola incógnita:

$$\sum \tau_P = Mg(R sen\theta) - (F \cos\theta) R = 0$$

$$F = Mg \frac{sen\theta}{\cos\theta} = Mg tg\theta$$



Eligiendo el eje x en dirección paralela al plano inclinado, la condición para el equilibrio en esta dirección se escribe:

$$\sum F_x = F_r - Mg sen\theta + F \cos\theta = 0$$

Sustituyendo el valor de F encontrado anteriormente:

$$F_r = Mg sen\theta - F \cos\theta = Mg sen\theta - (Mg \frac{sen\theta}{\cos\theta}) \cos\theta = 0$$

Es decir, independientemente de la inclinación del plano, la fuerza de rozamiento resulta nula.

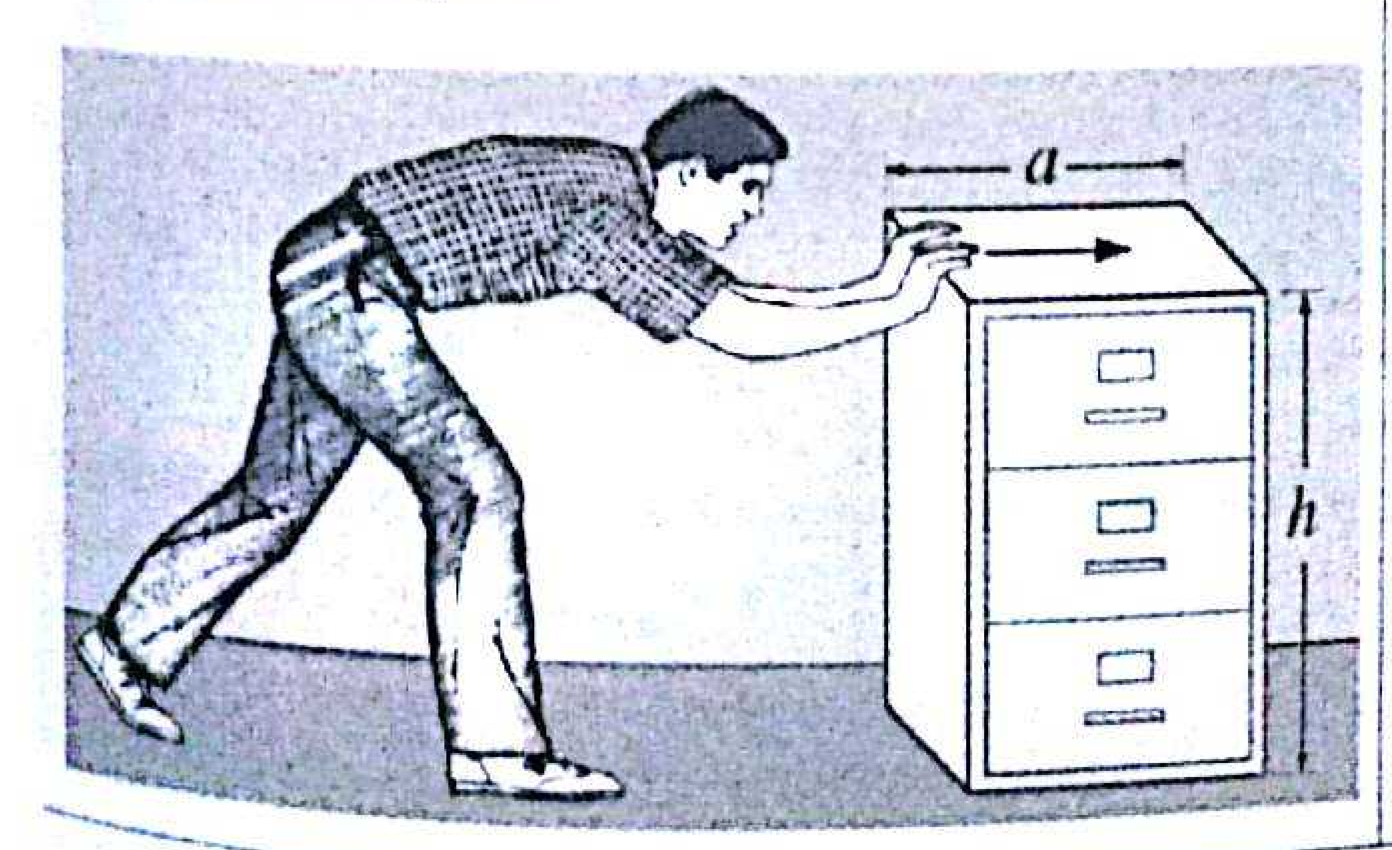
Respuesta:

$F = Mg tg\theta$

$F_r = 0$

PR-5.15. *Rodando un mueble con el menor esfuerzo*

Sea un mueble de sección rectangular, de altura h = 1 m y ancho a = 0,60 m. que tiene una masa M = 40 kg distribuida uniformemente. El mueble descansa sobre un piso horizontal y se le aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre el borde superior.

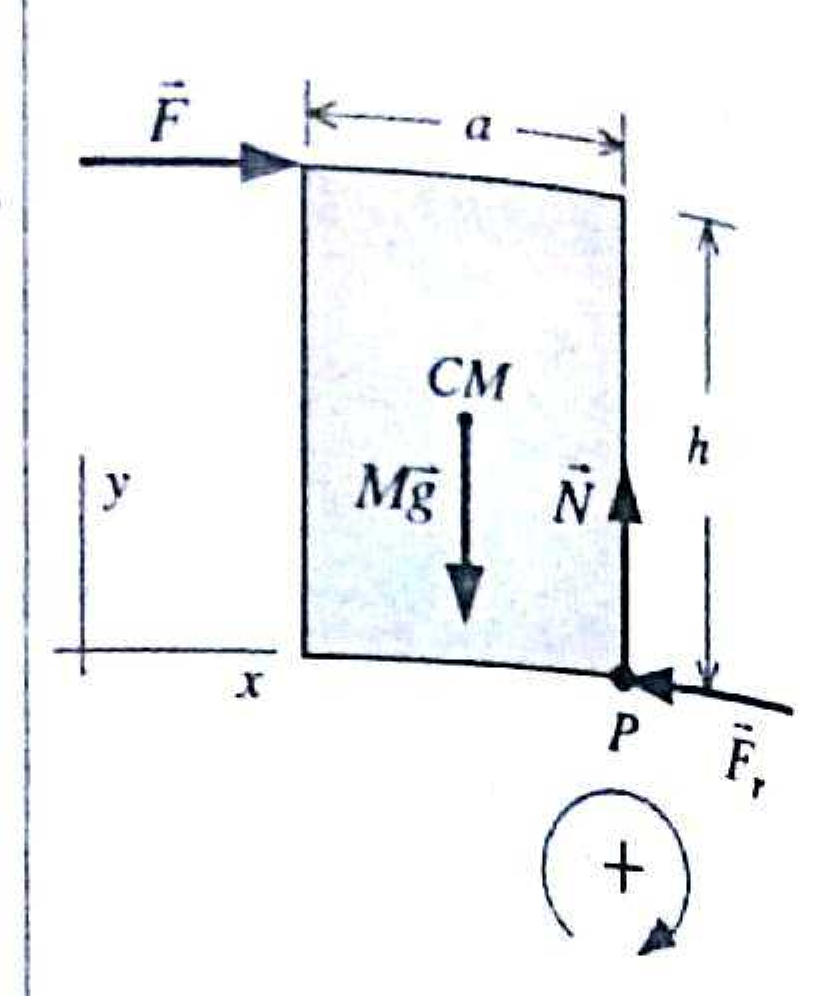


a) ¿Qué fuerza mínima se requiere para que empiece a ladearse?

b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de rozamiento estático para que al mueble se ladee con la aplicación de una fuerza de este valor?

c) ¿Habrá una manera mas eficiente de hacer "rodar" el mueble? Encuentre el módulo y la dirección de la fuerza mínima requerida para volcar el mueble si el punto de aplicación puede elegirse en cualquier parte de éste.

Solución: a) Analizaremos el mueble cuando está a punto de volcarse. Este tiende a girar en torno al borde de la derecha y es allí donde estará aplicada la fuerza de contacto con el piso (rozamiento F_r y normal N). En el equilibrio de rotación el torque neto respecto al punto P debe ser cero:



$$\sum \tau_P = Fh - Mg\frac{a}{2} = 0$$

$$F = \frac{a}{2h}Mg = \frac{0{,}6\text{m}}{2\text{x}1{,}0\text{m}}(40\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 118\text{N}$$

b) Las condiciones para el equilibrio de translación horizontal y vertical son, respectivamente:

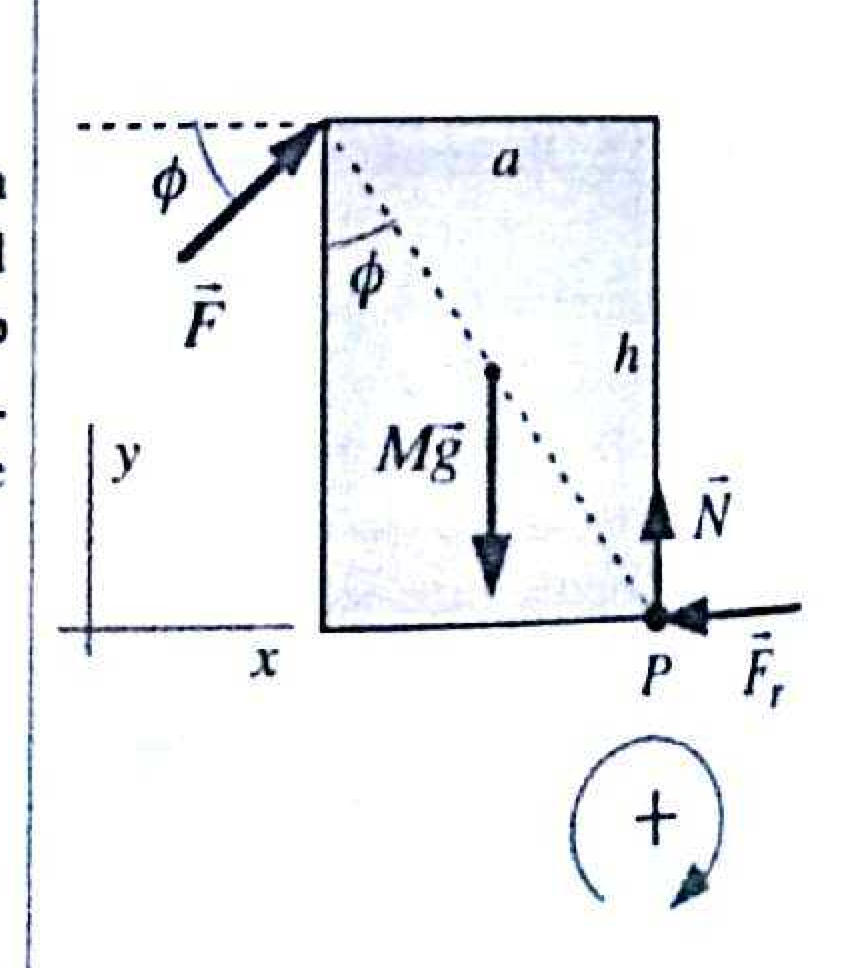
$$\sum F_x = F - F_r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_r = F$$

$$\sum F_y = N - Mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = Mg$$

Cuando está a punto de deslizar, la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo y se debe cumplir la condición crítica: $F_r = \mu_e N$. De modo que:

$$\mu_e = \frac{F_r}{N} = \frac{F}{Mg} = \frac{Mg(a/2h)}{Mg} = \frac{a}{2h} = \frac{0{,}6\text{m}}{2(1\text{m})} = 0{,}3$$

c) Se podría usar una fuerza de menor módulo si se aplica en la esquina y en una dirección tal que se aproveche el mayor brazo de palanca posible. El mayor brazo corresponde a la diagonal de la sección rectangular. Tomando torques en torno al punto P, la condición de equilibrio es:



$$\sum \tau_P = F\sqrt{h^2 + a^2} - Mg\frac{a}{2} = 0$$

$$F = \frac{Mga}{2\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{(40\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)0{,}6\text{m}}{2\sqrt{(1\text{m})^2 + (0{,}6\text{m})^2}} = 101\text{N}$$

El ángulo que forma la línea de acción de $\vec{F}$ con la horizontal es:

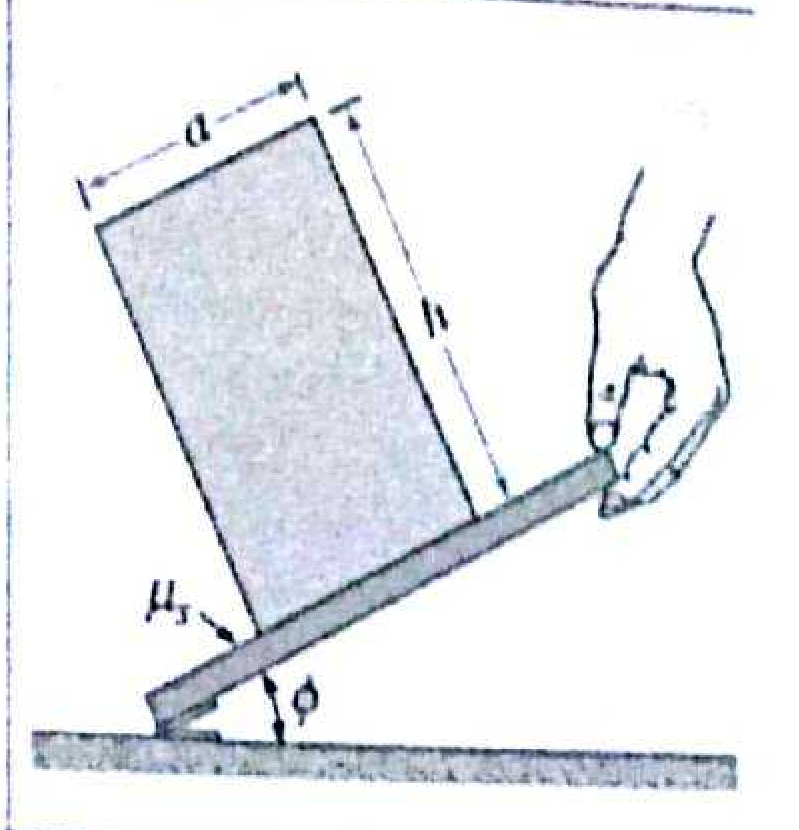
$$tg\phi = \frac{a}{h} = \frac{0{,}6\text{m}}{1\text{m}} = 0{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 31{,}0^\circ$$

Respuesta:

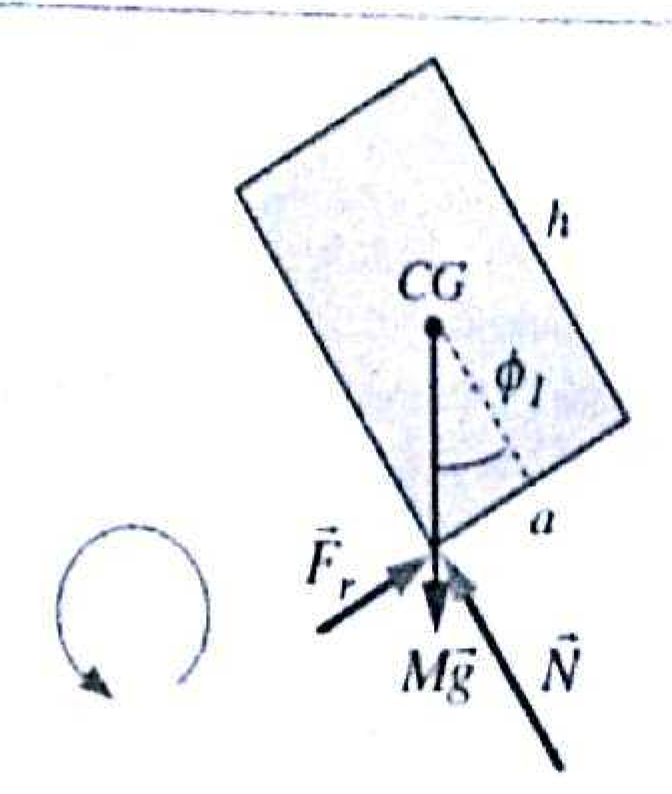
a) $F = 118\text{N}$
b) $\mu_e = 0{,}30$
c) $F = 101\text{N}$, $\phi = 31{,}0^\circ$

PR-5.16. *¿Volcará o deslizará la caja?*

Sobre una tabla inclinada se coloca una caja que tiene un ancho a = 15 cm y una altura h = 30 cm. El centro de gravedad de la caja queda en su centro geométrico. Si el ángulo de inclinación, ϕ, se va incrementando lentamente desde cero, ¿qué sucederá, volcará o deslizará la caja? Considere los siguientes casos:
a) El coeficiente de rozamiento estático es μ_s = 0,40.
b) El coeficiente de rozamiento estático es μ_s = 0,75.

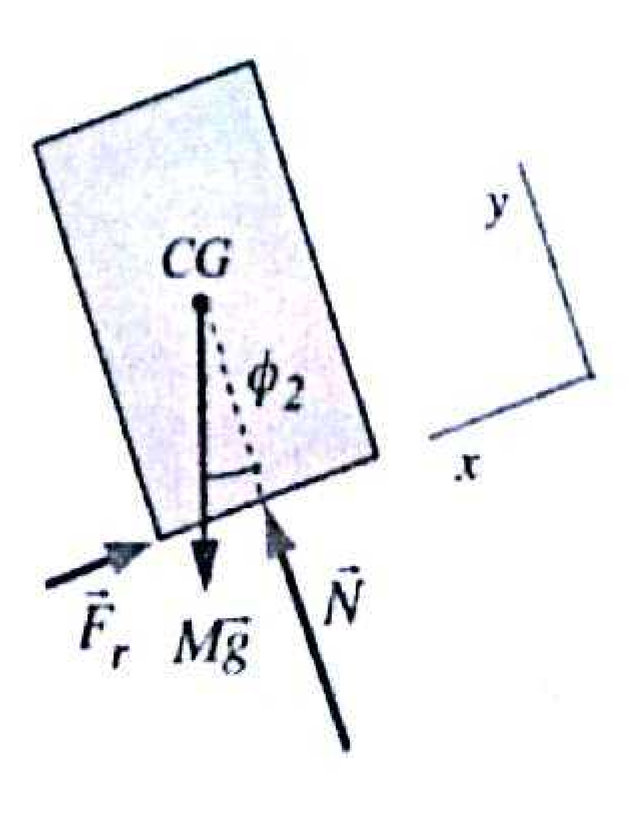


Solución: Hallaremos primero el ángulo crítico de equilibrio, ϕ_1, cuando el objeto está a punto de volcarse en torno al borde inferior izquierdo. En esta situación su centro de gravedad está ubicado en la línea vertical por encima de ese punto de contacto.



$$tg\phi_1 = \frac{a/2}{h/2} = \frac{a}{h} = \frac{15\text{cm}}{30\text{cm}} = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_1 = 26{,}6^\circ$$

Este ángulo crítico es independiente del coeficiente de rozamiento μ_s. Ahora hallaremos el ángulo crítico de equilibrio, ϕ_2, para el cual se inicia el deslizamiento. Eligiendo el eje x paralelo al plano y el eje y perpendicular al mismo, las condiciones de equilibrio son:



$$\sum F_x = Mgsen\phi_2 - F_r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_r = Mgsen\phi_2$$

$$\sum F_y = N - Mgcos\phi_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = Mgcos\phi_2$$

Eliminado Mg de este par de ecuaciones se obtiene:

$$F_r = Ntg\phi_2$$

En el ángulo crítico la fuerza alcanza su valor límite, $F_r = \mu_s N$, por lo tanto :

$$\mu_s N = Ntg\phi_2 \qquad \Rightarrow \qquad tg\phi_2 = \mu_s$$

a) Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_s = 0,40. entonces $\phi_2 = 21{,}8^\circ < \phi_1$ y tenemos deslizamiento.

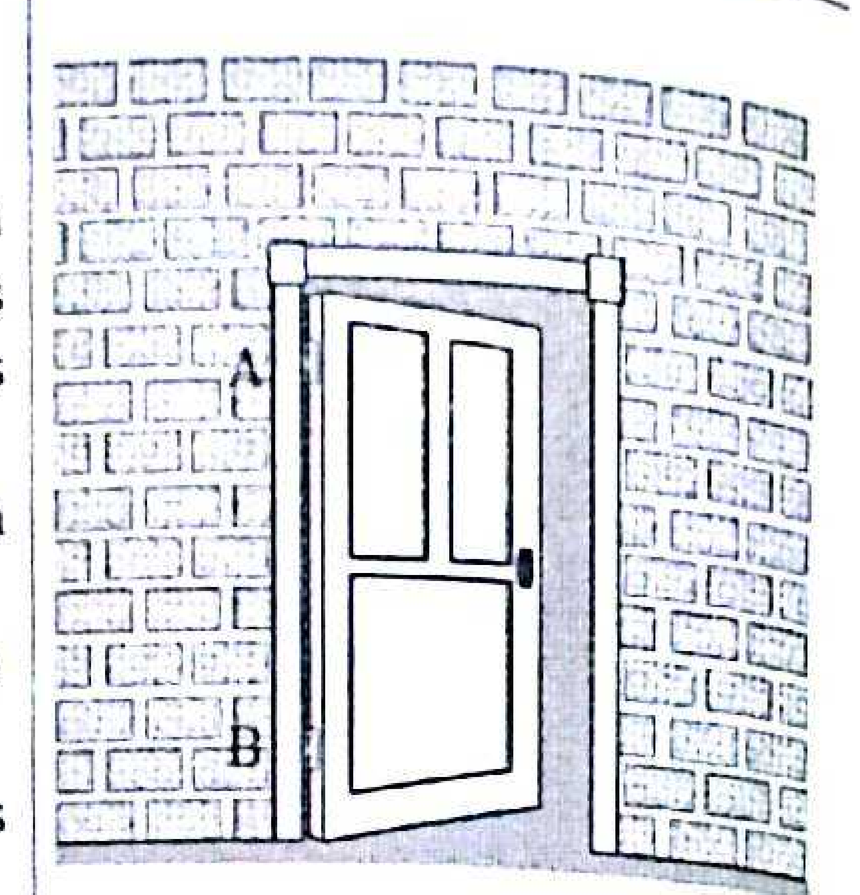
b) Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_s = 0,75, entonces $\phi_2 = 36{,}9^\circ > \phi_1$ y tenemos volcamiento.

Respuesta:

a) Si $\mu_s = 0{,}40$: $\phi_2 = 21{,}8^\circ$ (deslizamiento)
b) Si $\mu_s = 0{,}75$: $\phi_2 = 36{,}9^\circ$ (volcamiento)

PR-5.17. *Un sistema estáticamente indeterminado*

Una puerta de masa uniforme M = 20 kg, que tiene un ancho a = 1m y una altura h = 3 m, está sostenida por dos bisagras A y B, equidistantes de los extremos y separadas por una distancia d = 2,5 m.
a) ¿Cual es la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre la puerta por la bisagra A y por la bisagra B?
b) ¿Cuál es el valor de la componente vertical de la fuerza ejercida por ambas bisagras?
c) ¿Por qué no pueden determinarse las componentes verticales de la fuerza en cada bisagra individual?



Solución: Suponga que las componentes horizontales y verticales de las fuerzas ejercidas por las bisagras tienen los sentidos indicados en el diagrama de cuerpo libre de la puerta. Las ecuaciones de equilibrio traslacional son:

Horizontal: $$\sum F_x = H_A + H_B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -H_B \qquad (1)$$

Vertical: $$\sum F_y = V_A + V_B - Mg = 0 \qquad (2)$$

Tomando torques respecto al CG de la puerta:

$$\sum \tau_{CG} = H_A \frac{d}{2} - H_B \frac{d}{2} + V_A \frac{a}{2} + V_B \frac{a}{2} = 0 \qquad (3)$$

Si sustituimos en esta ecuación, $H_A = -H_B$ de la ecuación (1) y $V_A + V_B = Mg$, de la ecuación (2), se tiene:

$$-2H_B d + Mga = 0$$

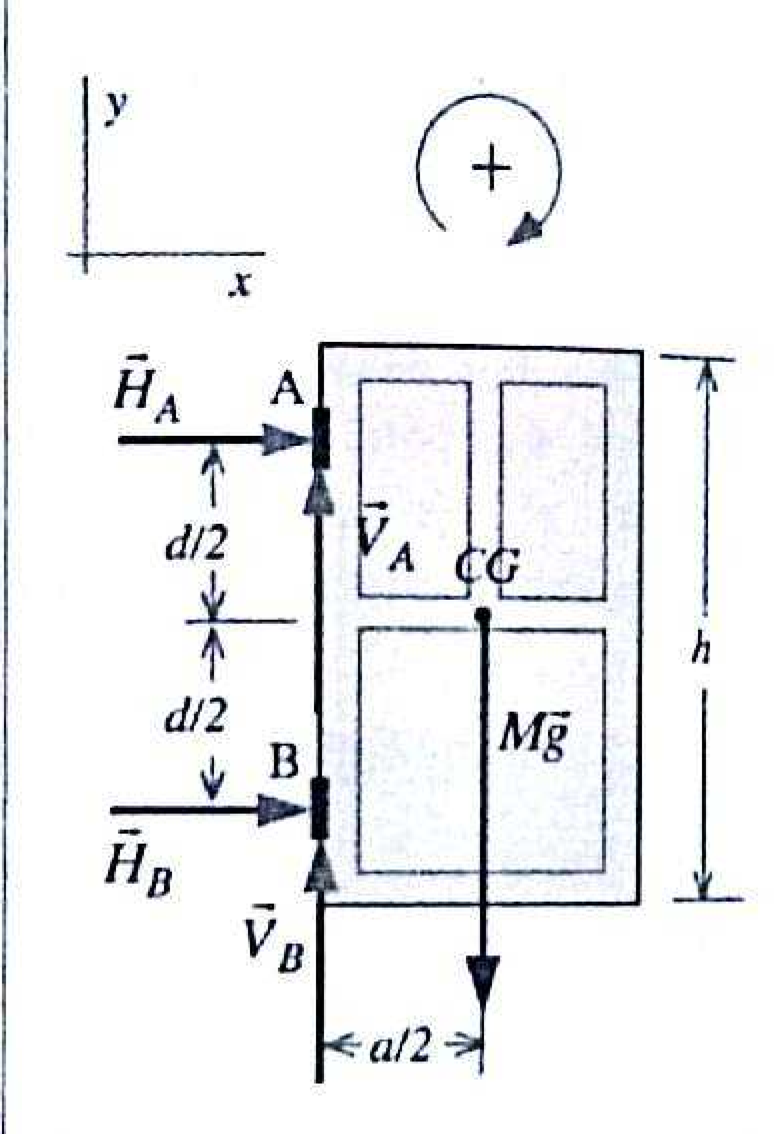
$$H_B = \frac{a}{2d} Mg = \frac{1\text{m}}{2\text{x}2{,}5\text{m}}(20\text{kg}\text{x}9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 39{,}2\text{N}$$

$$H_A = -H_B = -\frac{a}{2d} Mg = -39{,}2\text{N}$$

La suma de las fuerzas verticales de las bisagras es:

$$V_A + V_B = Mg = 20\text{kg}\text{x}9{,}8\text{m/s}^2 = 196\text{N}$$

c) Aquí tenemos cuatro incógnitas (H_A, H_B, V_A y V_B) y solo tres ecuaciones independientes. Las fuerzas verticales está distribuidas y no pueden ser determinadas individualmente porque tienen la misma línea de acción y el mismo torque respecto a cualquier eje.



Respuesta:

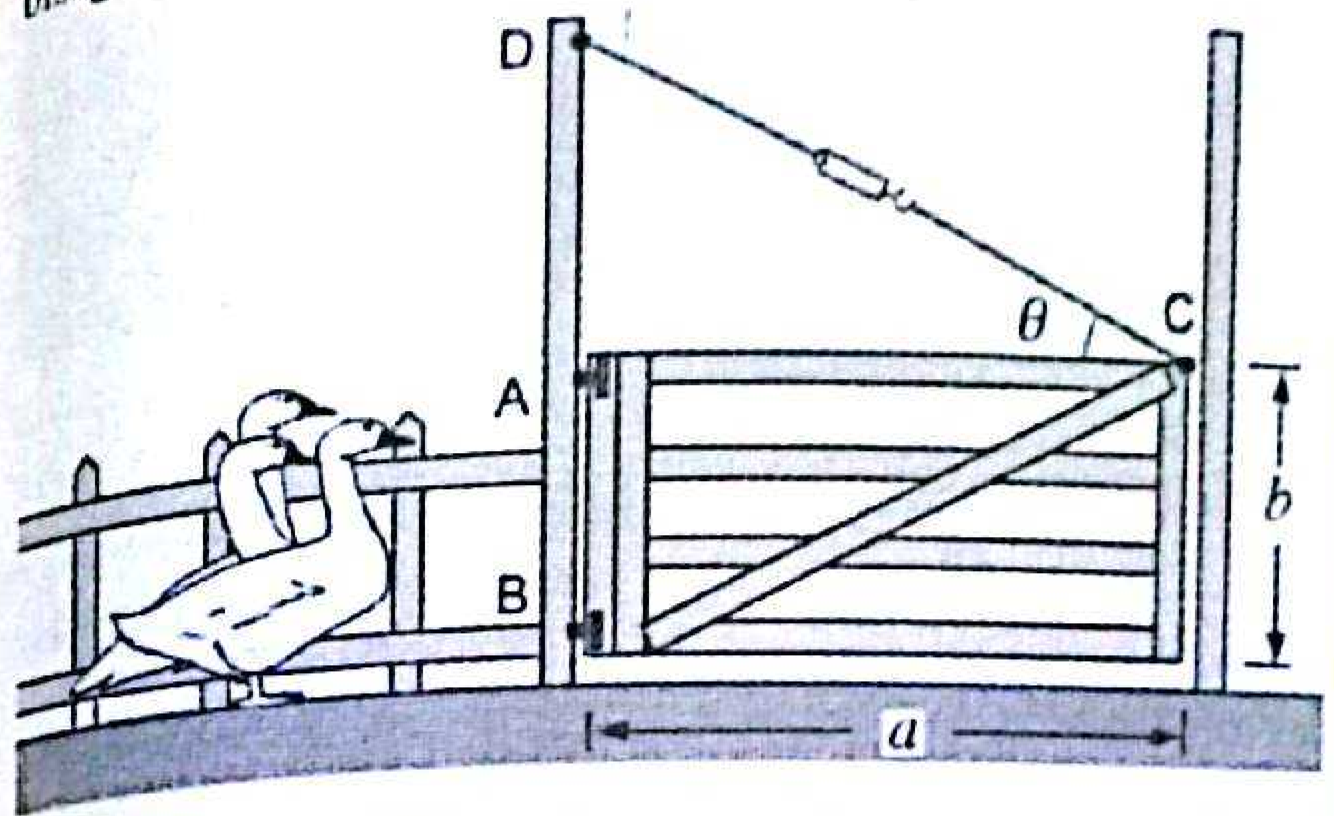
a) $H_A = -\frac{a}{2d} Mg = -39{,}2\text{N}$

$H_B = \frac{a}{2d} Mg = 39{,}2\text{N}$

b) $V_A + V_B = Mg = 196\text{N}$

PR-5.18. *Fuerzas en la puerta del corral de una granja*

Una puerta de ancho a = 2,4 m y altura b = 1,2 m con bisagras A y B está sujeta mediante el alambre CD.



El peso total de la puerta es Mg = 300 N y su centro de gravedad queda en su centro geométrico. El alambre forma un ángulo θ = 30° con la horizontal y está provisto de un tensor que permite ajustar la tensión hasta que la fuerza horizontal en la bisagra superior, A, sea cero. Determine:
a) La tensión T del alambre CD.
b) La fuerza horizontal sobre la bisagra inferior B.
c) La fuerza vertical combinada de ambas bisagras.

Solución: a) Para hallar la tensión del alambre tomamos torques respecto al punto B.

$$\sum \tau_B = Mg\frac{a}{2} - T_x(b) - T_y(a) + V_A(0) + V_B(0) + H_B(0) = 0$$

$$Mg\frac{a}{2} - Tb\cos\theta - Ta\,sen\theta = 0$$

$$T = \frac{Mg}{2} \frac{a}{b\cos\theta + a\,sen\theta}$$

$$T = \frac{300\text{N}}{2}\left(\frac{2{,}4\text{m}}{1{,}2\text{m}\cos 30° + 2{,}4\text{m}\,sen 30°}\right) = 161\text{N}$$

b) Para hallar la fuerza horizontal sobre la bisagra inferior aplicamos la condición de equilibrio horizontal:

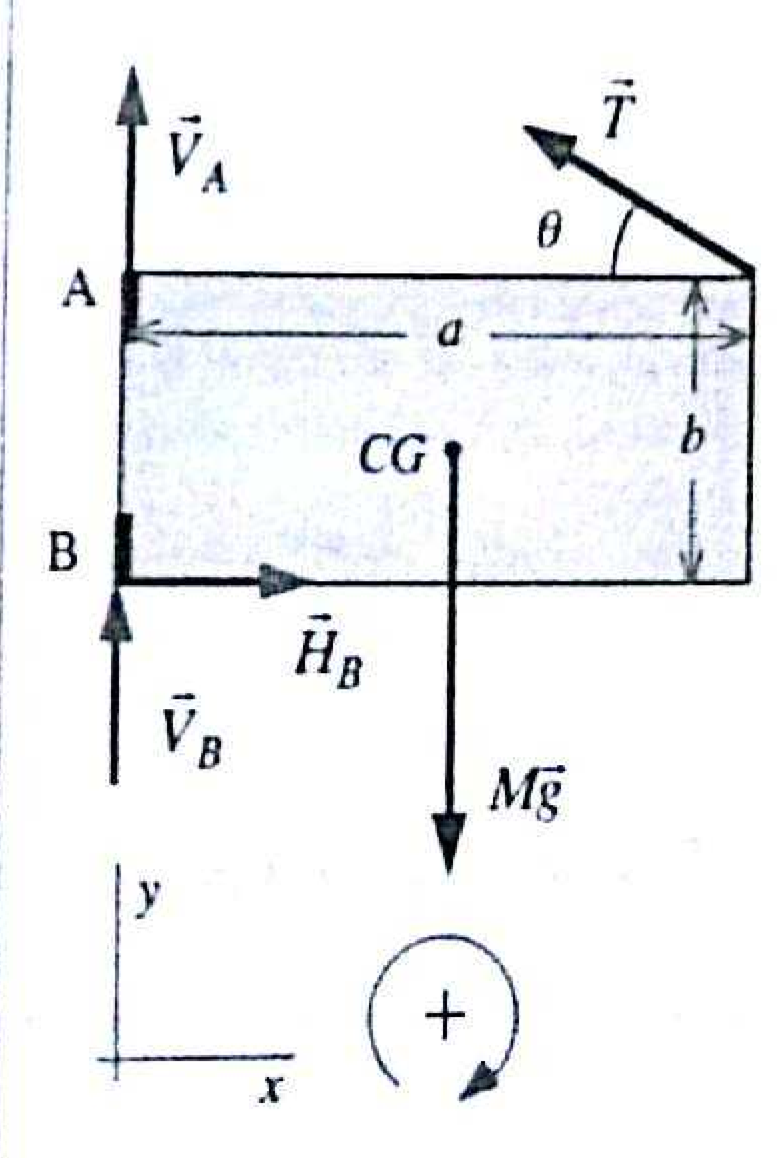
$$\sum F_x = H_B - T\cos\theta = 0$$

$$H_B = T\cos\theta = 161\text{N}\cos 30° = 139\text{N}$$

c) Para hallar la fuerza vertical combinada sobre ambas bisagras aplicamos la condición de equilibrio vertical:

$$\sum F_y = V_A + V_B + T\,sen\theta - Mg = 0$$

$$V_A + V_B = Mg - T\,sen\theta = 300\text{N} - 161\text{N}\,sen 30° = 220\text{N}$$

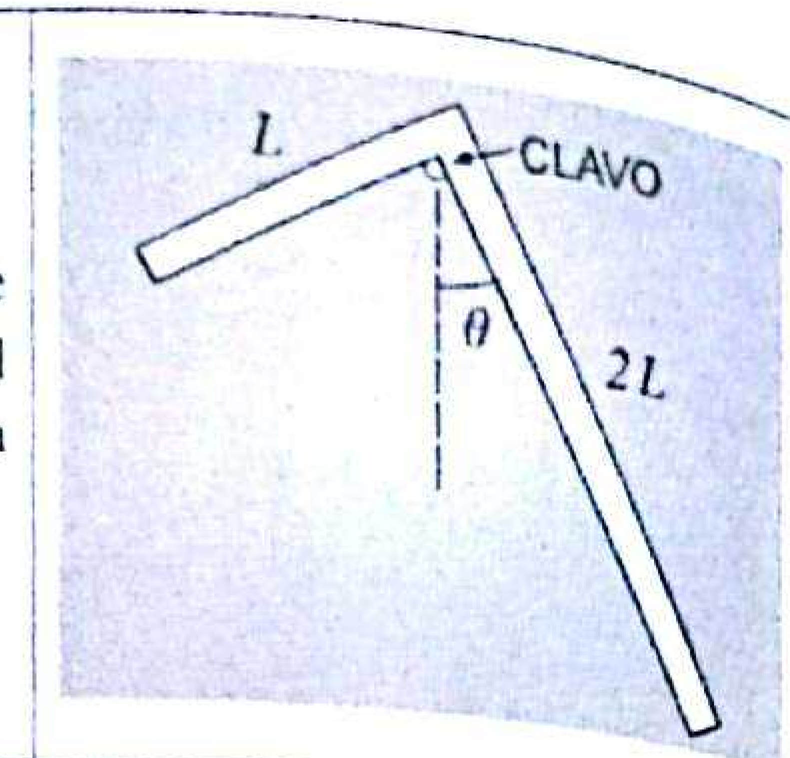


Respuesta:

a) $T = 161\text{N}$
b) $H_B = 139\text{N}$
c) $V_A + V_B = 220\text{N}$

PR-5.19. *Una escuadra suspendida por un clavo*

Un escuadra con brazos delgados de longitudes L y $2L$ se suspende mediante un clavo en la pared. ¿Cuál será el ángulo θ que forma el lado suspendido con la línea vertical?



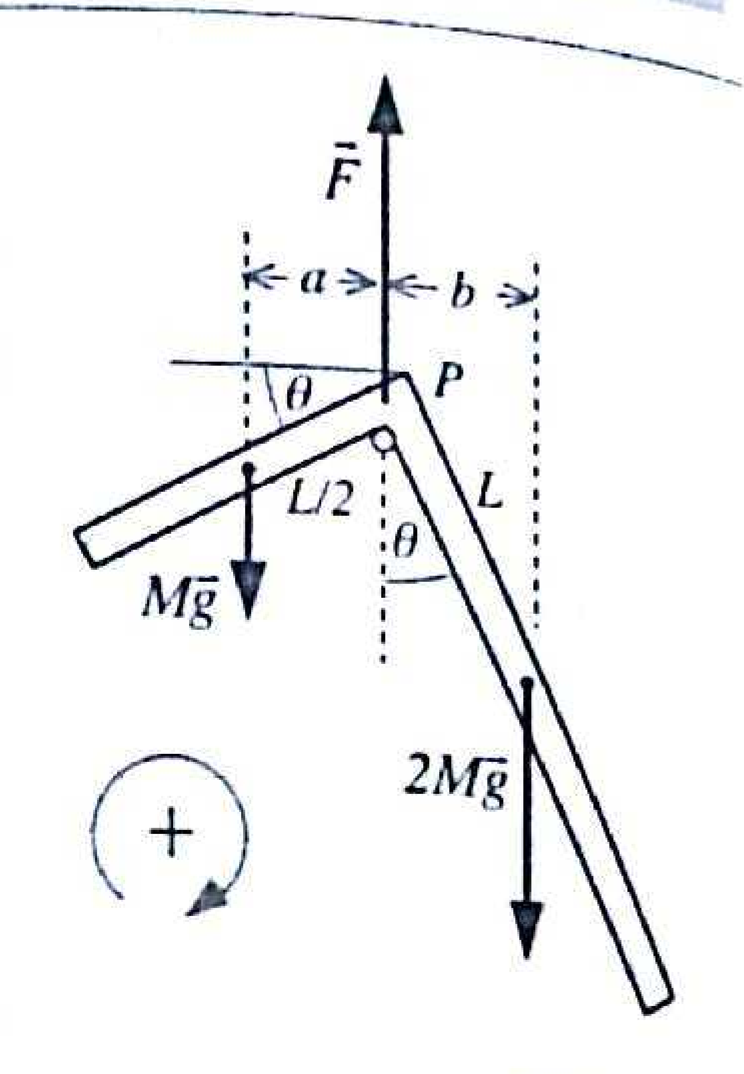
Solución: Se divide la escuadra en dos partes: el lado mas corto, de longitud L y peso Mg y el lado mas largo, de longitud $2L$ y peso $2Mg$. Tomando torques en torno al punto P del clavo, la ecuación de equilibrio de rotación es:

$$\sum \tau_P = 2Mgb - Mga = 0$$

$$2Mg(L sen\theta) - Mg(\frac{L}{2}cos\theta) = 0$$

Por lo tanto, el ángulo θ que forma el lado largo de la escuadra con la línea vertical es:

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 14°$$



Respuesta:

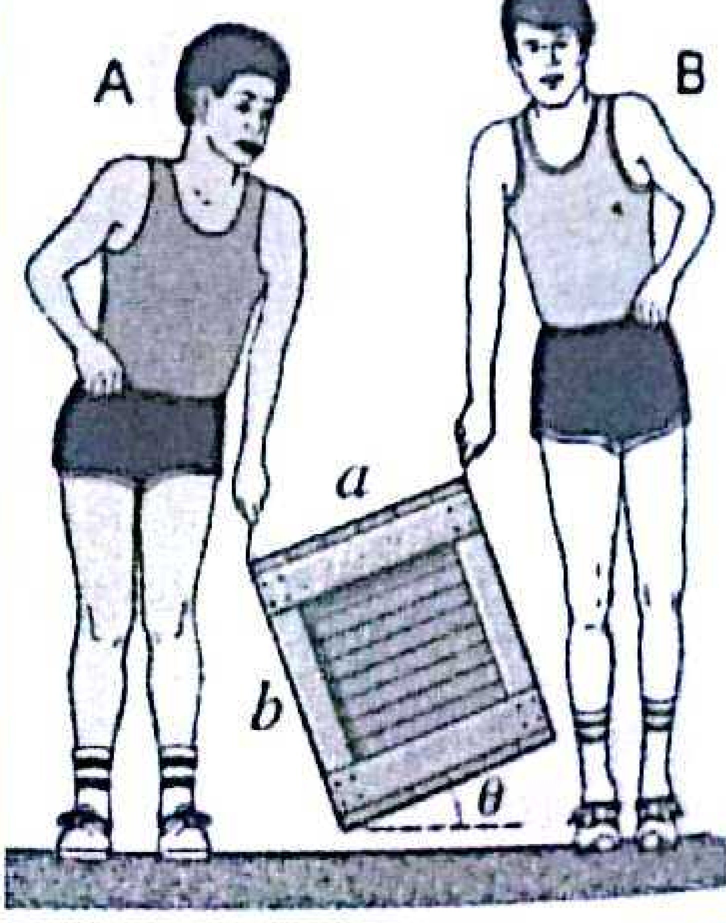
θ = arctang (1/4) = 14°

PR 5.20. *¿Quién soporta más peso?*

Dos estudiantes de distinta estatura, A y B, trasladan un cajón suspendido mediante cuerdas verticales, de forma tal que el cajón queda en equilibrio a un ángulo de inclinación con la horizontal, θ = 30°. El cajón tiene dimensiones a = 60 cm y b = 80 cm y su peso es Mg = 500 N. Suponga que el centro de masa del cajón está en su centro geométrico.

a) Determine la fuerza que aplica cada estudiante.

b) Si el ángulo fuera $\theta = 0°$, ¿cómo se repartirían las dos fuerzas?



Solución: En el siguiente diagrama de cuerpo libre se indican las fuerzas aplicadas sobre el cajón en esa posición.

Todas las fuerzas son verticales y la ecuación de equilibrio es:

$$\sum F_y = F_A + F_B - Mg = 0 \qquad (1)$$

La ecuación para el equilibrio de rotación, la escribimos tomando los torques con respecto al centro de gravedad (CG) del cajón

$$\sum \tau_{CG} = F_A r_A - F_B r_B = 0 \qquad (2)$$

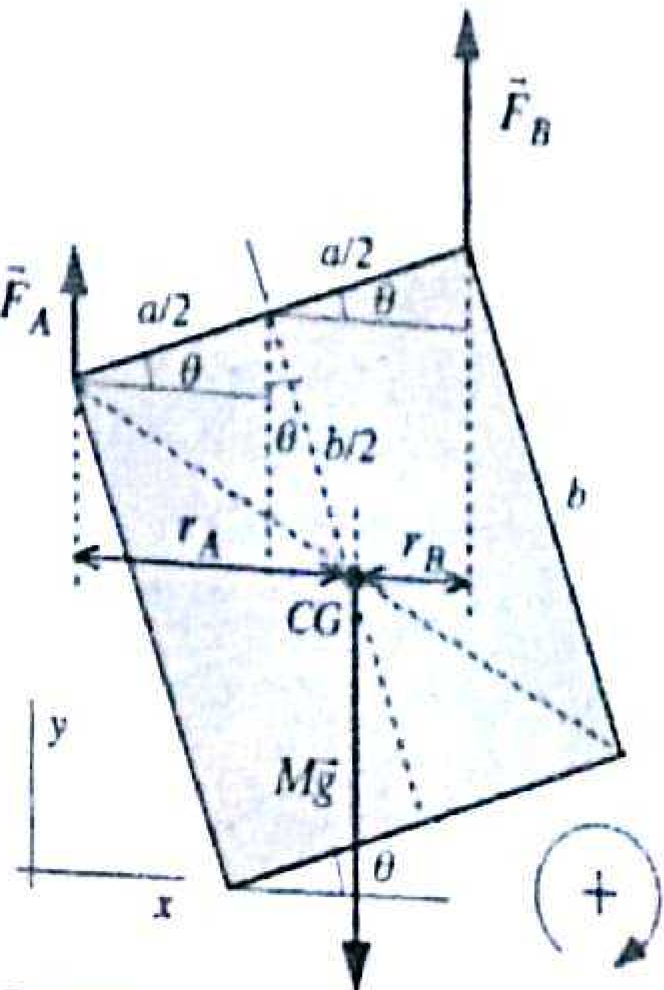


Diagrama de cuerpo libre del cajón

Si multiplicamos la expresión (1) por r_A y le restamos la ecuación (2), encontramos:

$$F_B = (\frac{r_A}{r_A + r_B})Mg$$

$$F_A = \frac{r_B}{r_A}F_B = (\frac{r_B}{r_A + r_B})Mg$$

Los brazos respectivos de las fuerzas, r_A y r_B se determinan empleando el diagrama mostrado:

$$r_A = \frac{a}{2}cos\theta + \frac{b}{2}sen\theta \qquad r_B = \frac{a}{2}cos\theta - \frac{b}{2}sen\theta$$

Sustituyendo, se obtienen las expresiones para las fuerzas:

$$F_A = \frac{1}{2}(1 - \frac{b}{a}tg\theta)Mg$$

$$F_A = (1 - \frac{0{,}8m}{0{,}6m}tg30°)\frac{500N}{2} = 57{,}5N$$

$$F_B = \frac{1}{2}(1 + \frac{b}{a}tg\theta)Mg$$

$$F_B = (1 + \frac{0{,}8m}{0{,}6m}tg30°)\frac{500N}{2} = 442N$$

b) Si $\theta = 0$, entonces $tg\theta = 0$ y las expresiones de las fuerzas resultan:

$$F_B = F_A = \frac{1}{2}Mg = \frac{500N}{2} = 250N$$

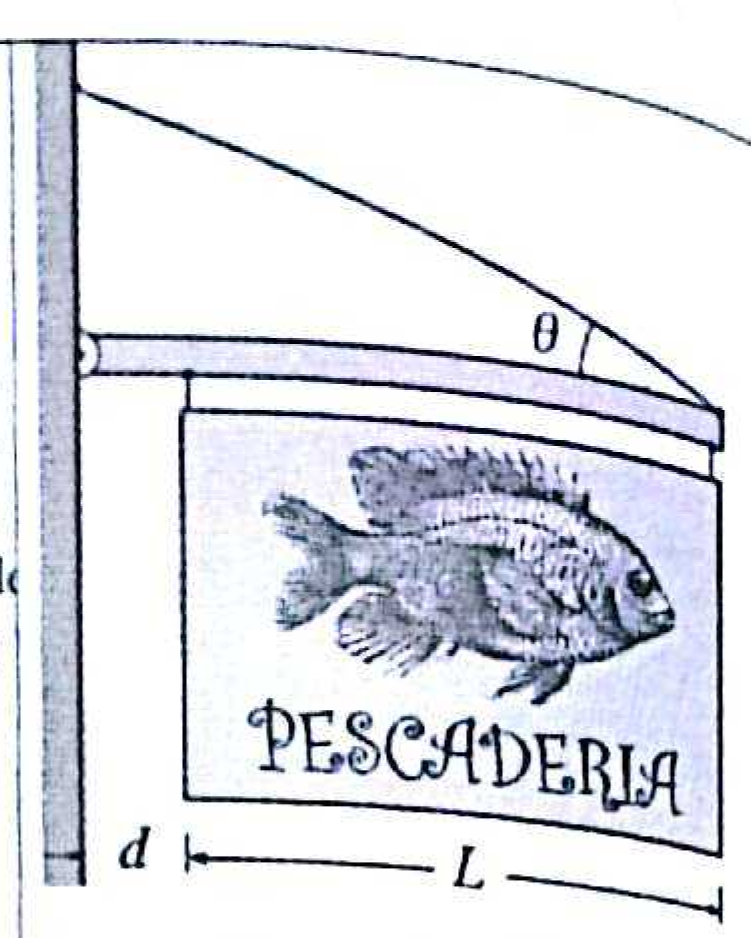
Como era de esperar, si el cajón estuviese horizontal, el peso de 500 N se repartiría por igual entre los dos estudiantes.

Respuesta

a) Si $F_A = 57{,}5N$, $F_B = 442{,}5N$

b) Si $\theta = 0$: $F_B = F_A = 250N$

PR-5.21. *Fuerzas en un aviso colgante*

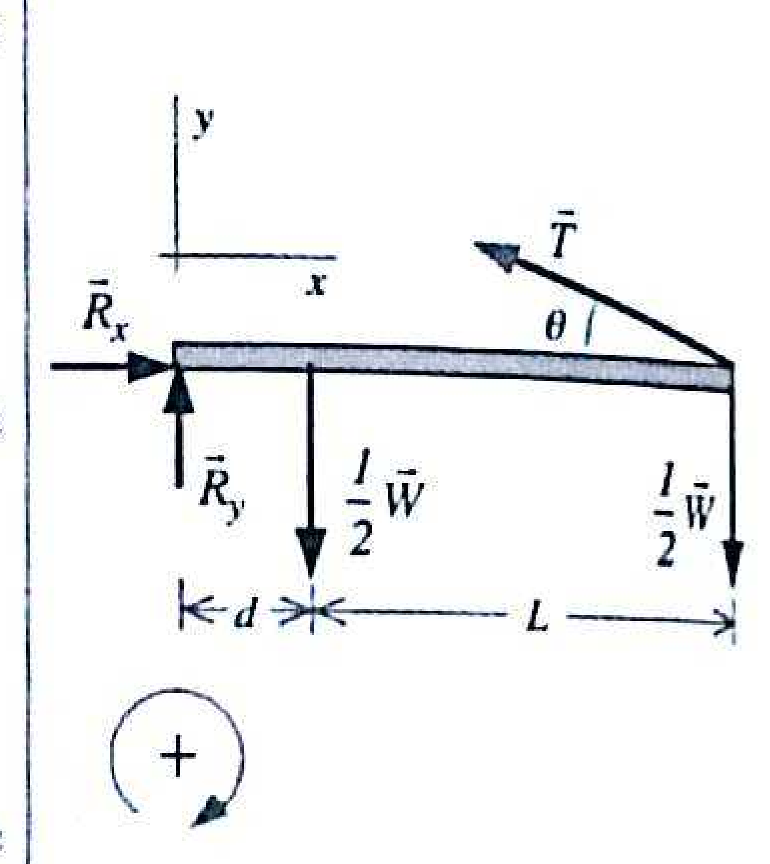


Un cartel rectangular y uniforme de peso W = 300 N y ancho L = 2,5 m cuelga de una viga ligera horizontal. La viga se sostiene articulada en la pared mediante un perno y en su extremo sostenida por una cuerda que forma un ángulo $\theta = 36{,}9°$ con la horizontal. El cartel se suspende mediante dos hilos, uno colocado en el extremo y el otro a distancia d = 0,5 m de la pared. Determine:

a) La tensión en la cuerda.

b) La fuerza de reacción de la pared sobre la viga.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre la viga están indicadas en el diagrama de cuerpo libre. El cartel es uniforme y ejerce sobre la viga dos fuerzas verticales iguales, $W/2$, por los hilos de suspensión. Un eje conveniente para aplicar la condición de equilibrio rotacional es el que pasa por el pivote en la pared:



$$\sum \tau_P = \frac{W}{2}d + \frac{W}{2}(d+L) - Tsen\theta(L+d) = 0$$

De este modo, no aparecen las incógnitas R_x y R_y en la ecuación y podemos despejar la tensión T de la cuerda:

$$T = \frac{d + L/2}{(L+d)sen\theta}W = \frac{0{,}5\text{m} + 2{,}5\text{m}/2}{(2{,}5\text{m} + 0{,}5\text{m})\text{sen}30°}200\text{N} = 233\text{N}$$

Aplicando la condición de equilibrio horizontal se obtiene la componente horizontal de la fuerza de reacción de la pared sobre la viga, R_x:

$$\sum F_x = R_x - T\cos\theta = 0$$

$$R_x = T\cos\theta = \frac{d + L/2}{(L+d)tg\theta}W = 202\text{N}$$

Aplicando la condición de equilibrio vertical, se obtiene R_y:

$$\sum F_y = R_y + Tsen\theta - 2\frac{W}{2} = 0$$

$$R_y = W - Tsen\theta = \frac{W}{2}\frac{L}{(L+d)} = 83{,}3\text{N}$$

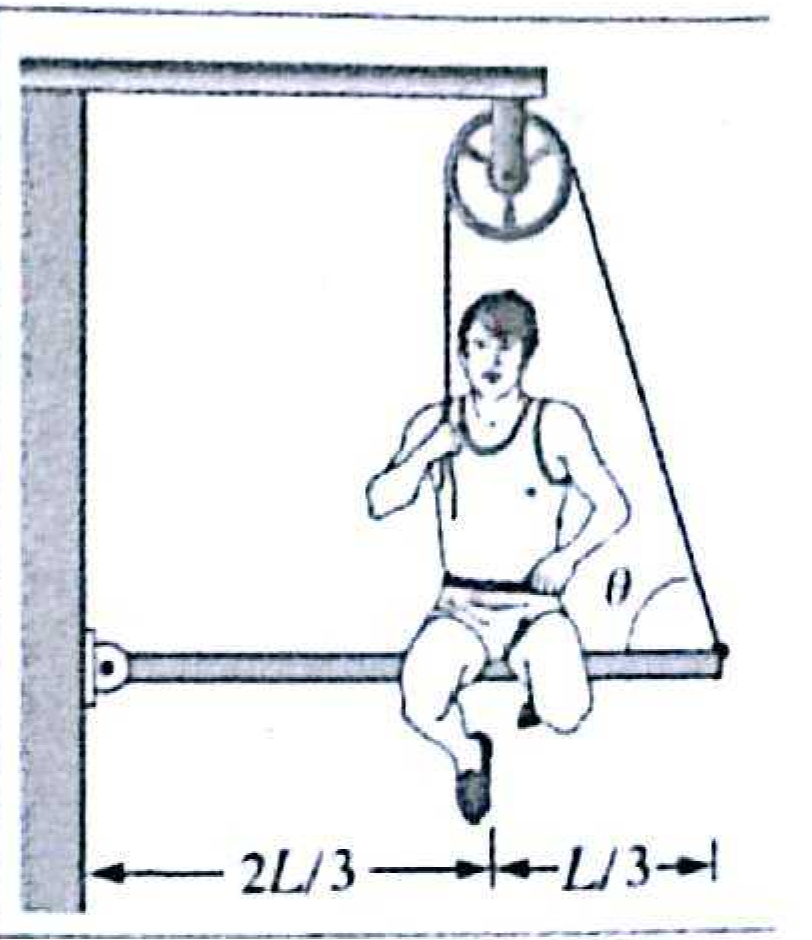
Respuesta:

a) $T = \dfrac{d + L/2}{(L+d)sen\theta}W = 233\text{N}$

b) $R_x = \dfrac{d + L/2}{(L+d)tg\theta}W = 202\text{N}$

$R_y = \dfrac{W}{2}\dfrac{L}{(L+d)} = 83{,}3\text{N}$

PR-5.22. *Fuerza ejercida para sostener su propio peso*

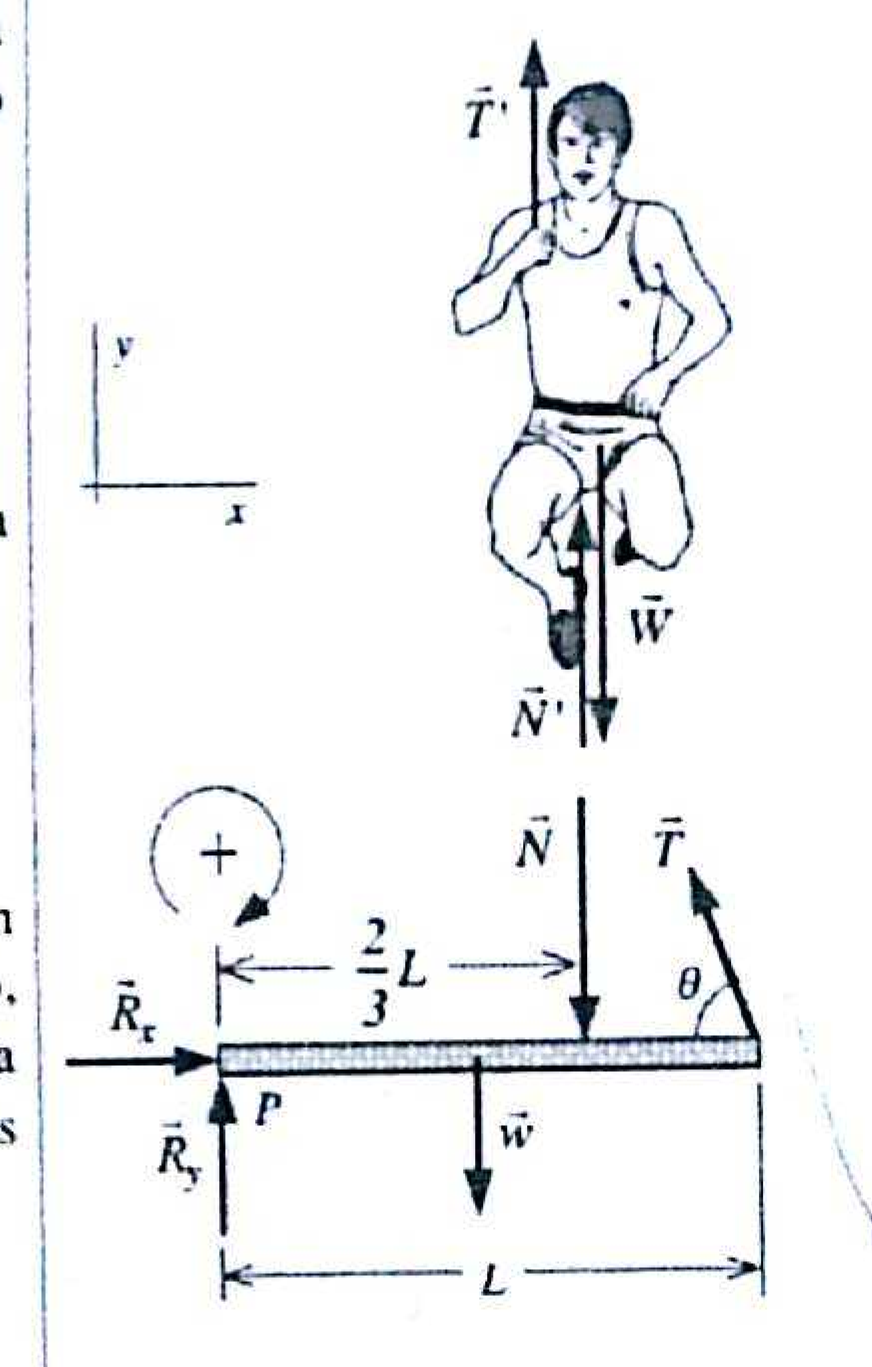


Un alumno está sentado sobre un tablón de longitud L, sosteniéndolo en forma horizontal por una cuerda que pasa alrededor de una polea. La cuerda está unida al extremo del tablón y forma con éste un ángulo $\theta = 53{,}1°$. El alumno cuyo peso es W = 700 N está sentado a una distancia $2L/3$ de la articulación del tablón. El peso del tablón es w = 200 N. Determine:

a) La tensión de la cuerda

b) La fuerza de apoyo del alumno sobre el tablón.

Solución: Considerando el diagrama de cuerpo libre del tablón, tomamos torques respecto al pivote P. De esta manera, en la ecuación de equilibrio de rotación no aparecen las dos fuerzas $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$, que son incógnitas:



$$\sum \tau_P = w\frac{L}{2} + N\frac{2L}{3} - TLsen\theta = 0 \qquad (1)$$

Según el diagrama de cuerpo libre del alumno, la condición para el equilibrio vertical es:

$$\sum F_y = T' + N' - W = 0 \qquad (2)$$

Las fuerzas de contacto entre el alumno y el tablón constituyen un par acción-reacción y por ello, $|\vec{N}'| = |\vec{N}| = N$. Además, el módulo de la tensión de la cuerda es constante, $|\vec{T}| = |\vec{T}'| = T$. Podemos escribir las ecuaciones anteriores:

Tablón: $\dfrac{w}{2} + \dfrac{2}{3}N = Tsen\theta$

Persona: $W - N = T$

Resolviendo este par de ecuaciones y sustituyendo los datos de las constantes, encontramos:

$$T = \frac{3w + 4W}{4 + 6sen\theta} = 387\text{N}$$

$$N = \frac{6Wsen\theta - 3w}{4 + 6sen\theta} = 313\text{N}$$

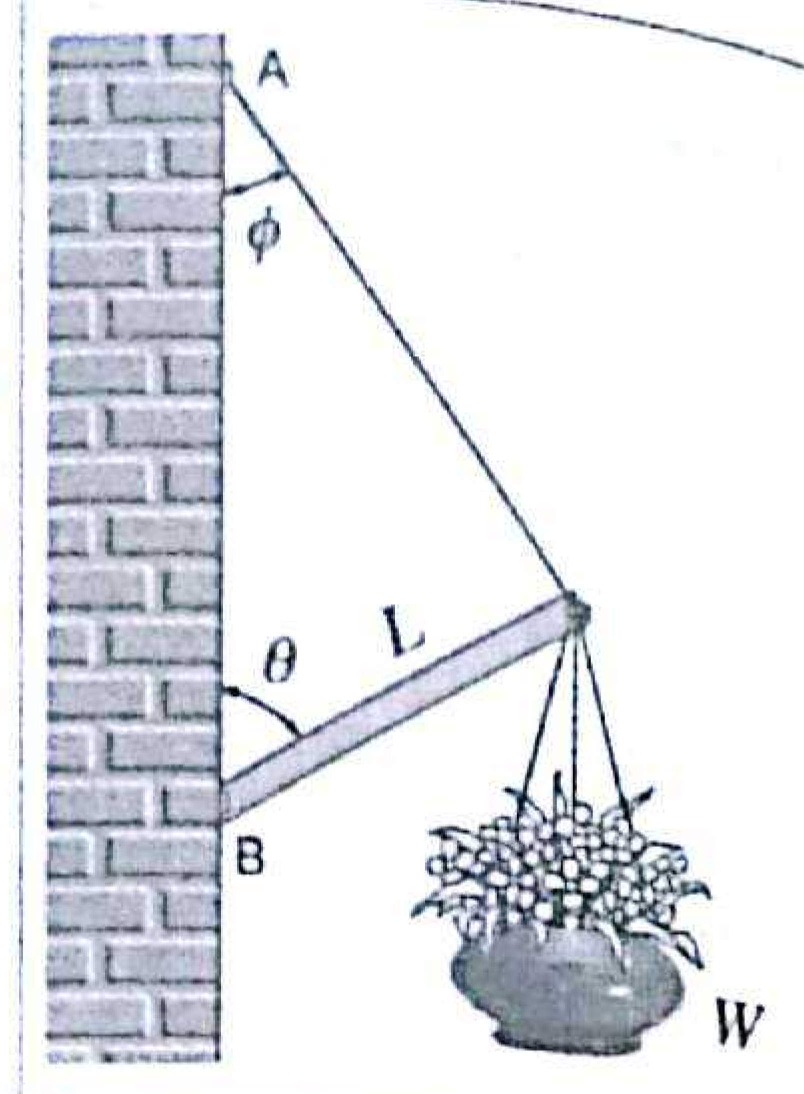
Respuesta:

a) T = 387 N,

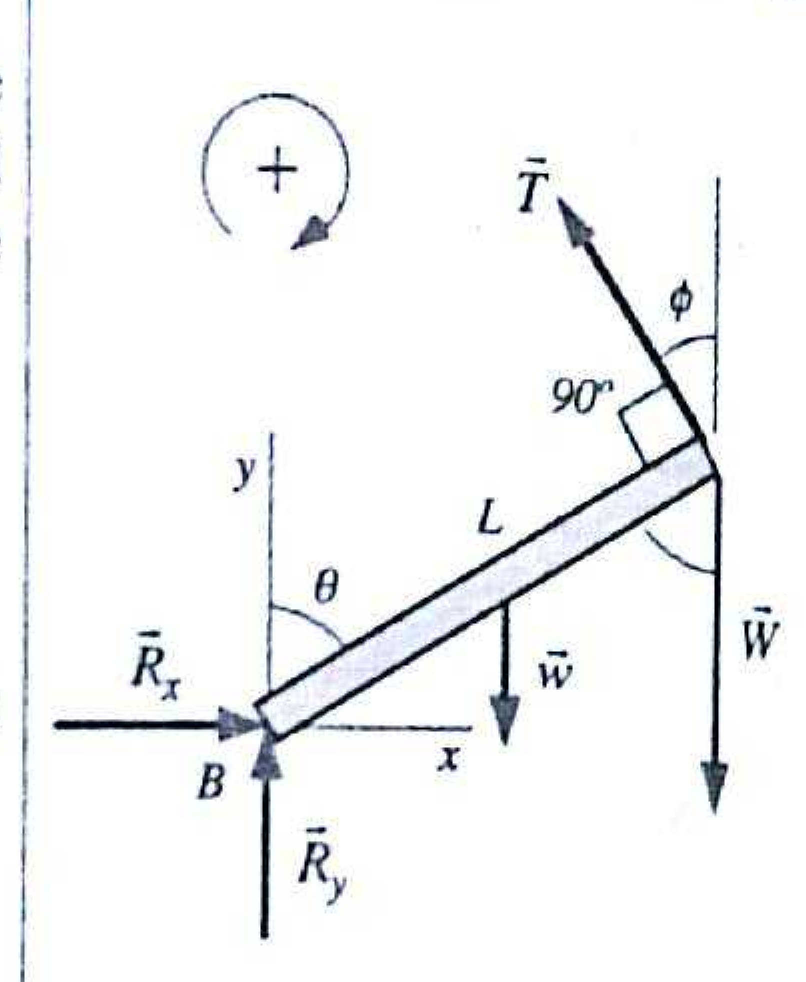
b) N = 313 N

PR-5.23. *Matero suspendido de una pared*

Una barra homogénea de longitud L cuyo peso es w = 25 N se encuentra fija a una pared vertical apoyada por un extremo y suspendida en el otro extremo por una cuerda. Un matero cuyo peso es W = 50 N se suspende del extremo de la barra de forma tal que el ángulo de la cuerda con la pared es $\phi = 36{,}9^\circ$ y el ángulo de la barra con la pared es $\theta = 53{,}1^\circ$. Determine las fuerzas ejercidas en los puntos A y B de soporte en la pared.



Solución: Considerando el diagrama de cuerpo libre de la barra y tomando un eje de rotación que pasa por el punto B de apoyo, podemos escribir la condición de equilibrio de rotación:



$$\sum \tau_B = w\frac{L}{2}sen\theta + WLsen\theta - TL = 0$$

La fuerza que ejerce sobre la pared en el punto A es justamente la tensión T de la cuerda:

$$T = (\frac{w}{2} + W)sen\theta = (\frac{25N}{2} + 50N)sen53{,}1^\circ = 50N$$

La componente horizontal de la fuerza en el apoyo B, se encuentra a partir de la condición de equilibrio horizontal:

$$\sum F_x = R_x - Tsen\phi = 0$$

$$R_x = Tsen\phi = (\frac{w}{2} + W)sen\theta sen\phi = 30N$$

La componente vertical de la fuerza en el apoyo B, se encuentra a partir de la condición de equilibrio vertical:

$$\sum F_y = R_y + Tcos\phi - w - W = 0$$

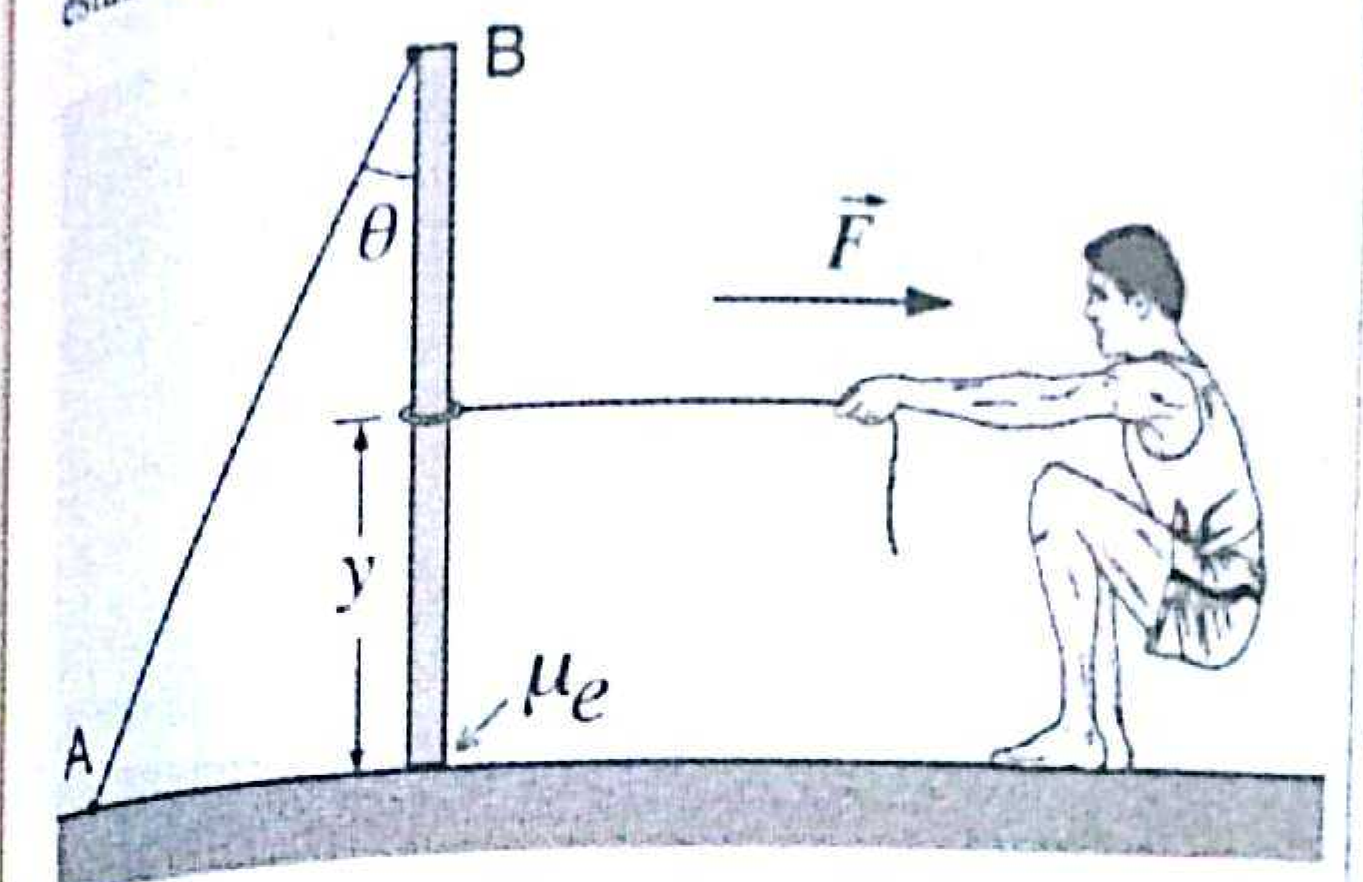
$$R_y = w + W - Tcos\phi = 35N$$

Respuesta:

$T = 50N$
$R_x = 30N, R_y = 35N$

PR-5.24. *Es curioso: A ciertas alturas el poste deslizará*

Un poste de altura h, cuyo peso es W = 1000 N se mantiene vertical sobre un piso con coeficiente de fricción estática $\mu_e = 0.30$.



La parte superior del poste está amarrada al piso mediante una cuerda que forma un ángulo θ = 36.9° con la vertical. Una persona jala con una fuerza horizontal $\vec{F}$ por un punto ubicado a la altura y.

a) Si $y = h/2$, ¿cuál será el valor mayor de F para que el poste no deslice?

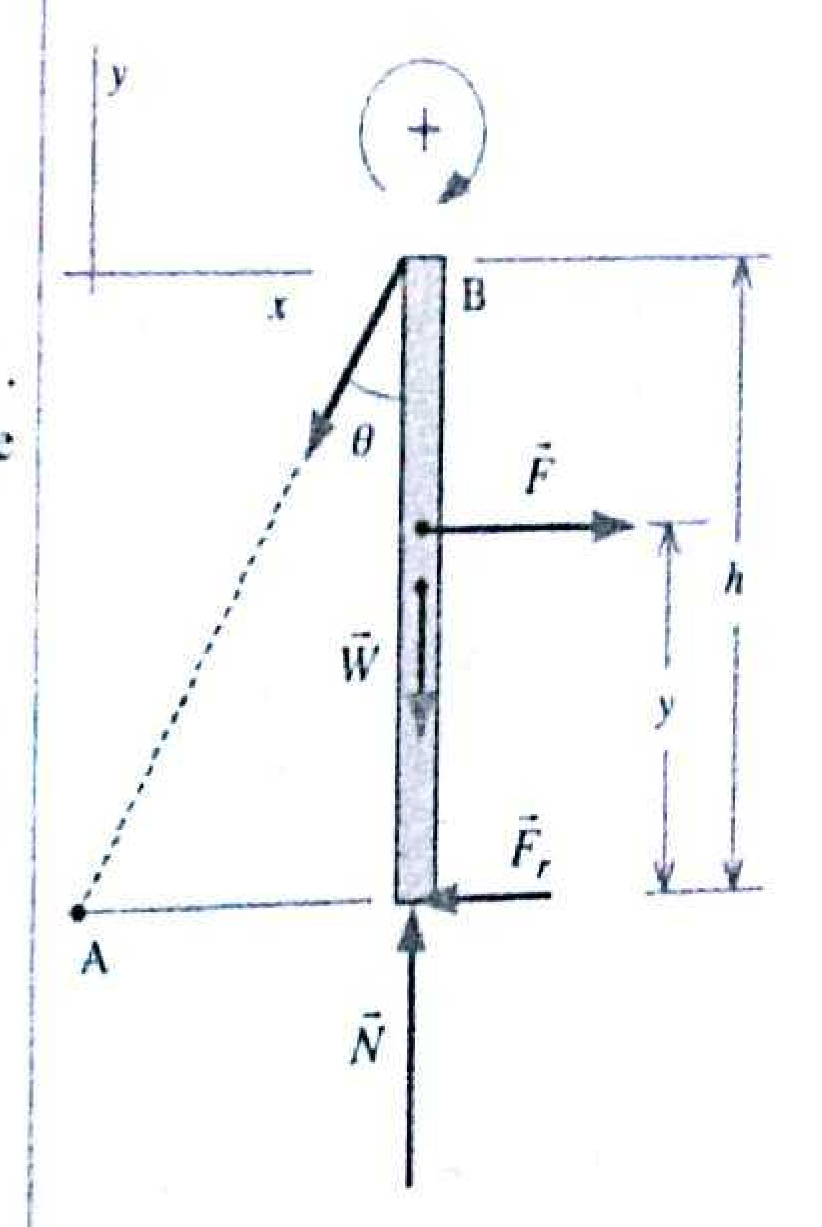
b) ¿Cuál es la altura y máxima a partir de la cual el poste siempre deslizará, cualquiera sea el valor de F?

Solución: Tomando torques en torno al punto A, la condición de equilibrio es:

$$\sum \tau_A = Fy - (N - W)htg\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{y}{htg\theta}F + W$$

Tomando torques en torno al punto B, la condición de equilibrio es:

$$\sum \tau_B = F_r h - F(h - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_r = (\frac{h - y}{h})F$$



El valor límite de la fuerza de roce es: $F_r \le \mu_e N$. Sustituyendo las expresiones de F_r y N, en términos de F, tenemos:

$$(\frac{h - y}{h})F \le \mu_e(\frac{y}{htg\theta}F + W) \quad \Rightarrow \quad F \le \frac{\mu_e W}{(1 - \frac{y}{h}) - \frac{y}{h}\frac{\mu_e}{tg\theta}}$$

Si la fuerza es aplicada a la altura $y = h/2$, entonces:

$$F \le \frac{2\mu_e W}{1 - \mu_e / tg\theta} = \frac{2(0{,}3)(1000N)}{1 - 0{,}3/tg36{,}9^\circ} = 1000N$$

b) Hallemos ahora , la altura y a partir de la cual el poste siempre deslizará, cualquiera sea el valor de F.

La fuerza requerida sería infinita y en este caso el denominador en la expresión obtenida de F es cero.

$$(1-\frac{y}{h})=\frac{y}{h}\frac{\mu_e}{tg\theta}$$

$$y_{max}=\frac{tg\theta}{\mu_e+tg\theta}h=\frac{tg36,9^o}{0,3+tg36,9^o}h=0,715h$$

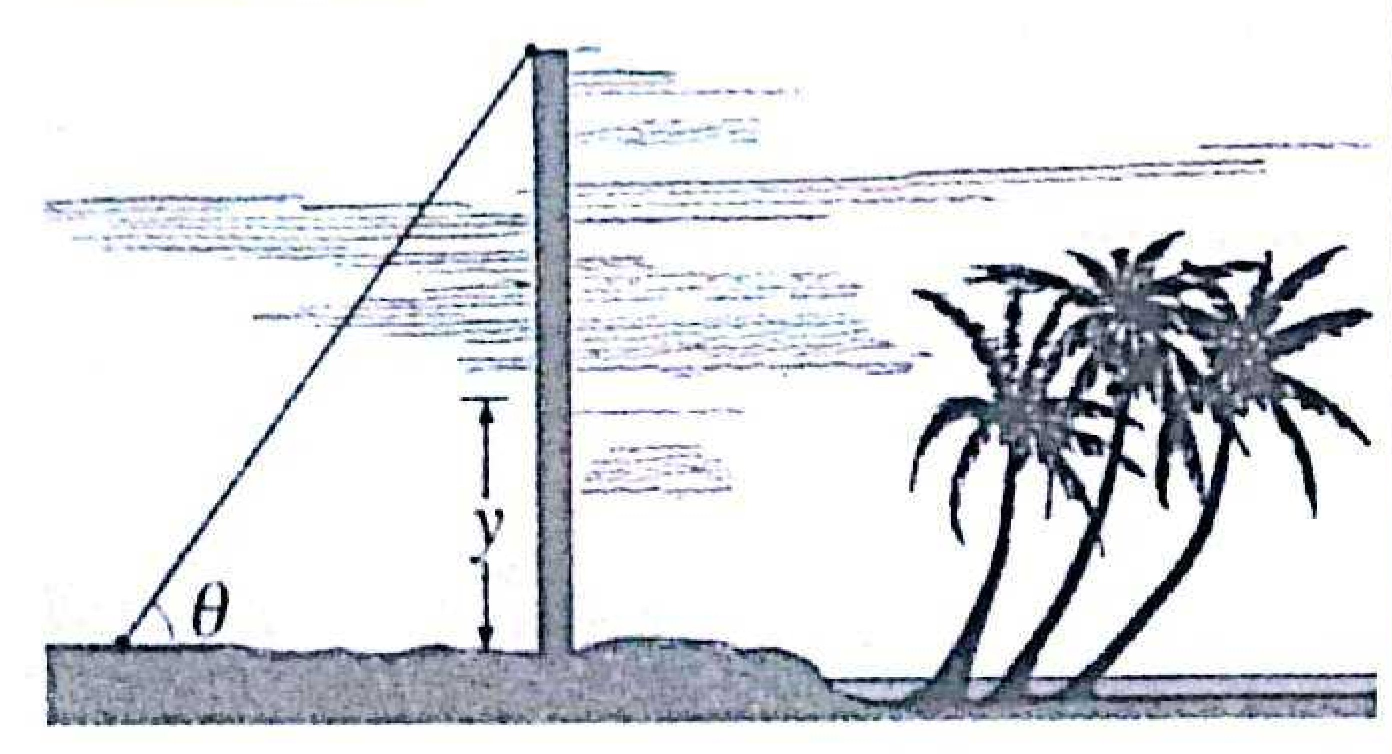
Respuesta

a) $F_{max}=\dfrac{2\mu_e W}{1-\mu_e/tg\theta}=1000N$

b) $y_{max}=\dfrac{tg\theta}{\mu_e+tg\theta}h=0,715h$

PR-5.25. *Fuerza variable del viento sobre una torre*

La torre de una antena de altura L = 30 m está a la orilla del mar sujeta por un cable que forma un ángulo θ = 60° con la horizontal.



Un viento sopla constantemente ejerciendo una fuerza horizontal, tal que la "fuerza por unidad de longitud" es proporcional a la altura y:

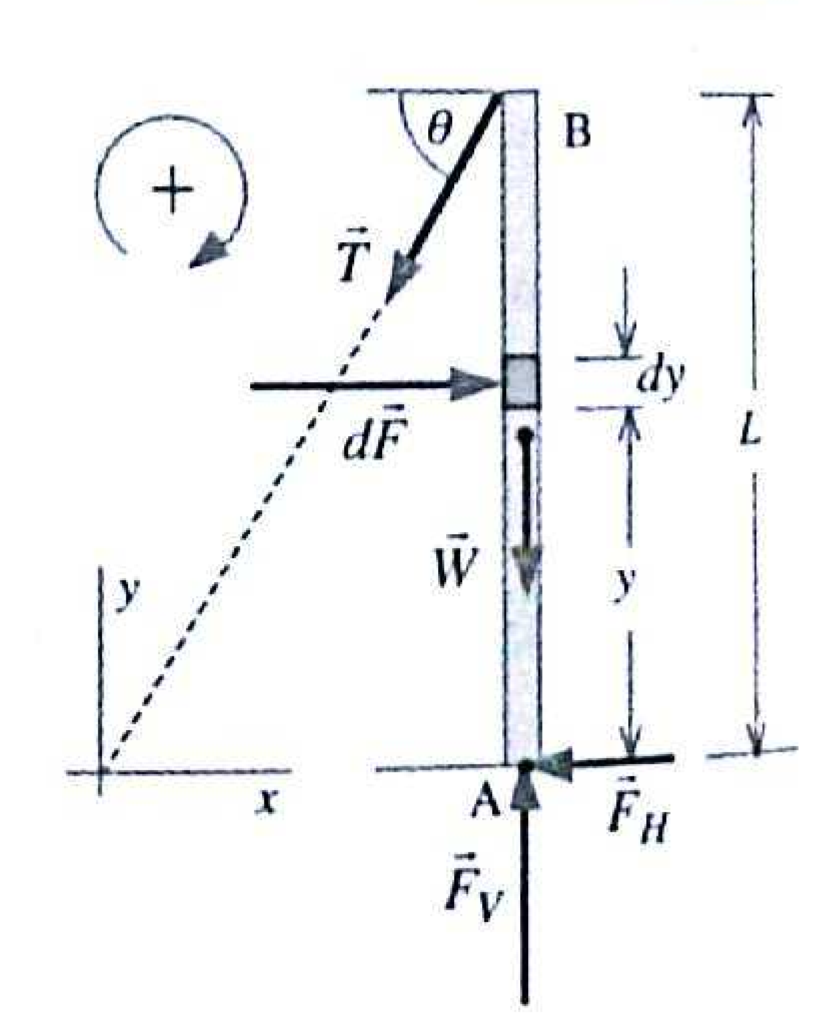
$$Fuerza/longitud = Ay$$

Donde y se mide en metros y la constante de proporcionalidad es A = 25 N/m². ¿Cuál es la tensión del cable?

Solución: Como la fuerza del viento es variable, dividimos la torre en elementos de longitud dy a una altura y, sobre el cual la fuerza es $dF = Aydy$. Para aplicar la condición de equilibrio rotacional, calculamos los torques sobre la torre respecto al punto A de apoyo con el suelo:

$$\sum\tau_A=\int_0^L ydF-TLcos\theta=0$$

$$TLcos\theta=\int_0^L ydF=\int_0^L yAydy=\frac{1}{3}Ay^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}AL^3$$



Despejando, encontramos el valor de la tensión del cable:

$$T=\frac{AL^2}{3cos\theta}=\frac{(25N/m^2)(30m)^2}{3cos60^o}=1,5x10^4N$$

Respuesta:

$$T=\frac{AL^2}{3cos\theta}=1,5x10^4N$$

PR-5.26. *¿Hasta dónde podrá trepar por la escalera?*

Sea una escalera de longitud L y peso w = 300 N. Una alumna coloca la escalera sobre el piso, cuyo coeficiente de rozamiento estático es μ_e = 0,40, y la apoya sobre una pared vertical lisa, formando un ángulo θ = 60° con la horizontal. El peso de la alumna es W = 600 N.

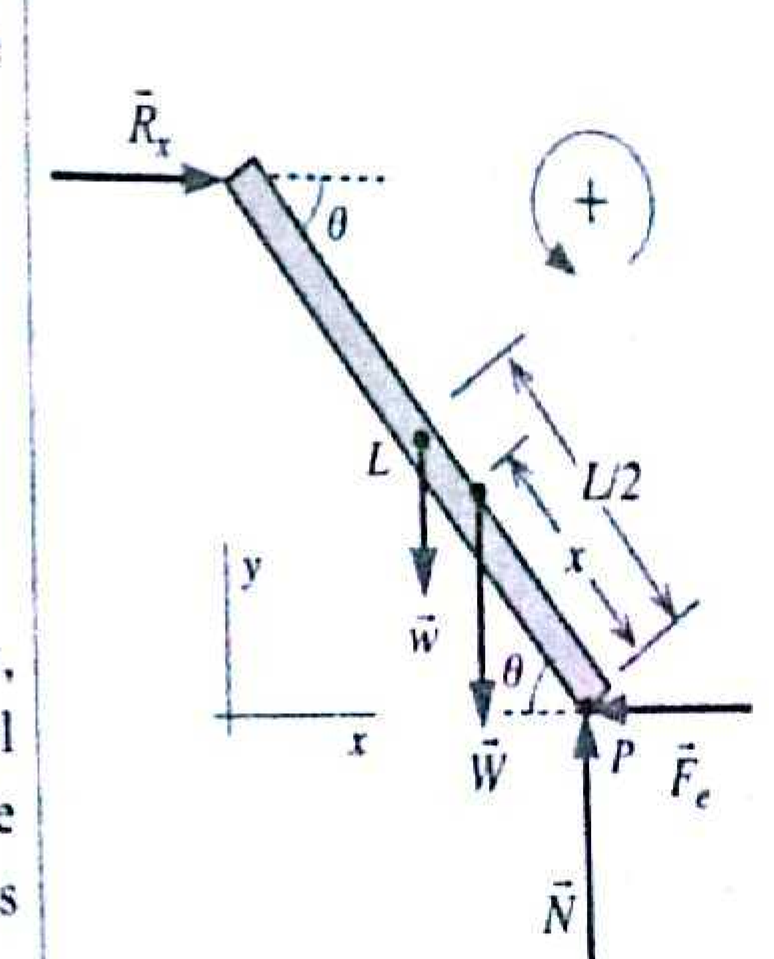
a) ¿Si ella sube por la escalera, qué distancia podrá recorrer antes que la escalera empiece a deslizar?

b) ¿Qué sucede si ambas superficies, el piso y la pared, presentan rozamiento?

Solución: En el diagrama de cuerpo libre se indican las fuerzas sobre la escalera: Su peso $\vec{w}$, la de la persona $\vec{W}$, la del suelo, que tiene una componente normal $\vec{N}$ y una horizontal de rozamiento estático $\vec{F}_r$, y la fuerza horizontal $\vec{R}_x$ ejercida por la pared. Esta no posee rozamiento y su fuerza vertical es nula. Para equilibrio de translación:

$$\sum F_y=N-w-W=0 \quad\Rightarrow\quad N=w+W$$

$$\sum F_x=R_x-F_e=0 \quad\Rightarrow\quad R_x=F_e$$



Para aplicar la condición de equilibrio de translación, elegimos el punto P de contacto entre la escalera y el suelo, porque de esta manera las fuerzas $\vec{F}_r$ y $\vec{N}$, que actúan sobre ese punto, no figurarán en la ecuación de los torques:

$$\sum\tau_P=w\frac{L}{2}cos\theta+Wxcos\theta-R_xLsen\theta=0$$

$$x=(\frac{R_x}{W}tg\theta-\frac{w}{2W})L$$

A medida que la alumna sube, se incrementa R_x y también $F_e = R_x$. Pero la fuerza de rozamiento estático con el piso está limitada.

$$R_x(max)=F_e(max)=\mu_e N=\mu_e(w+W)$$

Por lo tanto, la distancia de ascenso máximo de la alumna para la cual puede mantenerse en equilibrio es:

$$x_{max} = [\mu_e(\frac{w}{W}+1)tg\theta - \frac{w}{2W}]L$$

$$x_{max} = [0{,}40(\frac{300N}{600N}+1)tg60^{\circ} - \frac{300N}{2(600N)}]L = 0{,}789\ L$$

b) Para el caso usual de una escalera con rozamiento tanto en el piso como en la pared, uno podría estar tentado a *suponer* que la relación límite $F_e \le \mu_e N$ se alcanza en forma *simultánea* en ambos superficies. Esta sería una suposición un tanto arbitraria porque nada nos garantiza la simultaneidad de las dos condiciones críticas. En realidad, el problema es *estáticamente indeterminado* y no puede resolverse usando solo las condiciones de equilibrio, pues la estructura ya no puede considerarse como perfectamente rígida. Para poder determinar todas las fuerzas que actúan sería necesario tener información adicional, por ejemplo, de cómo se flexiona la escalera.

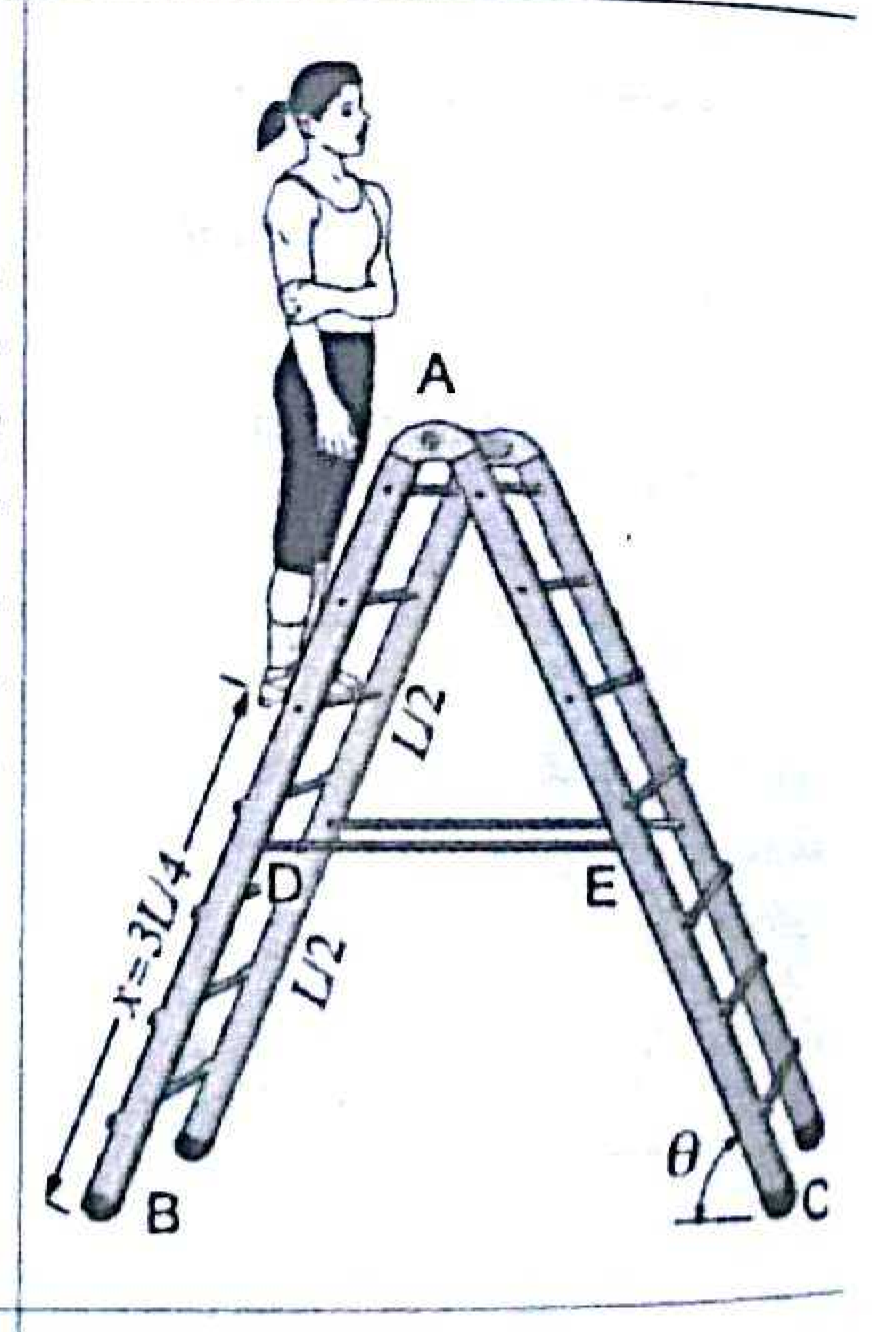
Respuesta

a) $x_{max} = 0{,}789\ L$
b) Sistema estáticamente indeterminado

PR-5.27. *La escalera del tipo tijera es mas segura*

Sea una escalera simétrica que consta de dos partes de igual longitud L, fabricada de un material resistente y liviano. Las dos partes están enlazadas por la varilla DE en el punto medio y están unidas en la parte mas alta por una articulación, A. La escalera descansa sobre el suelo pulido (sin rozamiento), formando cada parte un ángulo $\theta = 71{,}5^{\circ}$ con la horizontal. Una persona de peso W está encima de la escalera a una distancia $x = 3L/4$ desde el apoyo en el suelo. Determine:

a) Las reacciones de vínculo en los puntos de apoyo.
b) La tensión en la varilla de enlace, DE.



Solución: Consideramos por separado los diagramas de cuerpo libre para las dos partes de la escalera. Como no hay rozamiento, las fuerzas ejercidas por el suelo: $\vec{N}_B$ y $\vec{N}_C$ son normales. También notamos que la fuerza sobre el lado izquierdo y sobre el lado derecho son de igual módulo, $F_A = F_A'$ e igualmente, para la barra de enlace se cumple, $T = T'$. Tomaremos el eje de rotación en la articulación A para los torques.

Las ecuaciones de equilibrio para la parte *izquierda* de la escalera son:

$$\sum F_x = T - F_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{Ax} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N_B + F_{Ay} - W = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = W - N_B \qquad (2)$$

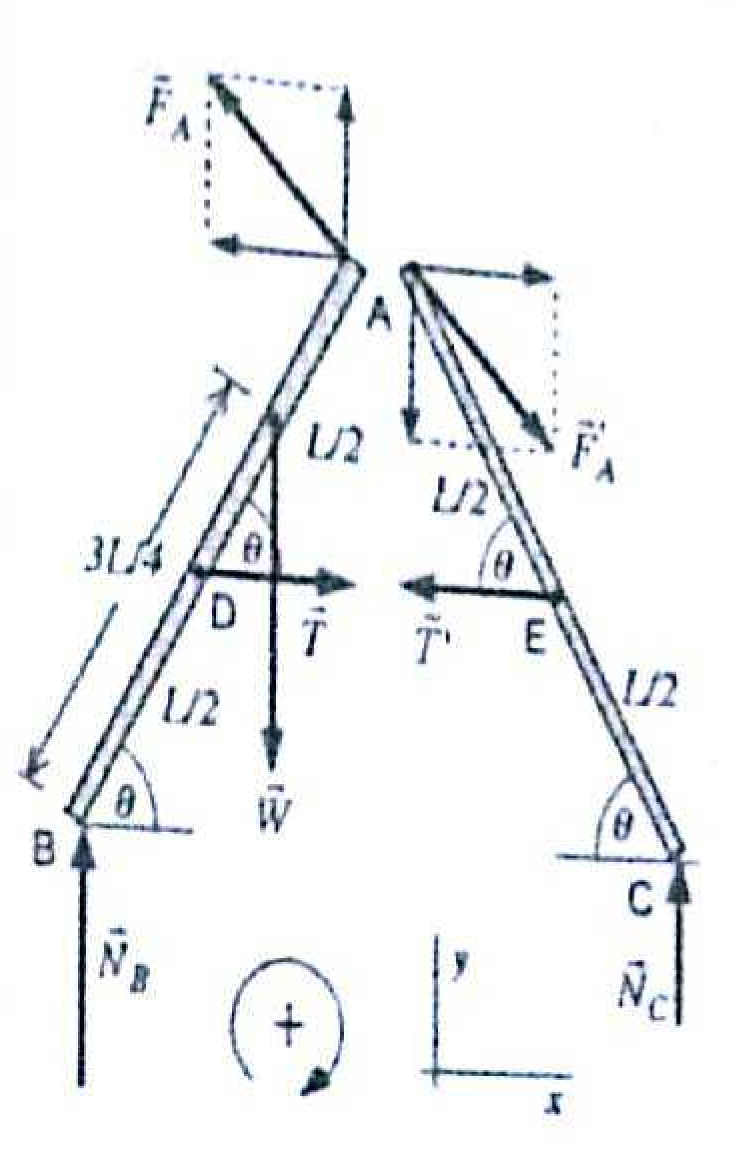
$$\sum \tau_A = N_B L cos\theta - T\frac{L}{2}sen\theta - W\frac{L}{4}cos\theta = 0 \qquad (3)$$

Las ecuaciones de equilibrio para la parte *derecha* son:

$$\sum F_x = -T + F_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{Ax} \qquad (1')$$

$$\sum F_y = N_C - F_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = N_C \qquad (2')$$

$$\sum \tau_A = -N_C L cos\theta + T\frac{L}{2}sen\theta = 0 \qquad (3')$$



Observe que las dos ecuaciones (1) y (1') son idénticas. Por lo tanto, disponemos de un total de 5 ecuaciones independientes y habrá una solución única para las 5 incógnitas: T, N_B, N_C, F_{Ax} y F_{Ay}. Si combinamos las ecuaciones (3) y (3') y por separado (2) y (2'), encontramos el par de ecuaciones con N_B y N_C:

$$(3)+(3') \quad \Rightarrow \quad N_B - N_C = \frac{W}{4}$$

$$(2)-(2') \quad \Rightarrow \quad N_B + N_C = W$$

De aquí que las fuerzas ejercidas por el suelo son:

$$N_B = \frac{5}{8}W = \frac{5}{8}(800N) = 500N$$

$$N_C = \frac{3}{8}W = \frac{3}{8}(800N) = 300N$$

Sustituyendo en la ecuación (3'), encontramos la tensión de la varilla DE:

$$T = 2N_C ctg\theta = \frac{3}{4}W ctg\theta$$

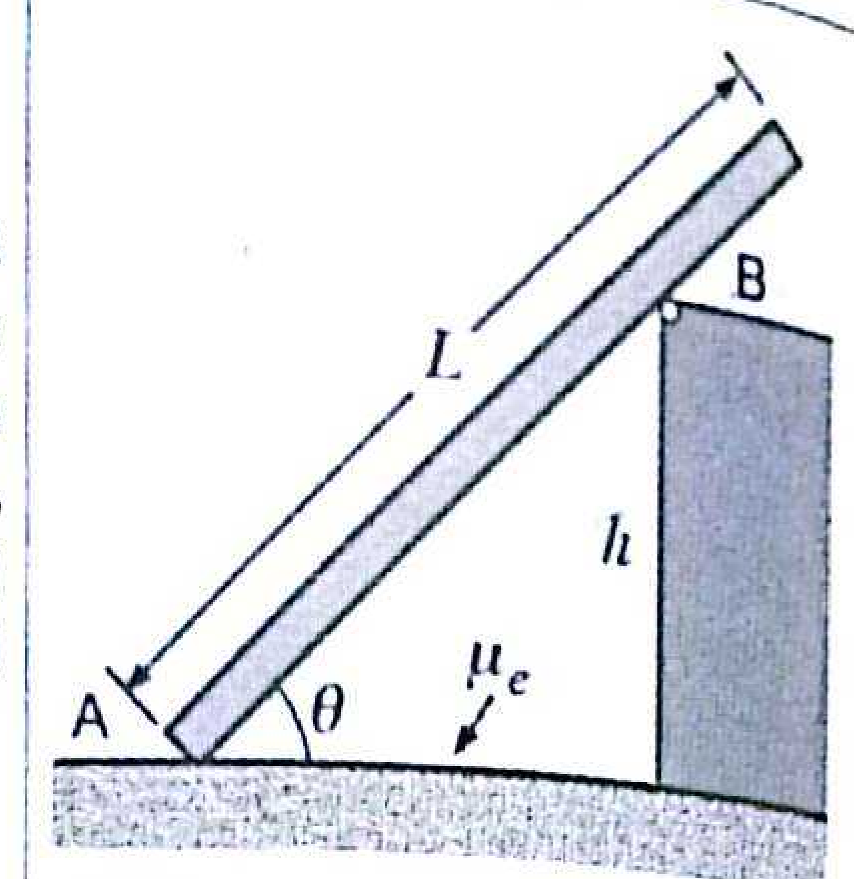
$$T = \frac{3}{4}800N ctg71{,}5^{\circ} = 201N$$

Respuesta:

a) $N_B = \frac{5}{8}W = 500N$
$N_C = \frac{3}{8}W = 300N$
b) $T = \frac{3}{4}W ctg\theta = 201N$

PR-5.28. *La tabla resbala para ciertas inclinaciones*

Una tabla de longitud L descansa sobre el suelo y está apoyada sobre el punto B sin rozamiento, situado en la parte superior de un muro de altura $h = L/2$. Se observa que la tabla permanece en equilibrio para ángulos $\theta > 60°$, pero resbala para ángulos menores a este valor. Halle el coeficiente μ_e de rozamiento estático entre la tabla y el suelo.



Solución: En el diagrama de cuerpo libre se muestran las fuerzas sobre la tabla. La tabla es uniforme y su peso W está aplicado en su centro geométrico (CG). La fuerza de contacto en el punto B es normal a la tabla porque el rodillo no presenta rozamiento. Para aplicar la condición de equilibrio de rotación resulta conveniente tomar torques alrededor del punto A al pie de la tabla:

$$\sum \tau_A = W\frac{L}{2}cos\theta - F_B\frac{h}{sen\theta} = 0$$

$$F_B = W\frac{L}{2h}sen\theta cos\theta \qquad (1)$$

Las condición de equilibrio horizontal es:

$$\sum F_x = F_e - F_B sen\theta = 0$$

$$F_e = F_B sen\theta = W\frac{L}{2h}cos\theta sen^2\theta \qquad (2)$$

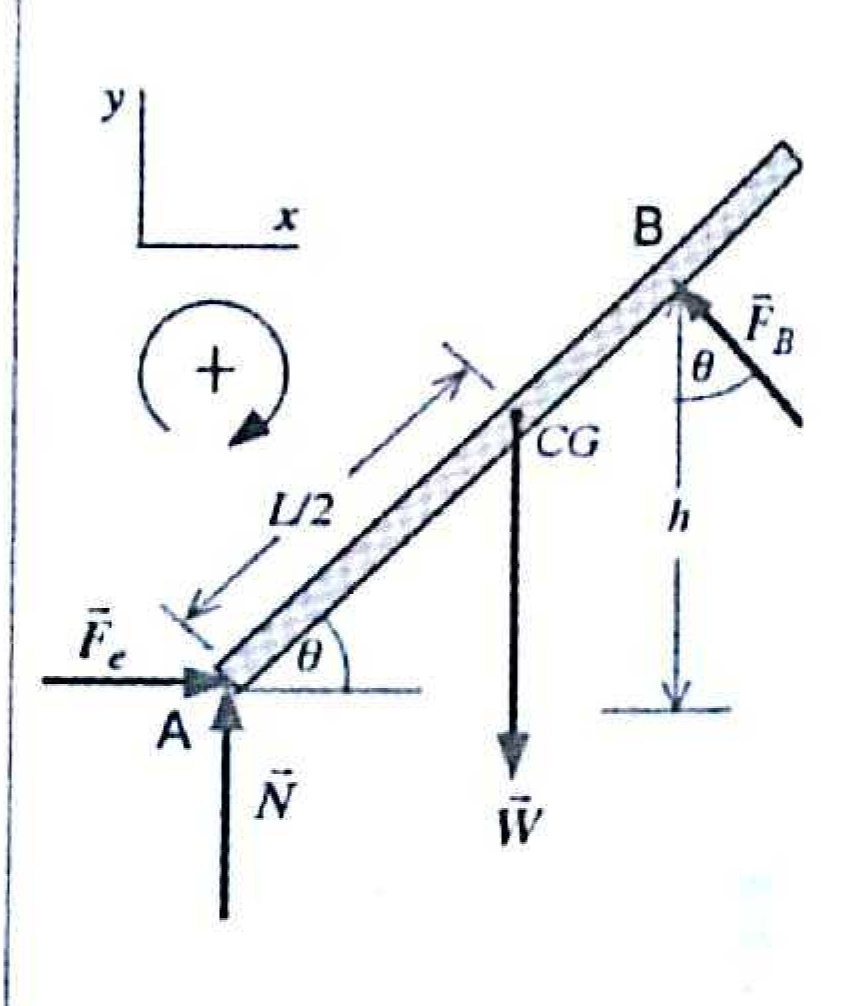
Mientras que la condición de equilibrio vertical es:

$$\sum F_y = N + F_B cos\theta - W = 0$$

$$N = W - F_B cos\theta = W(1 - \frac{L}{2h}cos^2\theta sen\theta) \qquad (3)$$

Si la tabla está a punto de deslizar, este ángulo crítico corresponde a la condición: $F_e = \mu_e N$. Sustituyendo los resultados (2) y (3), encontramos:

$$W\frac{L}{2h}cos\theta sen^2\theta = \mu_e W(1 - \frac{L}{2h}cos^2\theta sen\theta)$$



Tomando en cuenta que $L = 2h$, el coeficiente de rozamiento estático entre la tabla y el suelo es:

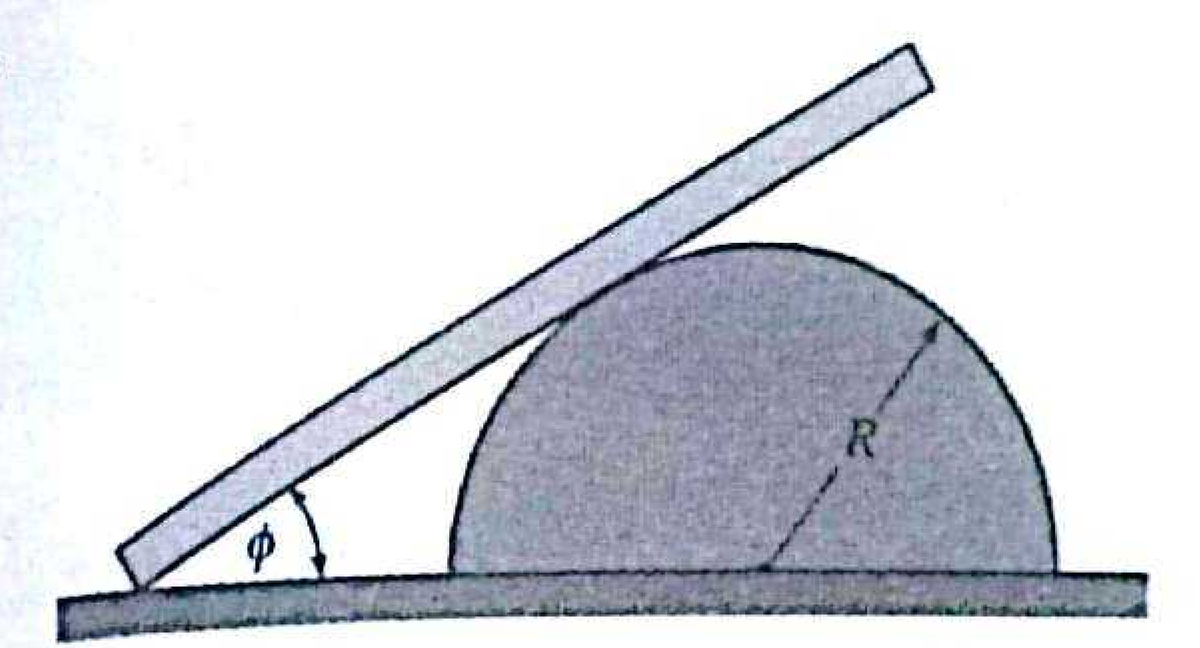
$$\mu_e = \frac{cos\theta sen^2\theta}{1 - cos^2\theta sen\theta} = \frac{cos60° sen^2 60°}{1 - cos^2 60° sen60°} = 0{,}48$$

Respuesta:

$$\mu_e = \frac{cos\theta sen^2\theta}{1 - cos^2\theta sen\theta} = 0{,}48$$

PR-5.29. *Hallando el CG de un tablón no uniforme*

Un tablón de masa no-uniforme tiene su extremo inferior apoyado sobre un piso rugoso y su parte superior sobre una superficie semicilíndrica perfectamente lisa de radio R.



El coeficiente de rozamiento estático entre el tablón y el piso es μ_e. Se sabe además que el tablón se mantiene en equilibrio para cualquier ángulo mayor que un cierto valor ϕ. Determine la posición del centro de gravedad del tablón.

Solución: Llamemos d la distancia desde el centro de gravedad del tablón al punto A de apoyo con el piso. Las ecuaciones de equilibrio de translación son:

$$\sum F_x = F_e - F_B sen\phi = 0 \quad \Rightarrow F_e = F_B sen\phi \quad (1)$$

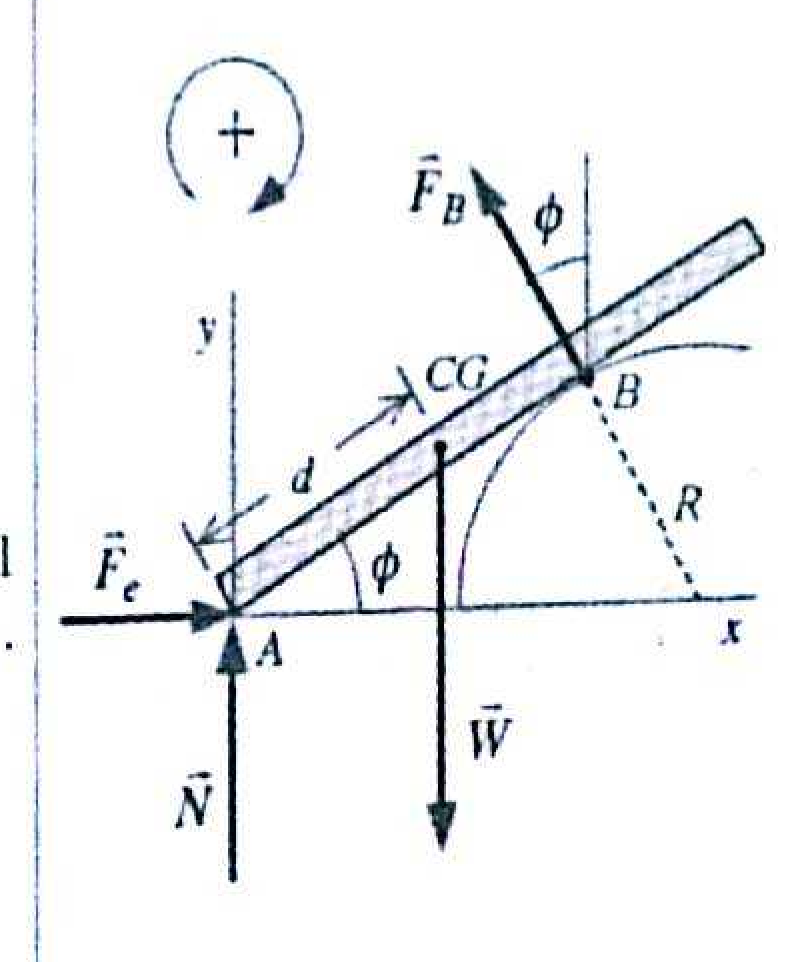
$$\sum F_y = N + F_B cos\phi - W = 0 \quad \Rightarrow \quad N = W - F_B cos\phi (2)$$

El valor crítico de ϕ para que el tablón mantenga el equilibrio está determinado por la condición: $F_e = \mu_e N$. Reemplazando las expresiones (1) y (2) encontramos:

$$F_B = \frac{\mu_e}{sen\phi + \mu_e cos\phi}W$$

Para aplicar la condición de equilibrio de rotación, tenemos libertad para tomar como eje de rotación el que pasa por el punto A.

$$\sum \tau_A = Wd cos\phi - F_B R ctg\phi = 0$$



La distancia d al centro de gravedad del tablón es:

$$d = F_B \frac{Rctg\phi}{W\cos\phi} = \frac{\mu_e W}{sen\phi + \mu_e \cos\phi}\frac{Rctg\phi}{W\cos\phi}$$

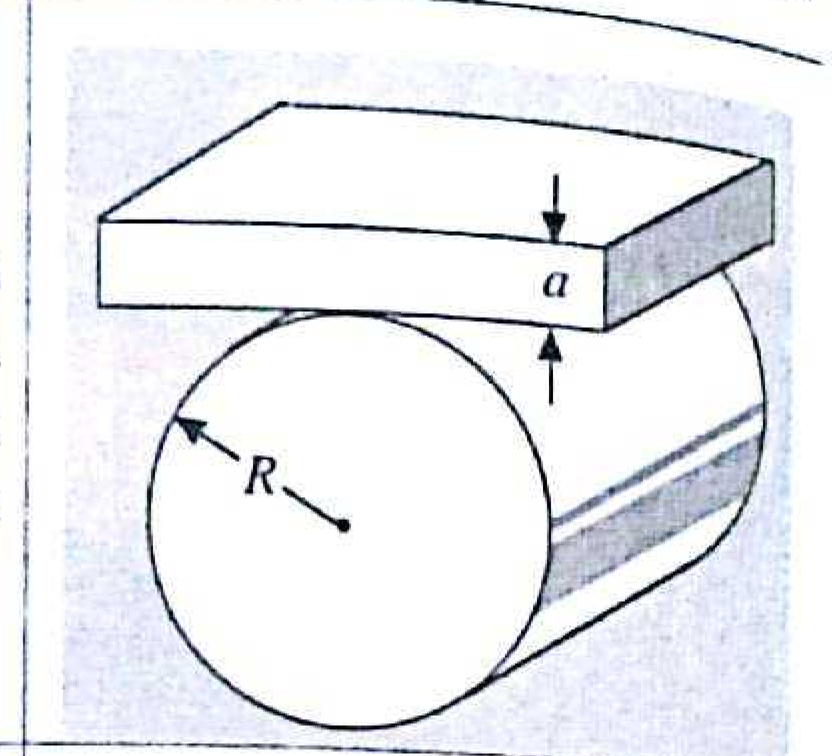
$$d = \frac{\mu_e R}{(sen\phi + \mu_e \cos\phi)sen\phi}$$

Respuesta:

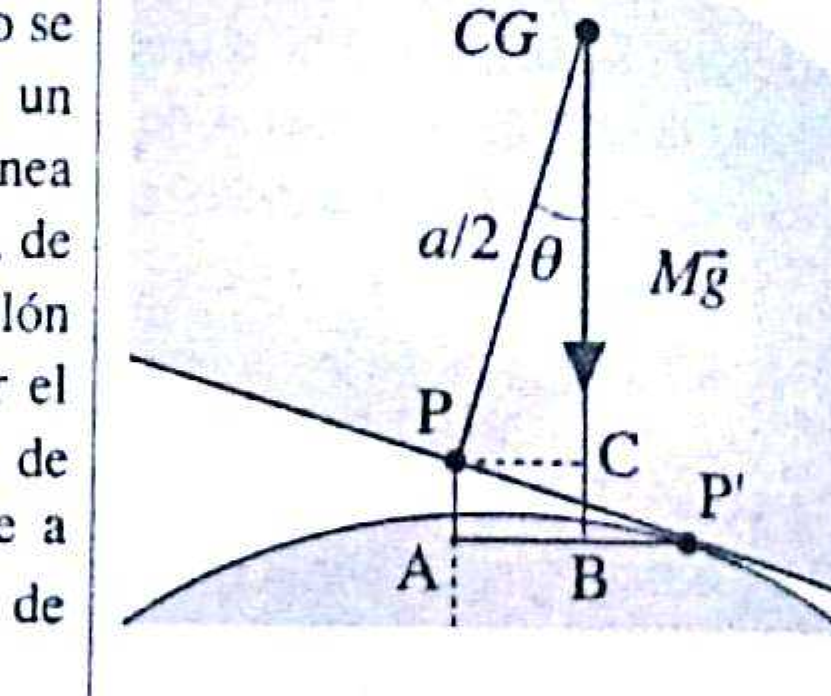
$$d = \frac{\mu_e R}{(sen\phi + \mu_e \cos\phi)sen\phi}$$

PR-5.30. *Condición para equilibrio estable del tablón*

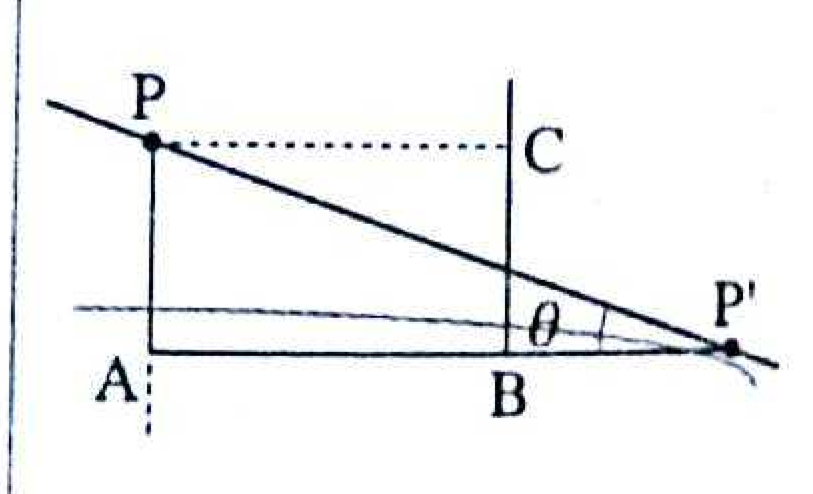
Un tablón de densidad uniforme y espesor a está equilibrado sobre una superficie cilíndrica fija de radio R. Demuestre que la condición para que el equilibrio del tablón sea estable, suponiendo que el rozamiento sea suficiente para impedir el resbalamiento, es: $a/2 < R$.



Solución: Para que el equilibrio del tablón sea estable, cualquier desplazamiento pequeño desde su posición de equilibrio debe dar como resultado un torque que tiende a regresarlo a esa posición. Suponga que inclinamos el tablón en un pequeño ángulo θ. El punto P de contacto se mueve a P' y la línea que va de P al CG formará un ángulo θ con la línea vertical. Al mismo tiempo la línea radial del cilindro se desplaza en el mismo ángulo θ, de modo que la longitud de arco es: $\overline{PP'} = R\theta$. El tablón estará en equilibrio estable si la vertical que pasa por el CG queda a la izquierda del punto de contacto P', de modo que el torque ejercido por su peso $M\vec{g}$ tiende a hacerlo girar en sentido anti horario, para llevarlo de regreso al punto original de contacto P.



Esto significa que la condición para equilibrio estable es que: $\overline{AB} < \overline{AP'}$. Según el diagrama, estas distancias son:



$$\overline{AP'} = \overline{PP'}\cos\theta = R\theta\cos\theta \qquad \overline{AB} = \overline{PC} = \frac{a}{2}sen\theta$$

$$\frac{a}{2}sen\theta < R\theta\cos\theta$$

En el límite de ángulos pequeños $(\theta \to 0)$ se cumple: $\cos\theta \to 1$ y $sen\theta \to \theta$. Sustituyendo, encontramos:

$$\frac{a}{2}\theta < R\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} < R$$

Respuesta:

$$\frac{a}{2} < R$$

PR-5.31. *Equilibrio de un pitillo dentro de una copa*

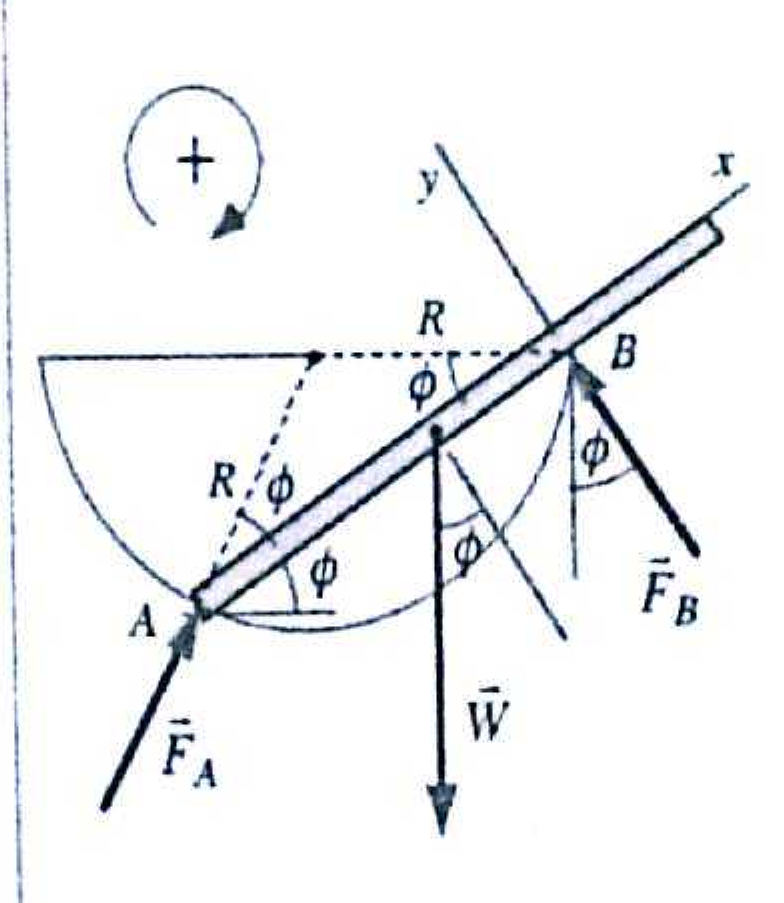
Un pitillo de plástico de longitud L se apoya en el borde de una copa lisa semiesférica de radio R, de tal forma que no existe rozamiento con la superficie. ¿Qué ángulo ϕ forma el pitillo con la horizontal en la posición de equilibrio?



Solución: Como la superficie de la copa no ofrece rozamiento, la fuerza en el extremo A del pitillo es normal a la superficie y apunta hacia el centro de curvatura. La fuerza de apoyo en el punto B es perpendicular al pitillo. Si tomamos los torques en torno al eje que pasa por el punto A, podemos escribir la condición de equilibrio de rotación:

$$\sum \tau_A = W\frac{L}{2}\cos\phi - F_B 2R\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = W\frac{L}{4R}$$

Si escogemos el eje x a lo largo del pitillo y el eje y en dirección perpendicular a éste, las condición de equilibrio horizontal es:



$$\sum F_x = F_A\cos\phi - Wsen\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = W\frac{sen\phi}{\cos\phi}$$

Sustituyendo F_A y F_B, en la ecuación de equilibrio vertical:

$$\sum F_y = F_A sen\phi + F_B - W\cos\phi = 0$$

$$W\frac{sen\phi}{\cos\phi}sen\phi + W\frac{L}{4R} - W\cos\phi = 0$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en $\cos\phi$:

$$2\cos^2\phi - \frac{L}{4R}\cos\phi - 1 = 0$$

En esta ecuación solo tiene sentido físico la raíz positiva:

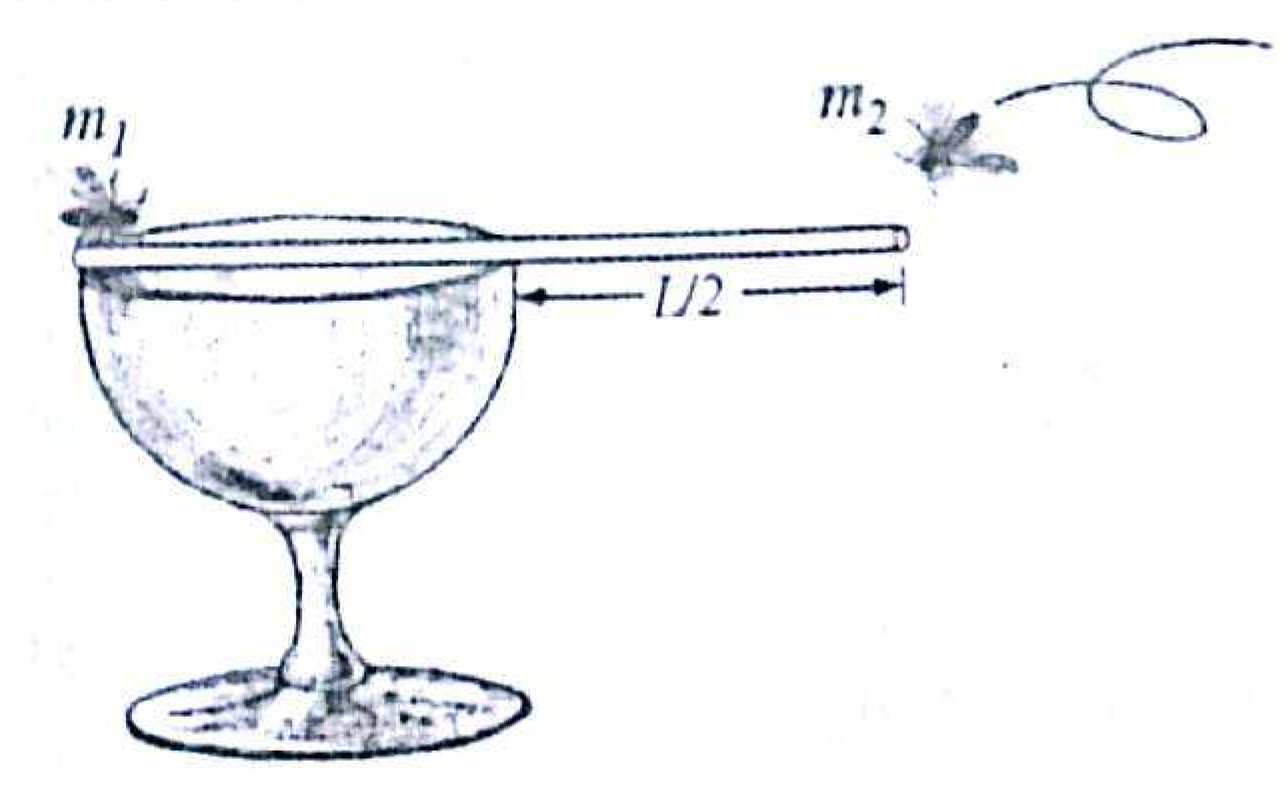
$$\cos\phi = \frac{1}{4}\left[\frac{L}{4R} + \sqrt{\left(\frac{L}{4R}\right)^2 + 8}\right]$$

Respuesta:

$$\cos\phi = \frac{1}{4}\left[\frac{L}{4R} + \sqrt{\left(\frac{L}{4R}\right)^2 + 8}\right]$$

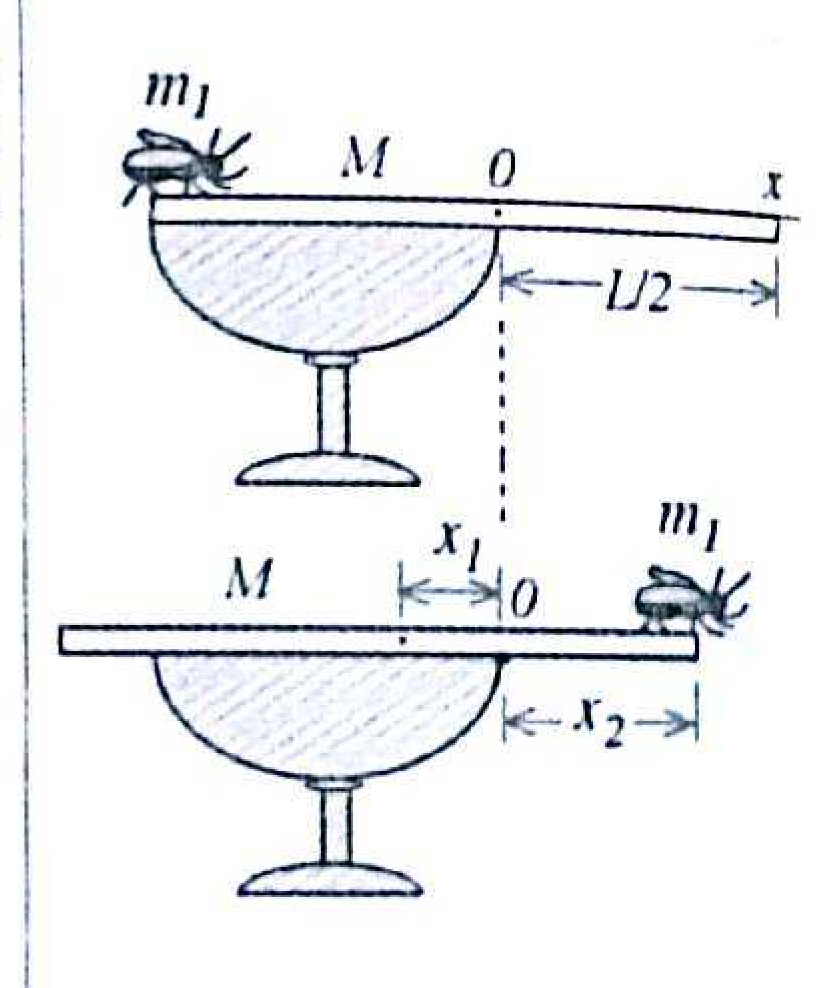
PR-5.32. *Hay dos moscas rondando un pitillo*

Un pitillo uniforme de longitud L y masa M se coloca sobre una copa, con un lado sobresaliendo justo la mitad. Una mosca de masa m_1 se posa suavemente sobre el extremo izquierdo del pitillo y empieza a caminar hacia el extremo derecho.



El rozamiento entre el pitillo y la copa es despreciable, de manera que el pitillo va retrocediendo sobre la copa. Cuando la mosca alcanza el extremo derecho, se detiene y en esta situación el pitillo no se vuelca. A continuación, una segunda mosca llega volando y se posa sobre la primera. ¿Cuál debe ser el máximo valor de la masa m_2 de la segunda mosca para que el pitillo no se vuelque?

Solución: Como no hay rozamiento del pitillo con la copa, cuando la mosca m_1 camina hacia la derecha, el centro de masa del sistema pitillo-mosca m_1 permanece inmóvil. La posición del CM respecto al punto O es:



Antes: $$x_{cm} = \frac{m_1(-L/2) + M(0)}{m_1 + M}$$

Después: $$x_{cm} = \frac{m_1(x_2) + M(-x_1)}{m_1 + M}$$

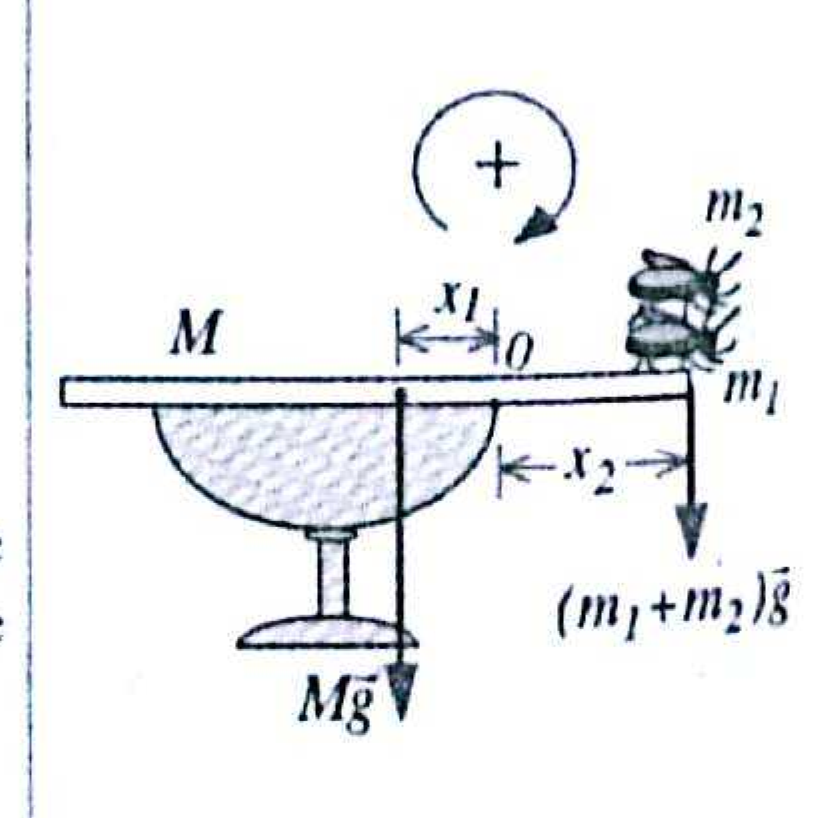
Igualando:

$$\frac{M}{m_1}x_1 - x_2 = \frac{L}{2}$$

Además, la suma de las distancias es: $x_1 + x_2 = \dfrac{L}{2}$

Combinando estas dos relaciones obtenemos:

$$x_1 = L(\frac{m_1}{M + m_1}), \qquad x_2 = \frac{L}{2}(\frac{M - m_1}{M + m_1})$$



Al posarse la segunda mosca, su masa m_2 no debe exceder el valor que cumpla la condición de equilibrio de rotación. Tomando torques en torno al punto O:

$$\sum \tau_0 = (m_1 + m_2)gx_2 - Mgx_1 = 0$$

$$m_1 + m_2 = M\frac{x_1}{x_2} = 2M\frac{m_1}{M - m_1}$$

Por lo tanto, para que el pitillo no se vuelque, el máximo valor de la masa de la segunda mosca debe ser:

$$m_2 = (\frac{M + m_1}{M - m_1})m_1$$

Respuesta:

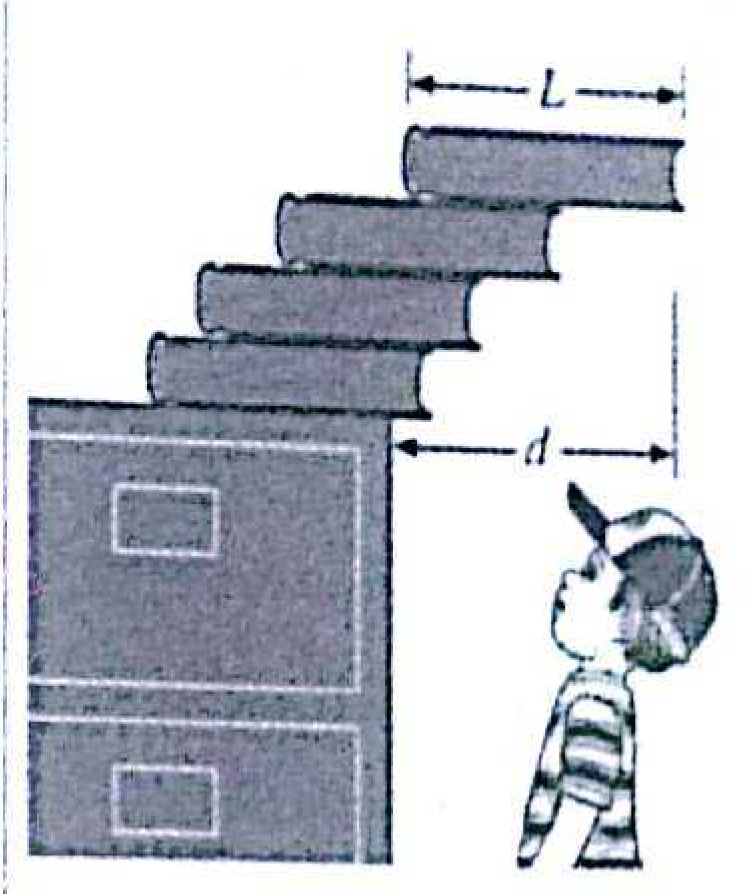
$$m_2 \le (\frac{M + m_1}{M - m_1})m_1$$

PR-5.33. *Equilibrando una torre de libros en escalera*

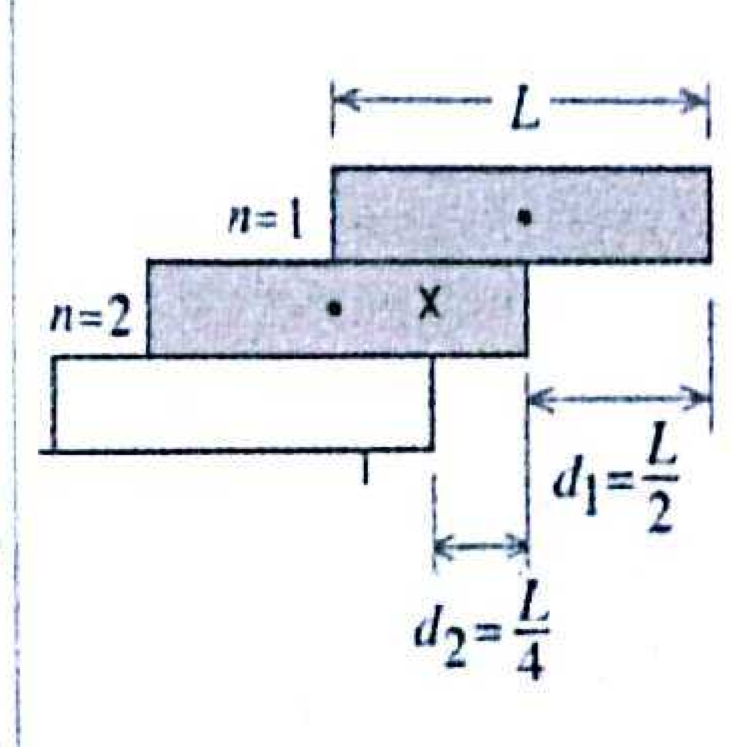
Un conjunto de N de libros idénticos, de masa uniforme y longitud L van a ser colocados uno a uno sobre los otros, de tal forma que sobresalgan lo mas posible, sin que se caigan.

a) Encuentre la distancia total d que sobresalen todos los N libros.

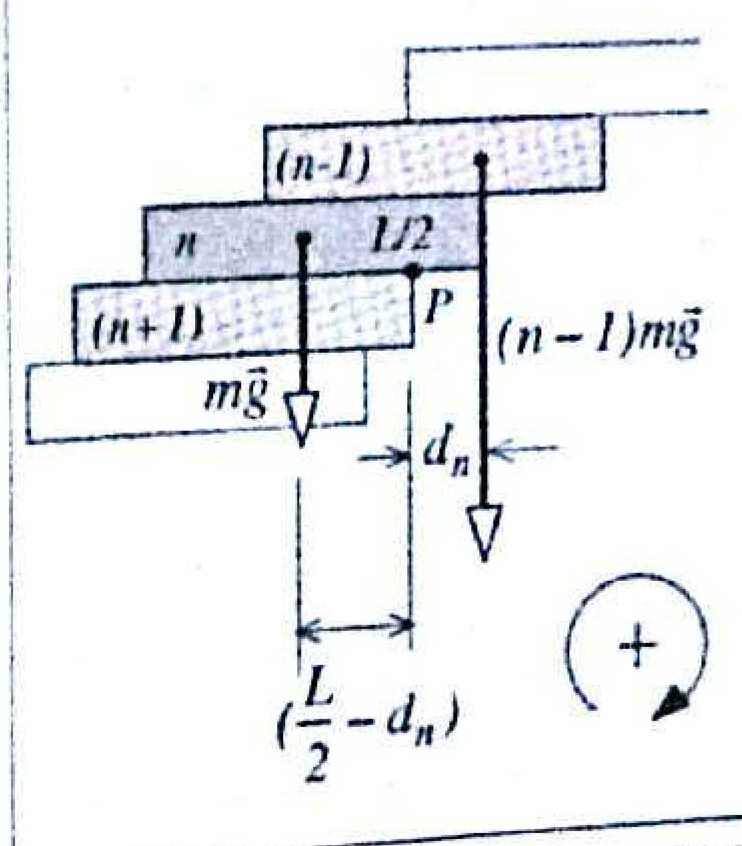
b) ¿Cuántos libros podrían ser apilados de esta manera?

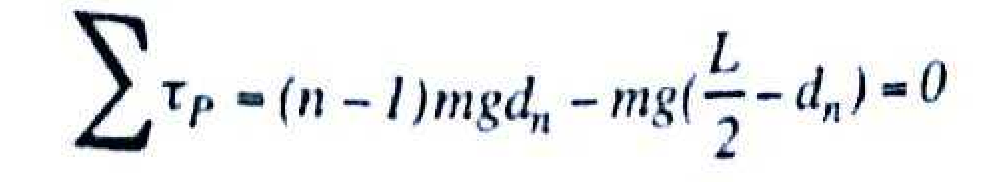


Solución: a) Esto se logra haciendo que el centro de gravedad del libro superior esté directamente por encima de la orilla del siguiente libro ($d_1 = L/2$). El segundo libro puede sobresalir tanto como lo permita el CG del conjunto de los dos libros $n = 1$ y $n = 2$, el cual tiene que ubicarse sobre el borde del tercer libro para que el conjunto no se caiga. Este queda a $3L/4$ del borde del libro superior y por lo tanto a $d_2 = L/4$ del extremo de libro inferior.



Consideremos el n-simo libro que debe sobresalir una distancia máxima d_n respecto al libro de abajo. El CG de los $(n - 1)$ libros de arriba debe quedar justo por encima del borde del n-simo libro. Si calculamos los torques respecto al punto P en el borde del libro $(n + 1)$, la condición de equilibrio es que sea cero la suma de los torques debidos al peso mg del libro n y al peso total de los libros que éste tiene encima, $(n - 1)mg$. Por lo tanto:





$$\sum \tau_P = (n - 1)mgd_n - mg(\frac{L}{2} - d_n) = 0$$

Simplificando, encontramos:

$$(n-1)d_n = (\frac{L}{2} - d_n) \quad \Rightarrow \quad d_n = \frac{L}{2n}$$

De modo que la distancia total que sobresale un total de N los libros será:

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_N = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + ... + \frac{L}{2N}$$

b) Para un número N de libros muy grande, tenemos:

$$d = Lim_{N \to \infty} \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \infty$$

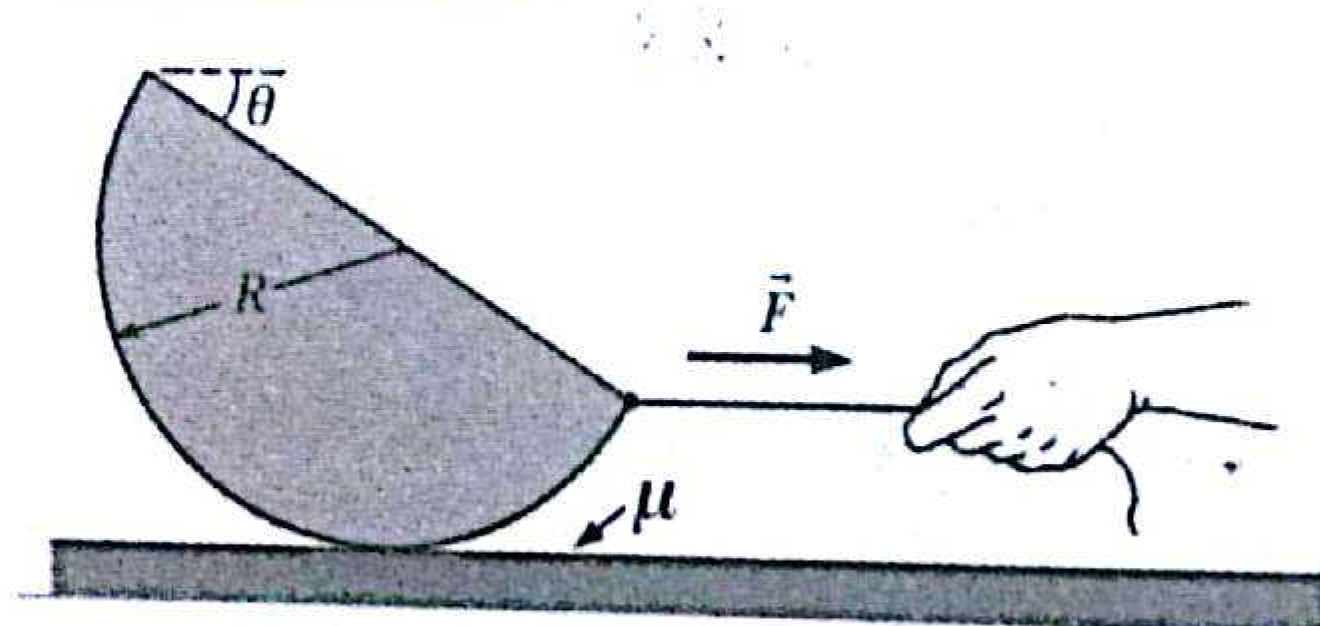
Esta suma aumenta indefinidamente con el número N (serie divergente) y puede hacerse tan grande como se quiera aumentando el valor de N. Esto quiere decir que, teóricamente, bastaría con colocar un número suficiente grande de libros para obtener un voladizo total d arbitrariamente grande. Por supuesto que, en la realidad se tendría la limitación de que el campo gravitacional no es uniforme y el valor de g no es constante.

Respuesta:

a) $d = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + ... + \frac{L}{2N}$
b) Es posible apilar infinitos libros con un voladizo infinito.

PR-5.34. *Equilibrio dinámico de un hemisferio sólido*

Un hemisferio sólido de radio R y masa M es arrastrado a velocidad constante por un piso aplicándole por un borde una fuerza horizontal F.



El coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu = 3/8$.

a) Determine el ángulo θ que forma la superficie plana del hemisferio con la horizontal.

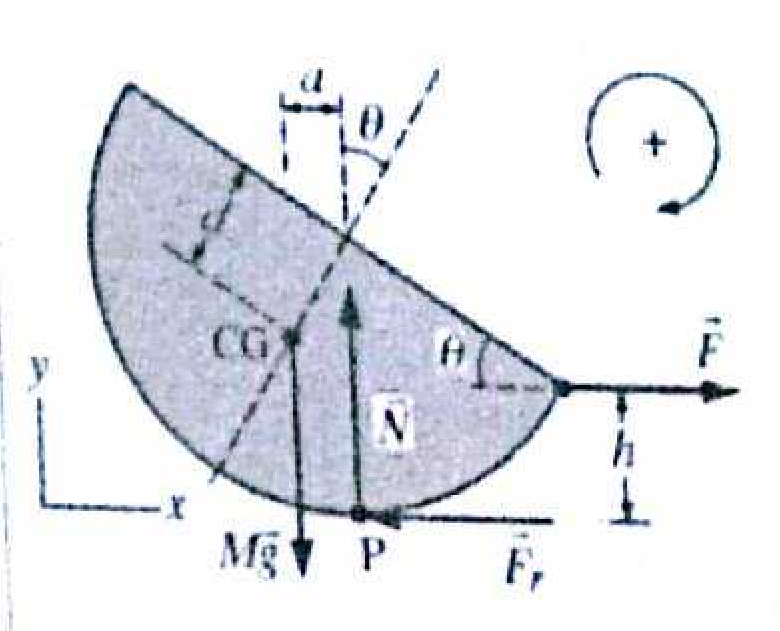
b) Analice los casos limites para $\mu \to 0$ y $\mu \to \infty$.

Solución: a) En el problema PR-1.13 ya hemos determinado que el centro de masa de un hemisferio sólido de radio R está ubicado a la distancia $d = 3R/8$ de su cara plana. Por estar en un campo gravitacional uniforme el CM del cuerpo coincide con su centro de gravedad CG. En el diagrama de cuerpo libre, se indican las cuatro fuerzas que se ejercen sobre el hemisferio: El peso $M\vec{g}$, la fuerza de roce $\vec{F}_r$, la normal $\vec{N}$ y la fuerza aplicada horizontalmente, $\vec{F}$.

Las condiciones para el equilibrio de traslación son:

$$\sum F_y = N - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg$$

$$\sum F_x = F - F_r = 0 \quad \Rightarrow \quad F = F_r = \mu N = \mu Mg$$



Si calculamos los torques respecto al punto P de contacto, la condición de equilibrio de rotación se escribe:

$$\sum \tau_P = Fh - Mga = 0 \quad \Rightarrow \quad Fh = Mga$$

$$\mu Mgh = Mga \quad \Rightarrow \quad a = \mu h$$

Sustituyendo las siguientes relaciones geométricas:

$$a = d sen\theta = \frac{3}{8} R sen\theta \quad y \quad h = R - R sen\theta$$

Se obtiene:

$$\frac{3}{8} R sen\theta = \mu R(1 - sen\theta) \quad \Rightarrow \quad sen\theta = \frac{\mu}{\mu + 3/8}$$

Para $\mu = 3/8$, se tiene: $sen\theta = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^o$

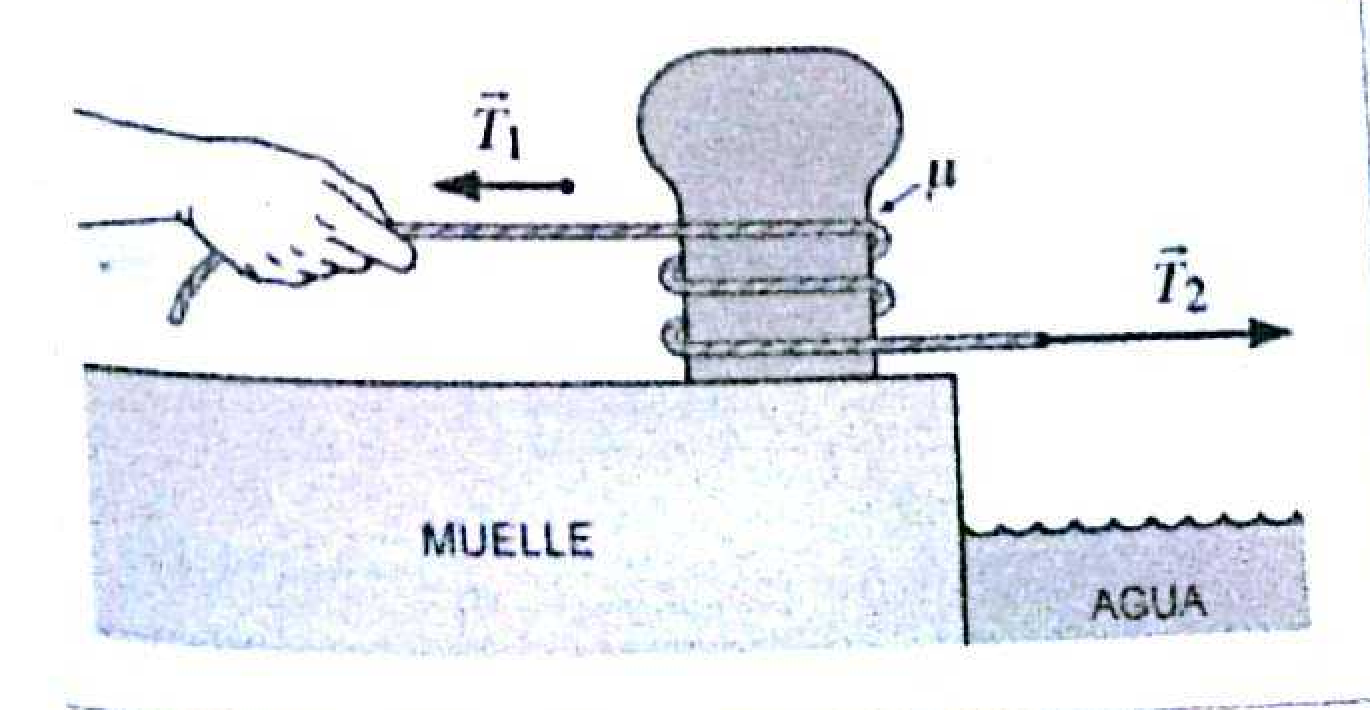
b) En el caso límite de fricción nula $\mu \to 0$, la expresión anterior predice: $\theta = 0$ (el hemisferio no se inclina). En el caso límite de gran fricción $\mu \to \infty$ y se tiene: $\theta = 90^o$

Respuesta:

a) Para $\mu = 3/8, \theta = 30^o$
b) Para $\mu \to 0$, $\theta = 0$
Para $\mu \to \infty$, $\theta = 90^o$

PR-5.35. *Crecimiento exponencial de la fricción*

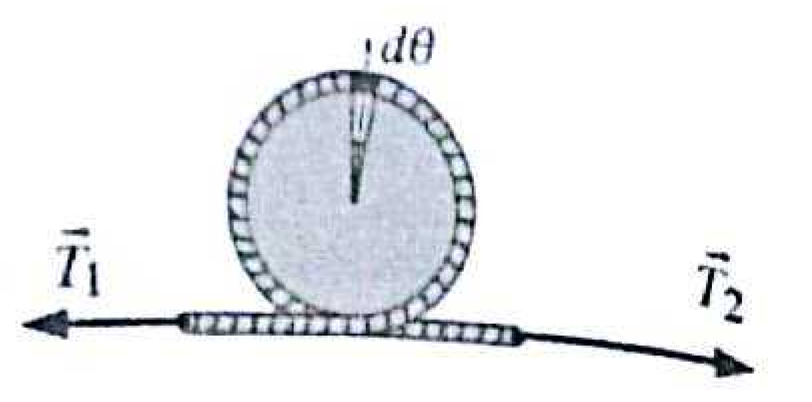
Al atracar un buque se lanza una cabuya hacia un poste cilíndrico en el muelle, la cual es enrollada varias veces alrededor de éste. Gracias al rozamiento de la cabuya con el poste, solo un pequeño esfuerzo aplicado al extremo libre será suficiente para sujetar al buque.



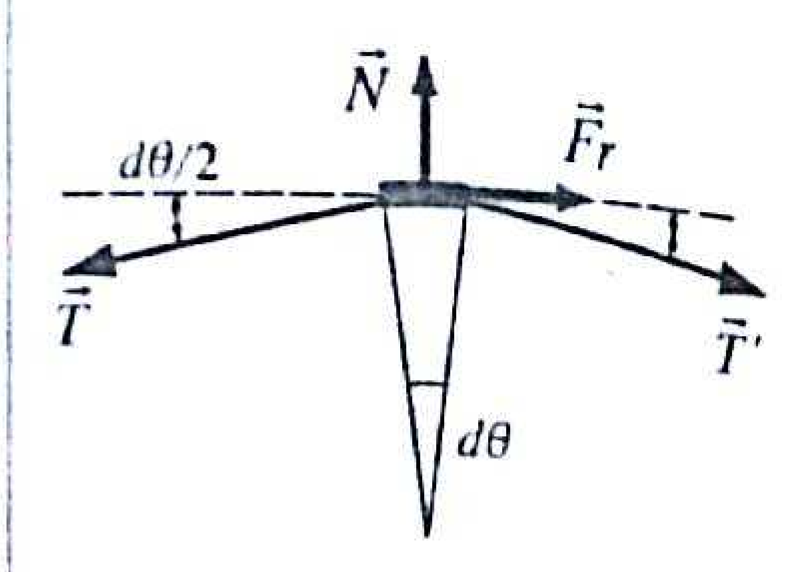
a) Calcule cuantas veces supera la fuerza $\vec{T}_2$ que actúa sobre el buque por parte de la cabuya, a la fuerza $\vec{T}_1$ aplicada al extremo libre, en términos del coeficiente de fricción μ y del número N de vueltas.

b) Suponga que el buque ejerce una fuerza $T_2 = 3x10^6$ N, si el marinero puede aplicar una fuerza $T_1 = 500$ N y $\mu = 0,5$, cuántas vueltas son suficientes darle a la cabuya para poder sostener el buque?

Solución: a) Consideremos un pequeño segmento de cuerda que subtiende un ángulo $d\theta$. Las fuerzas sobre este segmento son: las tensiones $\vec{T}$ y $\vec{T}'$ a cada lado (que son de valor aproximadamente igual), la fuerza normal, $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$. Si la cuerda está a punto de deslizar, la fuerza de rozamiento alcanza su máximo valor, $F_r = \mu N$. Como $d\theta$ es pequeño, la componente radial de cada fuerza de tensión es:



$$T sen(d\theta/2) \approx T(d\theta/2)$$



La condición para el equilibrio radial es:

$$\sum F_y = N - T(d\theta/2) - T(d\theta/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Td\theta$$

Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es: $F_r = \mu N = \mu T d\theta$. El equilibrio de las fuerzas tangenciales requiere que el incremento de la tensión dT sea justamente igual a la fuerza de rozamiento:

$$dT = F_r = \mu T d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

Integrando:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \quad \Rightarrow \quad (\ln T)\Big|_{T_1}^{T_2} = \mu(\theta_2 - \theta_1) = \mu\Delta\theta$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\Delta\theta}$$

Vemos que la relación de fuerzas no depende, ni del diámetro del cilindro ni del grosor de la cuerda y sólo lo determina el coeficiente de rozamiento y el número de vueltas, $N = \Delta\theta/2\pi$.

b) Aplicando la relación anterior, se obtiene el ángulo total abarcado:

$$\Delta\theta = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{1}{0{,}5}\ln\left(\frac{3\text{x}10^6\text{N}}{500\text{N}}\right) = 17{,}4 \text{ rad}$$

El número de vueltas que son suficientes darle a la cabuya para poder sostener el buque es:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{17{,}4\text{rad}}{2\pi\text{rad/vuelta}} = 2{,}8 \text{ vueltas}$$

Respuesta:

a) $\dfrac{T_2}{T_1} = e^{\mu\Delta\theta}$

b) $N = \dfrac{1}{2\pi\mu}\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) = 2{,}8$ vueltas

PR-5.36. *Es curioso, la regla siempre se auto equilibra*

En una clase de demostraciones pedimos a un alumno que sostenga horizontalmente una regla de madera de un metro sobre sus dedos índice y, que poco a poco trate de acercar los dedos entre sí, hasta que finalmente se junten. Curiosamente, los dos dedos siempre terminan juntándose debajo del centro de gravedad de la regla.

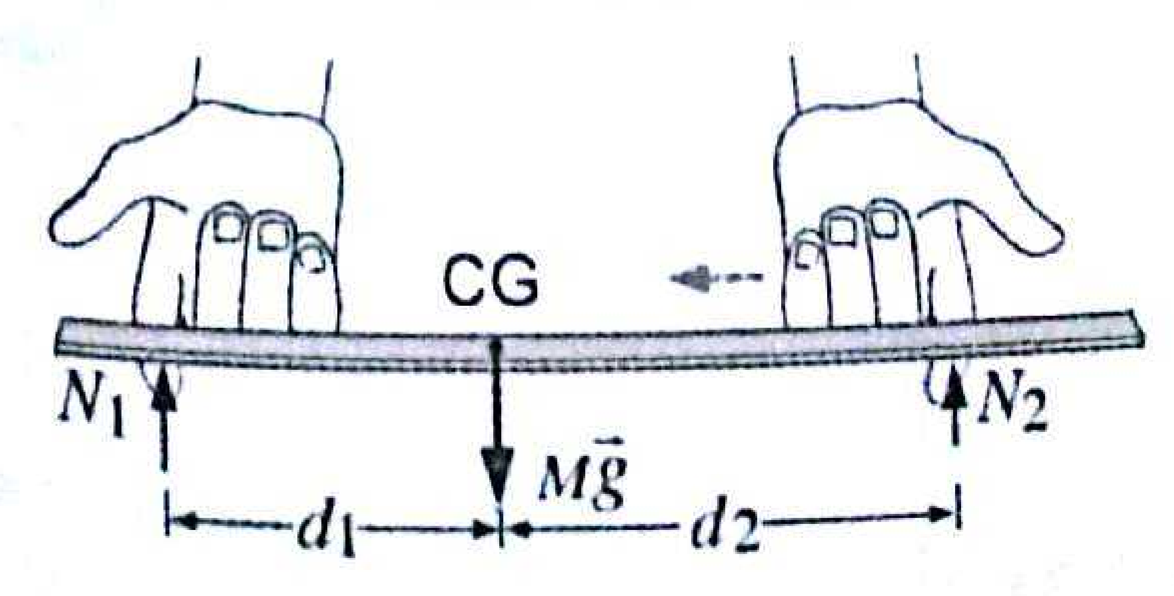
a) Explique por qué sucede esto.

b) Suponga que se tiene una varilla *no uniforme* y los puntos de contacto de los dedos se encuentran a cada lado del CG, a distancias respectivas d_1 y d_2 del mismo. Halle las fuerzas normales N_1 y N_2 ejercidas por los dedos y demuestre que si $d_1 < d_2$, entonces solamente el dedo 2 se mueve con respecto a la varilla hasta que $d_1 = d_2$, después de lo cual ambos dedos se moverán por igual.



Solución: a) Supongamos que inicialmente los dos dedos están muy separados; soportará mayor carga aquel que está mas próximo al centro de gravedad y no es posible deslizar simultáneamente los dos dedos. Al mover el primer dedo el coeficiente de rozamiento cinético es menor que el estático que actúa sobre el otro dedo y por ello éste no se mueve. Sin embargo, al acercarse el primer dedo al centro de la regla gravita sobre él mayor peso, con lo cual aumenta la fuerza de rozamiento y este dedo cesa de deslizar. Así, el único dedo que se desliza será aquel que está mas lejos del CG y en cuanto este último esté mas próximo al CG, dejará de deslizar.

Es decir, independiente de cual dedo el alumno trate de mover, los dos dedos van cambiando de papel alternándose entre paradas y deslizamientos y al final se encontrarán justo debajo del centro de gravedad.



b) Si calculamos los torques respecto al punto 1 de contacto, la condición de equilibrio de rotación se escribe:

$$\sum \tau_1 = N_2(d_1 + d_2) - Mgd_1 = 0$$

Despejando, se tiene: $N_2 = Mg(\frac{d_1}{d_1 + d_2})$

Además, como $N_1 + N_2 = Mg$, se tiene:

$$N_1 = Mg - (\frac{d_1}{d_1 + d_2})Mg = Mg(\frac{d_2}{d_1 + d_2})$$

Dividiendo las dos expresiones para las fuerzas normales se deduce que:

$$N_1 / N_2 = d_2 / d_1$$

Por lo tanto, si $d_1 < d_2$, entonces $N_1 > N_2$, la fuerza de roce en el dedo 1 será mayor y solamente el dedo 2 se moverá con respecto a la varilla hasta que las distancias d_1 y d_2 se igualan, después de lo cual ambos dedos se mueven por igual. Este procedimiento permitiría determinar dónde queda el centro de gravedad para cualquier varilla no uniforme. Es más, aun si tuviésemos coeficientes de roces distintos, $\mu_1 \neq \mu_2$, las fuerzas de roce se igualarán cuando se cumpla $\mu_1 N_1 = \mu_2 N_2$, es decir, para $d_2 = \mu_2 d_1 / \mu_1$ y las dos distancias se anularan simultáneamente cuando se encuentren en el CG.

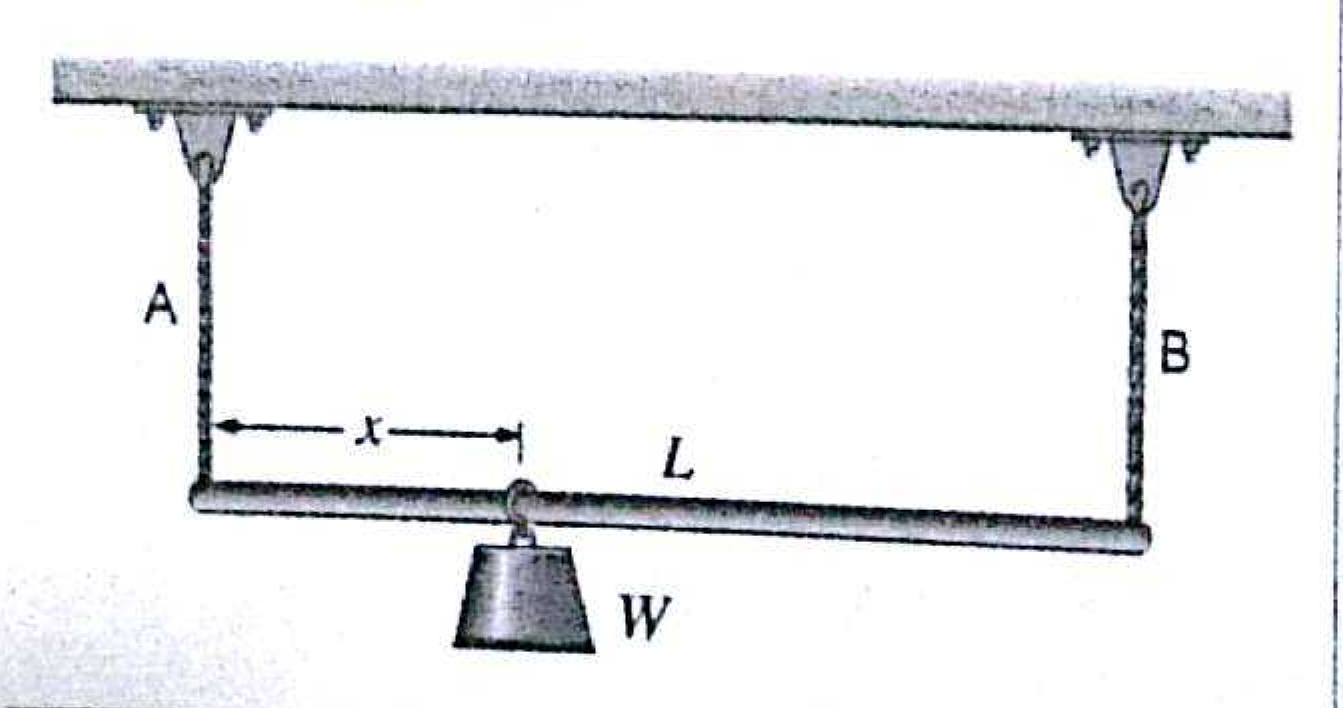
Respuesta:

b) $N_1 = Mg(\frac{d_2}{d_1 + d_2})$

$N_2 = Mg(\frac{d_1}{d_1 + d_2})$

PR-5.37. *Esfuerzos y deformaciones en dos alambres*

Una varilla rígida de longitud L = 105 cm y de masa despreciable está sostenida en los extremos por alambres A y B distintos y de igual longitud. El área de la sección transversal del alambre A es A_A = 2 mm², y el del alambre B es A_B = 4 mm².



a) ¿En qué punto de la varilla debe colgarse un peso W a fin de producir *esfuerzos iguales* en los alambres A y B?

b) ¿En qué punto de la varilla debe colgarse un peso W a fin de producir *deformaciones iguales* en A y B?

Módulos de Young:
A: Y_A = 2,4x10¹¹ Pa
B: Y_B = 1,6x10¹¹ Pa

Solución: a) Para producir esfuerzos iguales se debe cumplir la relación: $F_A / A_A = F_B / A_B$. La pesa debe colocarse a una distancia x tal que los torques se equilibren:

$$F_A x = (L - x)F_B$$

$$x = (L - x)\frac{F_B}{F_A} = (L - x)\frac{A_B}{A_A} = (L - x)\frac{4\text{mm}^2}{2\text{mm}^2}$$

$$x = (105 - x)2 \quad \Rightarrow \quad x = 70 \text{ cm}$$

b) Para producir deformaciones iguales se debe cumplir: $\Delta L_A / L_A = \Delta L_B / L_B$, es decir:

$$\frac{1}{Y_A}(\frac{F_A}{A_A}) = \frac{1}{Y_B}(\frac{F_B}{A_B})$$

$$\frac{F_A}{F_B} = (\frac{Y_A}{Y_B})(\frac{A_A}{A_B}) = (\frac{2{,}4\text{x}10^{11}\text{Pa}}{1{,}6\text{x}10^{11}\text{Pa}})(\frac{2\text{mm}^2}{4\text{mm}^2}) = 0{,}75$$

La pesa debe colocarse a una distancia x tal que los torques se equilibren:

$$F_A x = (L - x)F_B$$

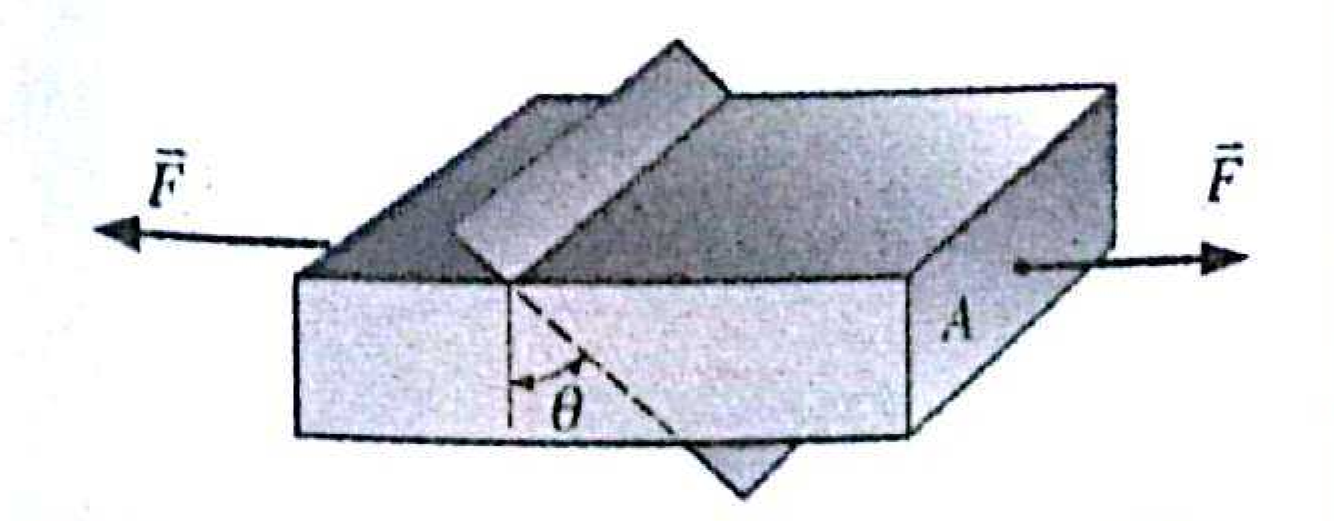
$$0{,}75x = (105 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 60 \text{ cm}$$

Respuesta:

a) Distancia desde A: x = 70 cm
b) Distancia desde A: x = 60 cm

PR-5.38. *Esfuerzos de tensión y de corte máximos*

Una barra de sección transversal A se somete a fuerzas de tensión $\vec{F}$, iguales y opuestas en los extremos. Considere un plano que atraviesa la barra formando un ángulo θ con el plano perpendicular a la barra.



a) ¿Qué esfuerzo de tensión (normal) hay en este plano en términos de F, A y θ?

b) ¿Qué esfuerzo de tensión de corte (tangencial) hay en este plano en términos de F, A y θ?

c) ¿Para qué valor de θ es máximo el esfuerzo de tensión?

d) ¿Para qué valor de θ es máximo el esfuerzo de corte?

Solución: a) La componente normal de la fuerza $\vec{F}$ es $F\cos\theta$ y el área efectiva o intersección del plano inclinado con la barra es $A/\cos\theta$, de modo que el esfuerzo de tensión normal es:

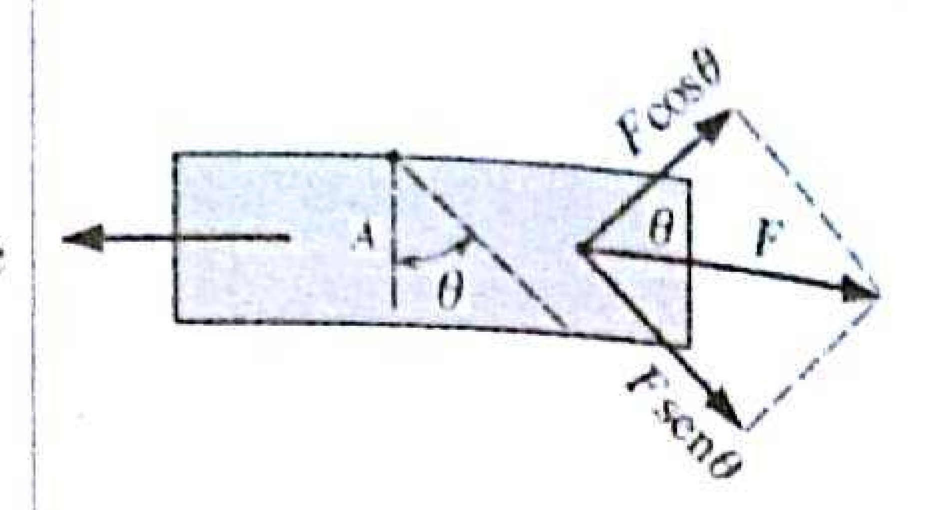
$$\frac{F\cos\theta}{A/\cos\theta}=\frac{F}{A}\cos^2\theta$$

b) La componente tangencial de la fuerza es: $F sen\theta$ de modo que el esfuerzo de tensión de corte es:

$$\frac{F sen\theta}{A/\cos\theta}=(\frac{F}{A})sen\theta\cos\theta=(\frac{F}{2A})sen2\theta$$

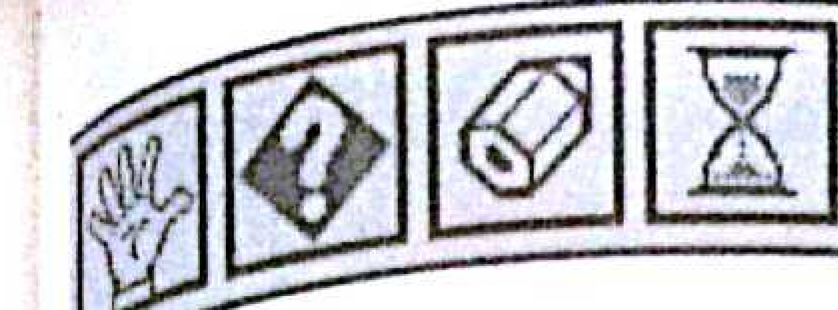
c) El $\cos\theta$ es máximo para θ = 0°, de modo que el esfuerzo de tensión es máximo para $\theta = 0°$.

d) El sen2θ es máximo para 2θ = 90°, de modo que el esfuerzo de tensión es máximo para $\theta = 45°$.



Respuesta:

a) $F\cos^2\theta/A$
b) $(F sen2\theta)/2A$
c) $\theta = 0°$
d) $\theta = 45°$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-5.01. ***Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio..***

a) Basta con aplicarle dos fuerzas de igual módulo y en sentidos opuestos.

b) Es preciso que todas las fuerzas converjan en el centro de gravedad.

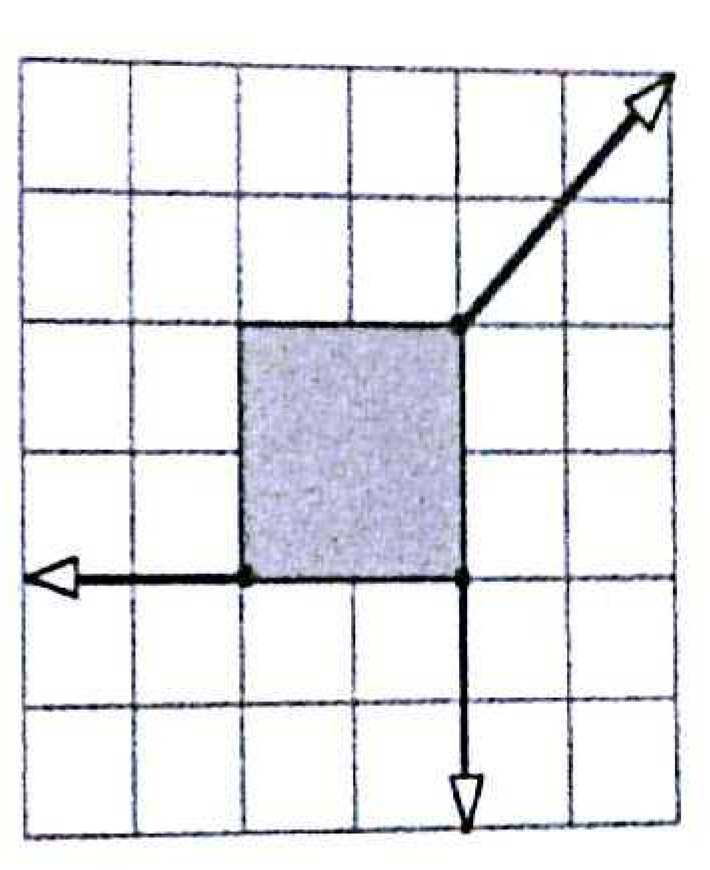
c) Es preciso que todas las fuerzas sean coplanares.

d) Es preciso que el torque neto de las fuerzas con respecto a cualquier punto del espacio sea nulo.

e) Basta con que la fuerza neta sea cero.

PE-5.02. ***¿Estará la placa en equilibrio?***

Una placa cuadrada liviana está sometida a la acción de tres fuerzas sobre sus esquinas como se indica en la figura. Si los módulos de las fuerzas están a la escala del dibujo podemos decir que:



a) La placa está en equilibrio de traslación solamente.

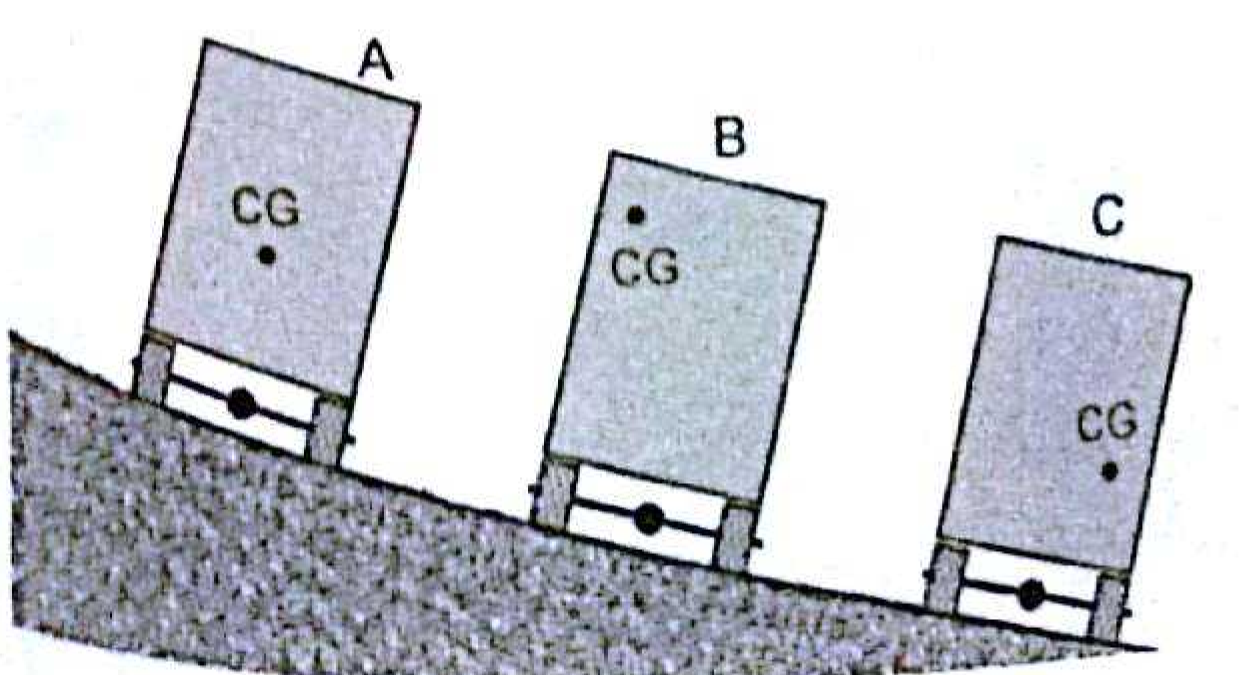


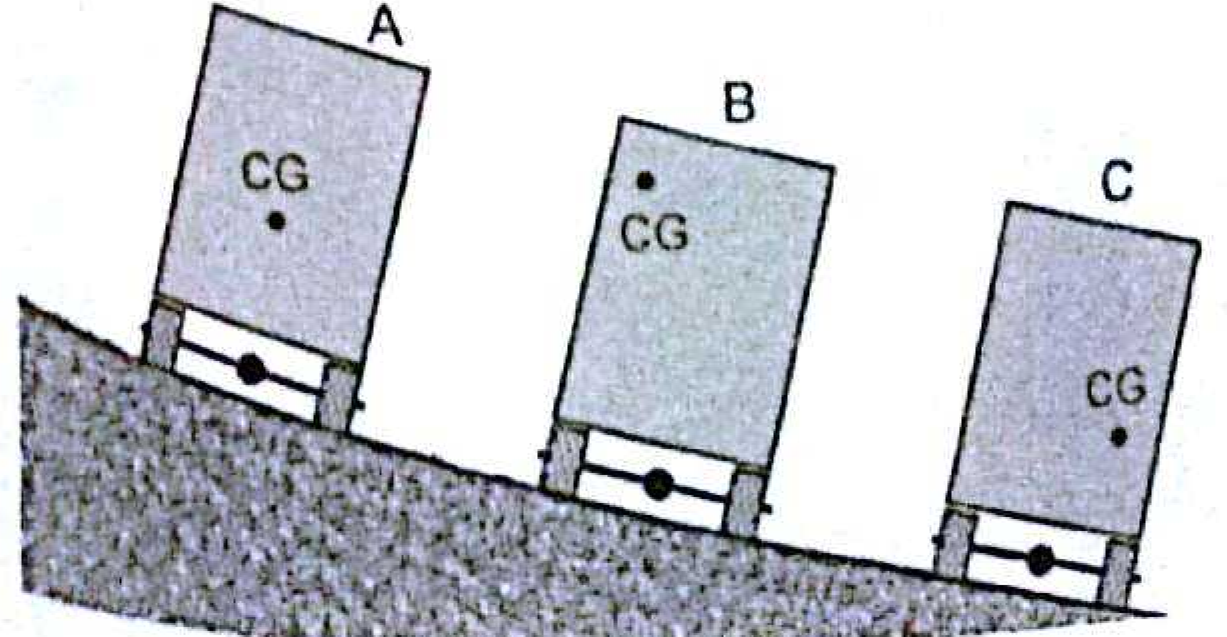
b) La placa está en equilibrio de rotación solamente.

c) La placa está en equilibrio de traslación y de rotación.

PE-5.03. ***El riesgo de estacionarse en esa rampa***

Tres camiones de tipo cava se encuentran estacionados en una rampa de la manera mostrada en la figura.



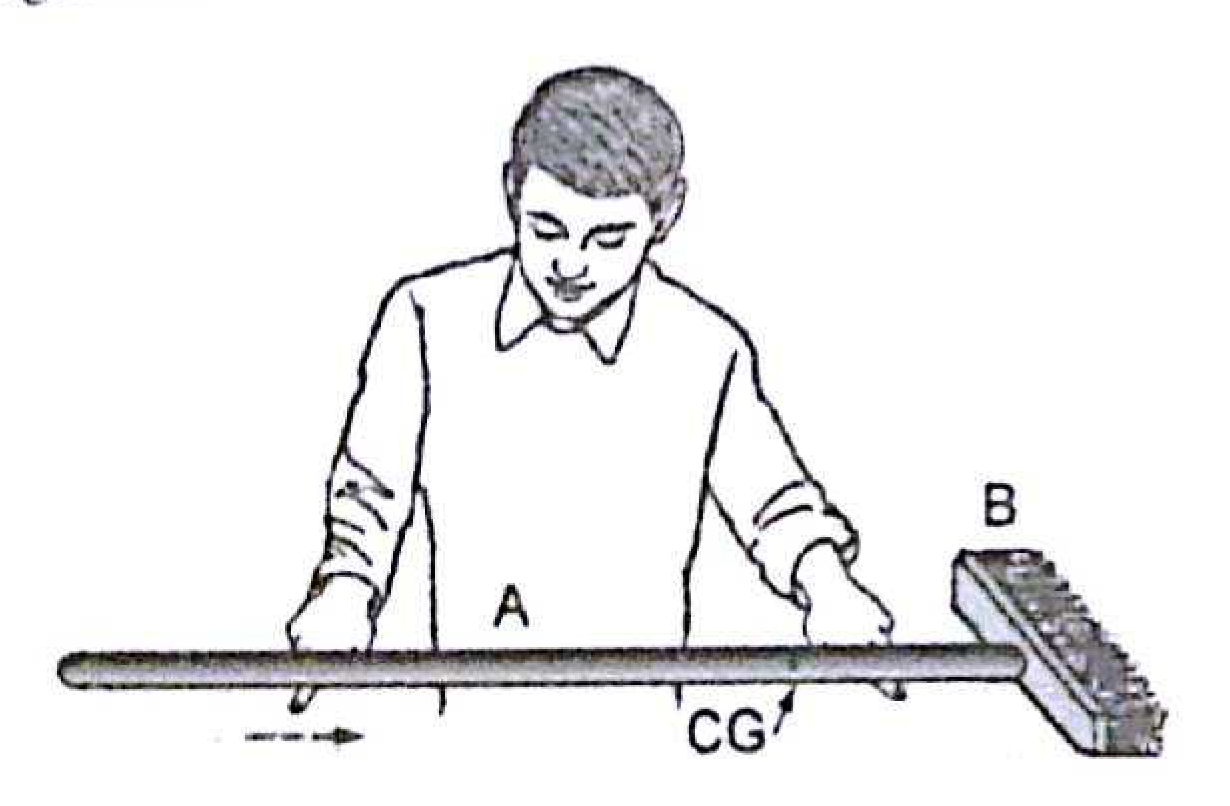


Las cargas dentro de las cavas están distribuidas de maneras diferentes, estando sus centros de gravedad CG, en las posiciones indicadas en la figura. ¿Cuál (es) está(n) a punto de voltearse?

a) El A,
b) El B,
c) El C,
d) El B y el C
e) Los tres A, B y C

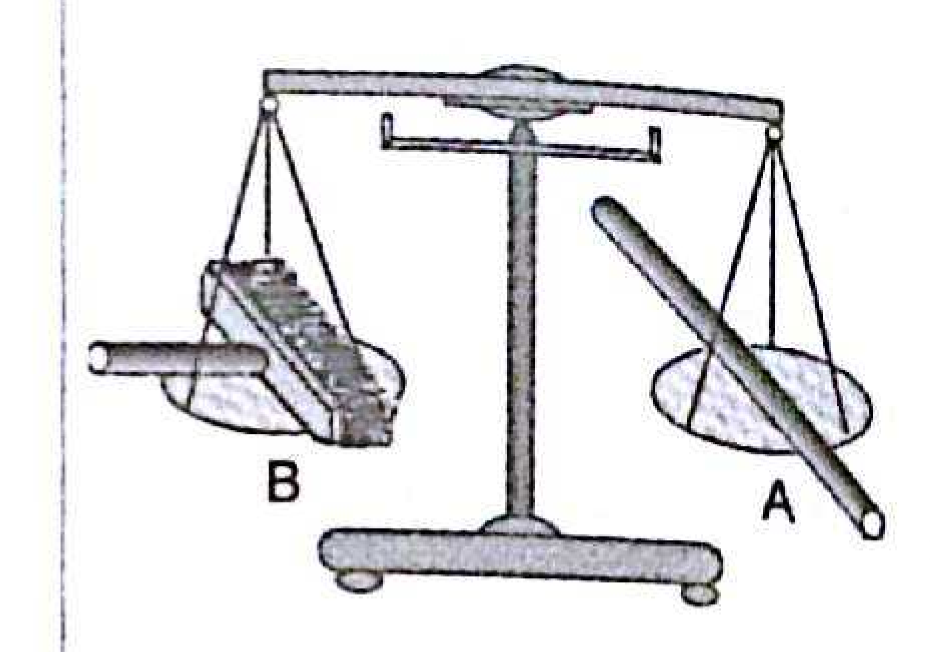
PE-5.04. *¿Cuál parte de la escoba pesa más?*

Usando el procedimiento descrito en el Problema PR-5.36, se determina la ubicación del centro de gravedad de una escoba. Es decir, se coloca la escoba horizontalmente entre los dedos índice y luego se van deslizando poco a poco los dedos hasta que se encuentren debajo del centro de gravedad.



Si cortamos el palo de la escoba por su CG en dos partes y luego, las dos partes se colocan en los platillos de una balanza, ¿cuál platillo bajará más?

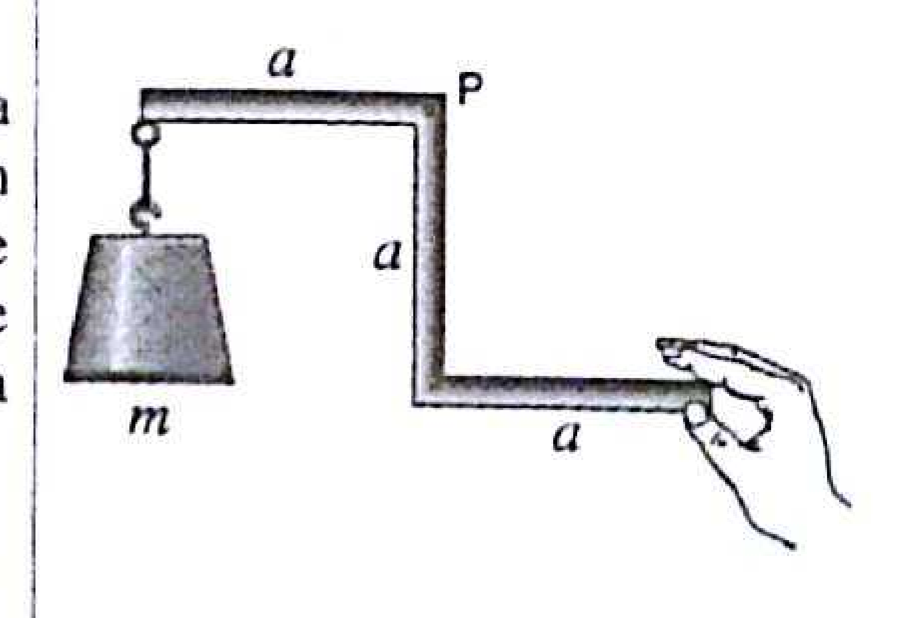
a) el del palo A.
b) el de la escoba B .
c) Se mantiene el equilibrio.



PE-5.05. *La mínima fuerza para mantener el equilibrio*

Un viga liviana de longitud $3a$ es doblada en la forma indicada en el dibujo. La viga puede girar alrededor de un eje fijo en el punto P. En el extremo de la izquierda se cuelga una masa m. ¿Cuál sería la *fuerza mínima* que habría que aplicar en el otro extremo para mantener la viga en la posición indicada?

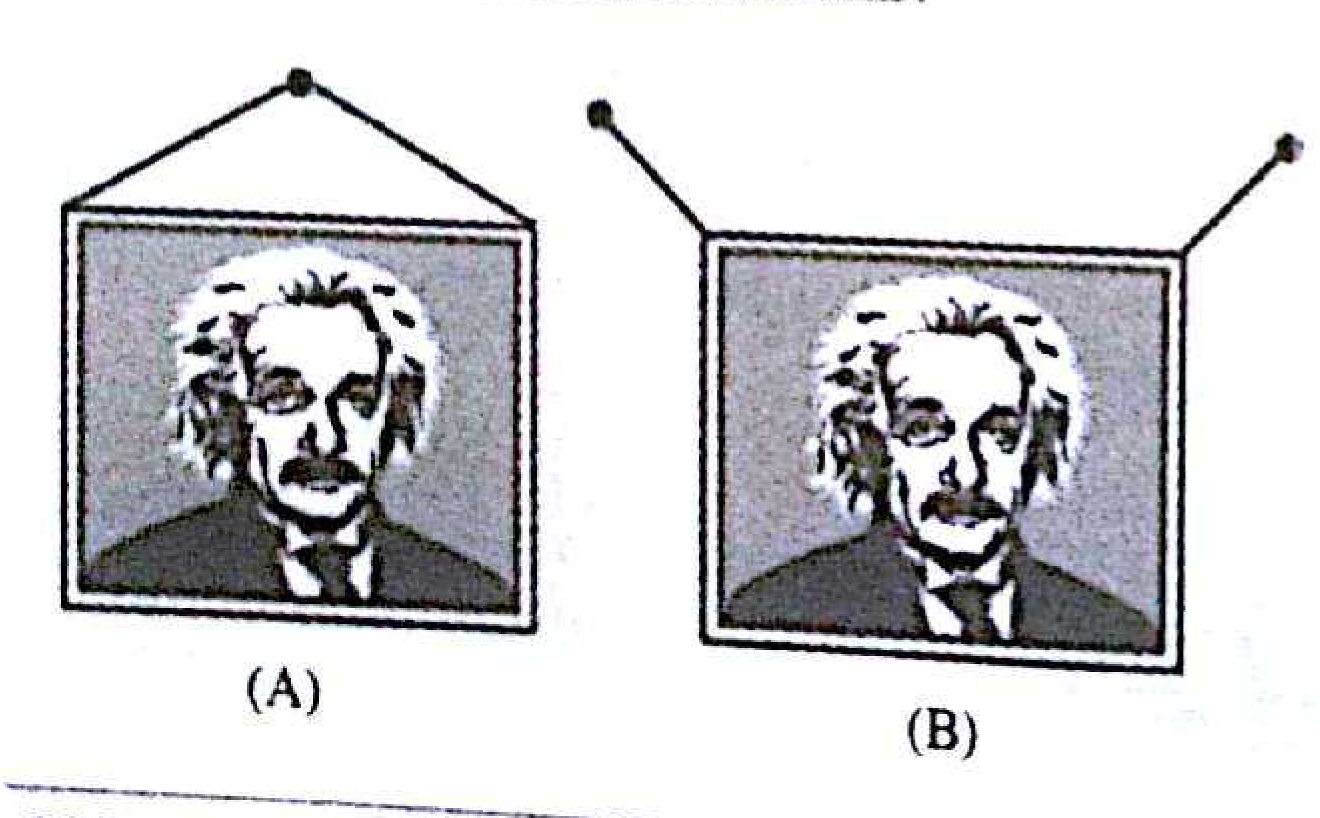
a) mg b) $2mg$ c) $\sqrt{2}\,mg$ d) $mg/2$ e) $mg/\sqrt{2}$



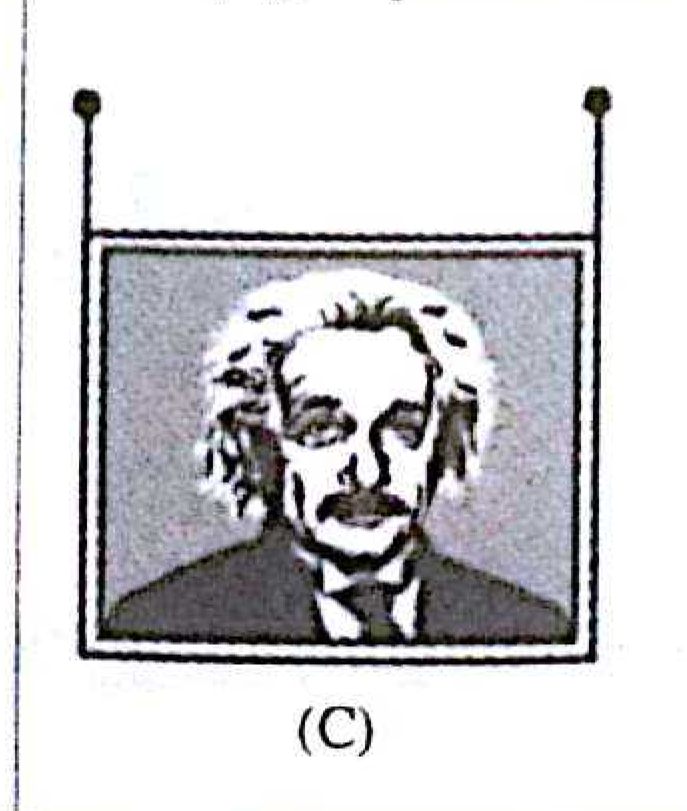
PE-5.06. *¿Cómo colgarías tu ese cuadro?*

¿En cuál de los arreglos sugeridos para colgar el cuadro se produce la *menor tensión* en las cuerdas?

a) A, b) B, c) C
d) Igual para los tres



(A) (B)

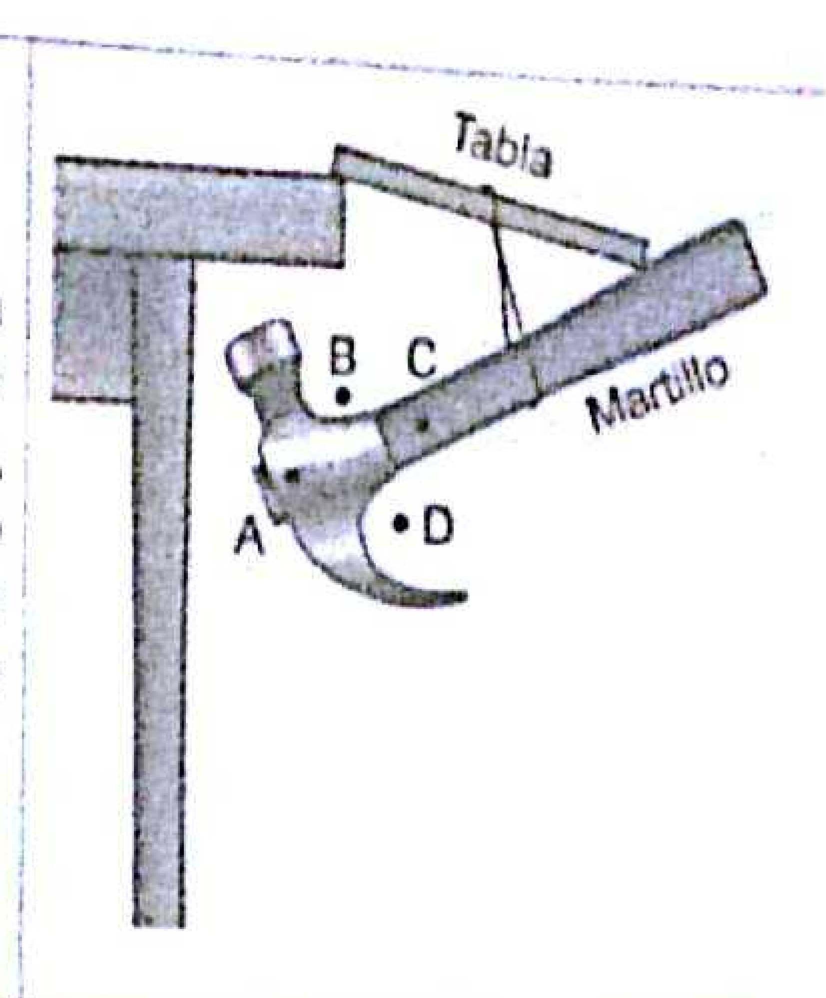


(C)

PE-5.07. *Martillo suspendido en equilibrio*

En una demostración de física, colocamos la punta de una tabla en el borde de una mesa y por debajo de ésta, se coloca un martillo enlazado a la tabla mediante un hilo, como se muestra en la figura. El hilo se tensa y el martillo queda de esta manera suspendido en equilibrio. ¿Cuál de los puntos indicados quedará mas cerca del centro de gravedad del sistema martillo-tabla?

a) A, b) B, c) C, d) D



PE-5.08. *Equilibrio de un cuadro en la pared*

Un cuadro está suspendido por una cuerda mediante un clavo en la pared. Si despreciamos el roce de la cuerda con el clavo y del cuadro con la pared, y considerando las tres opciones mostradas, ¿Cuál o cuáles son posibles?

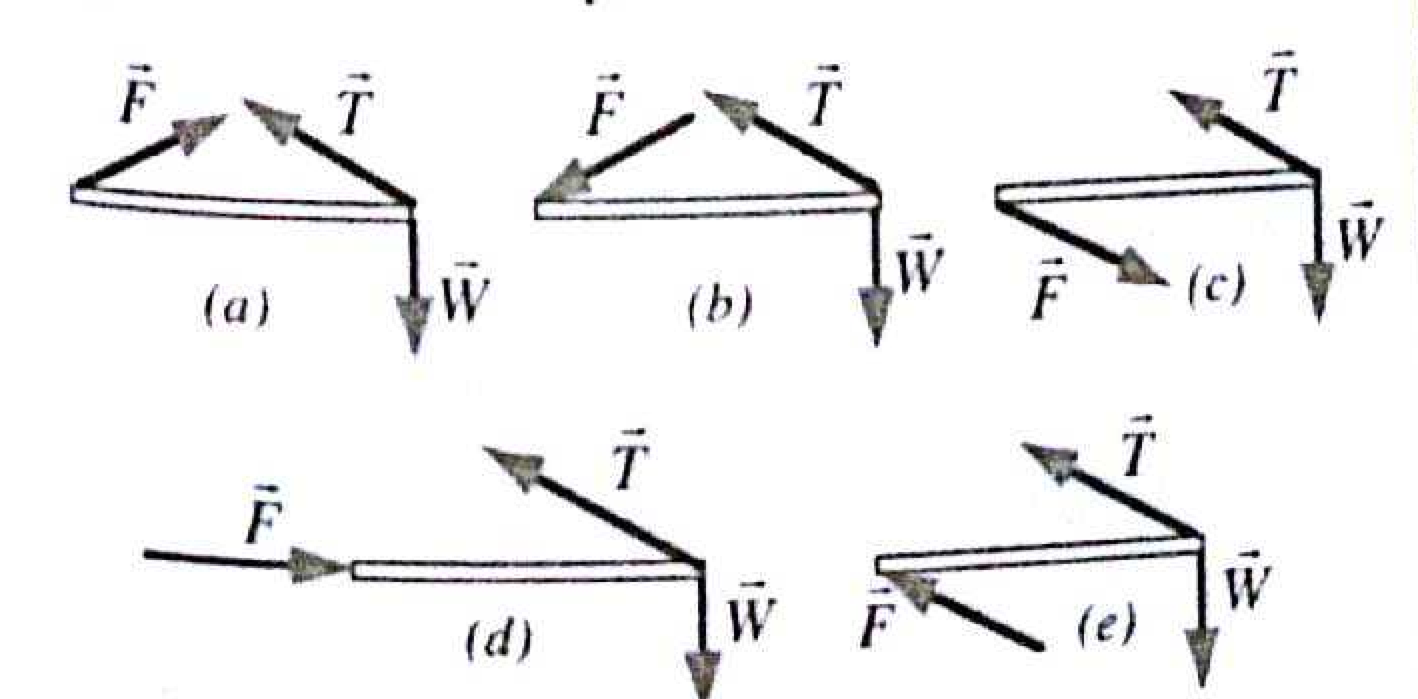
a) El inclinado A y el horizontal B
b) Solamente el horizontal B
c) El horizontal B y el inclinado C.
d) Los tres son posibles

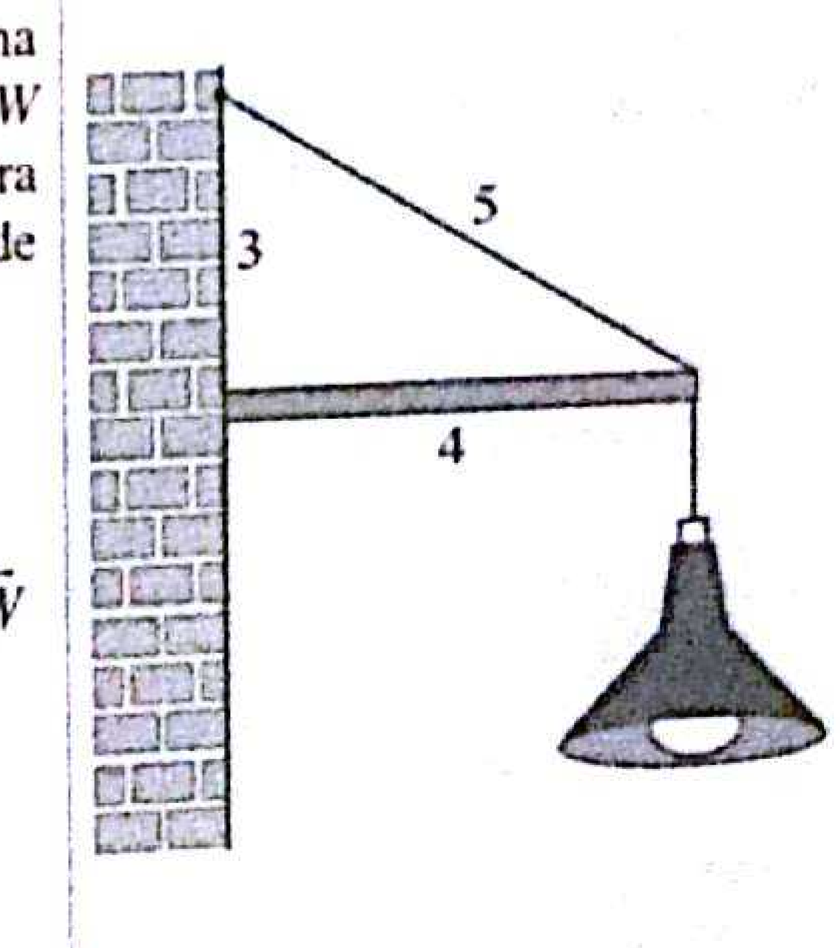


A *B* *C*

PE-5.09. *¿Cuál sería el diagrama de fuerzas correcto?*

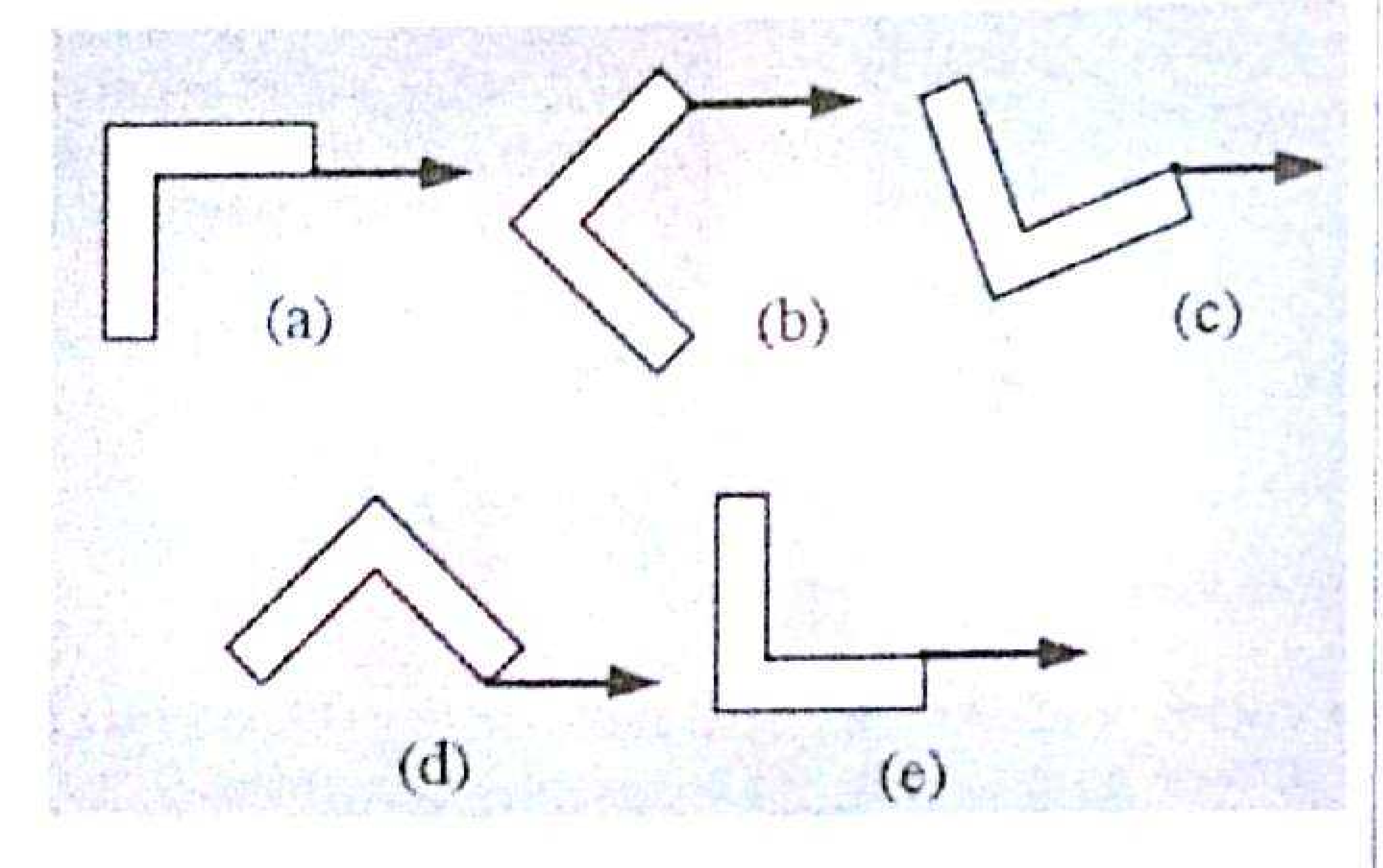
Una lámpara está sostenida de un poste mediante una barra liviana y una cuerda como muestra la figura. Sea W el peso de la lámpara, F la fuerza del poste sobre la barra y T la tensión de la cuerda, ¿cuál de los diagramas de fuerzas sobre la barra podría ser el correcto?





PE-5.10. *¿Cuál será la orientación de la lámina?*

Una lámina en L es arrastrada sobre una mesa horizontal sin fricción, aplicándole una fuerza $\vec{F}$ por una esquina.

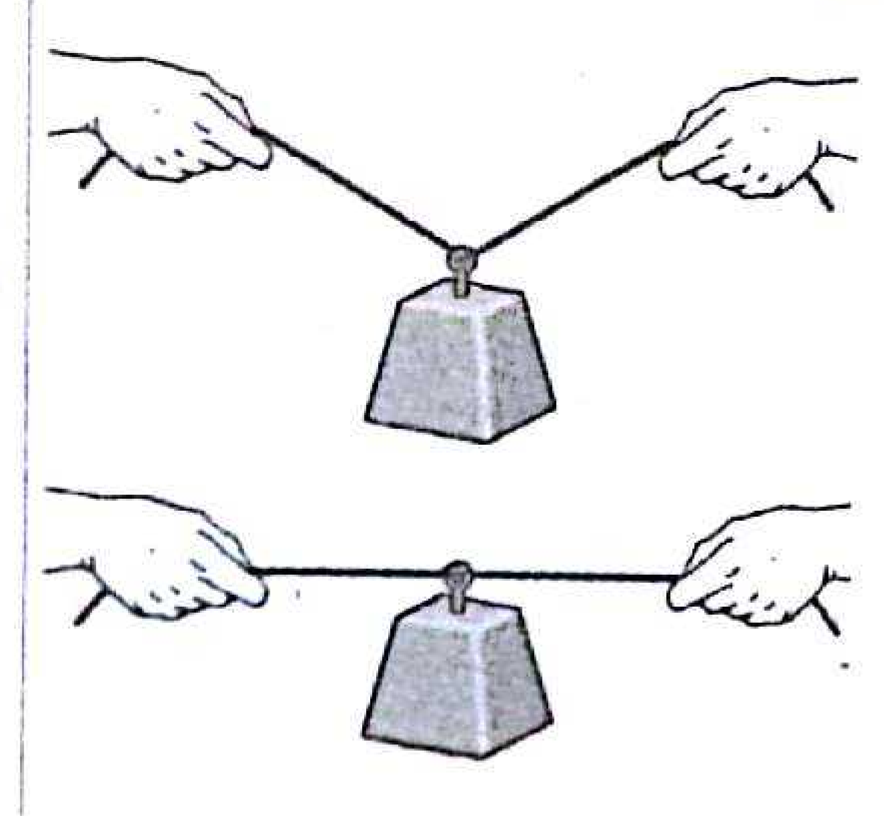


¿Cuál podría ser la orientación que toma la lámina después de alcanzarse el equilibrio de rotación?

PE 5.11. *¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda?*

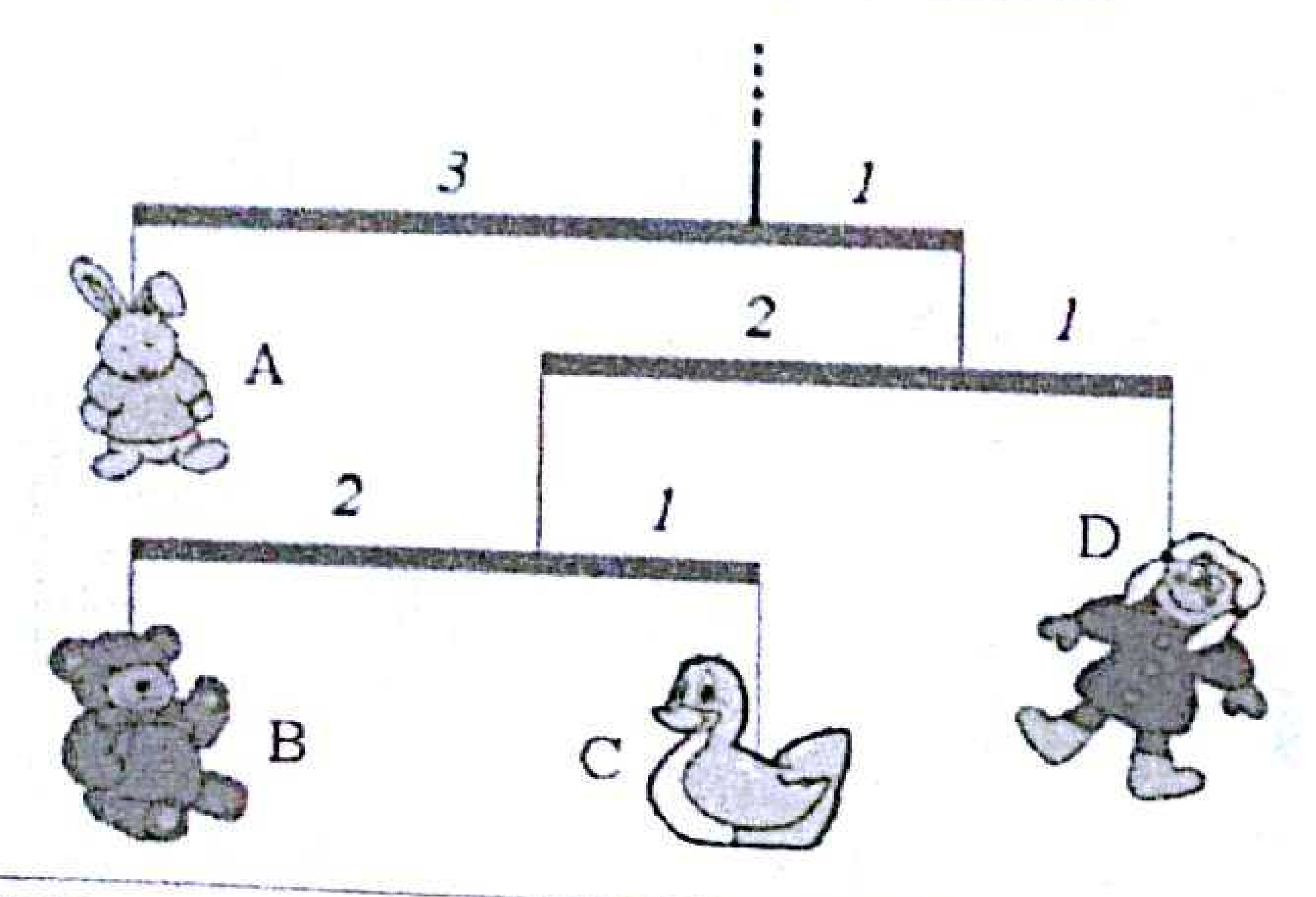
Una pesa de 10 N cuelga sostenida por el centro de una cuerda. Para lograr que la cuerda esté perfectamente horizontal hay que aplicar una tensión de......

a) 10 N
b) 100 N
c) 1000 N
d) 10000 N
e) mas de un millón de newtons



PE-5.12. *¿Cuál juguete pesa más, cuál pesa menos?*

En el móvil ornamental mostrado, las barras permanecen horizontales cuando las distancias relativas a cada lado de las cuerdas de suspensión son las que se indican.

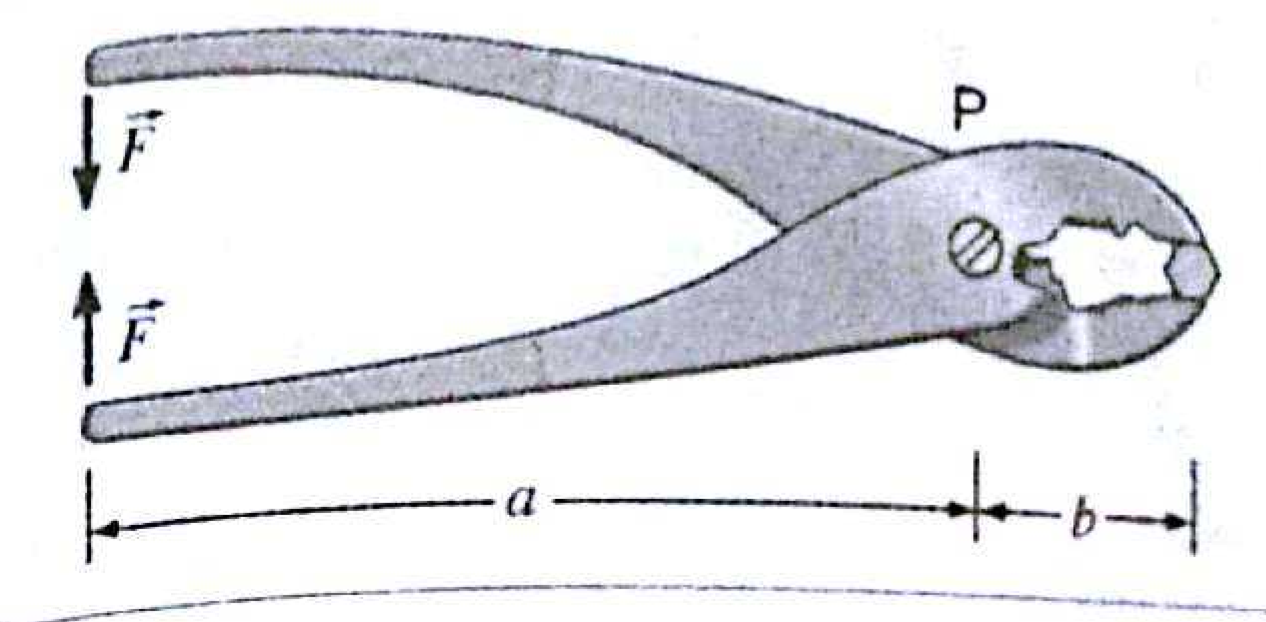


Las barras son de masa despreciable. Si comparamos los pesos de los diferentes juguetes que cuelgan podemos asegurar que:

a) $W_A > W_C > W_B > W_D$
b) $W_D > W_A > W_B > W_C$
c) $W_C > W_B > W_A > W_D$
d) $W_D > W_A > W_C > W_B$
e) $W_A > W_D > W_C > W_B$

PE-5.13. *Un alicate para aflojar una tuerca*

Un alicate consiste de dos partes rígidas idénticas que están unidas por un pivote en el punto P. ¿Si se presionan los extremos del alicate con una fuerza F, cuál será la fuerza ejercida sobre el pivote en P?



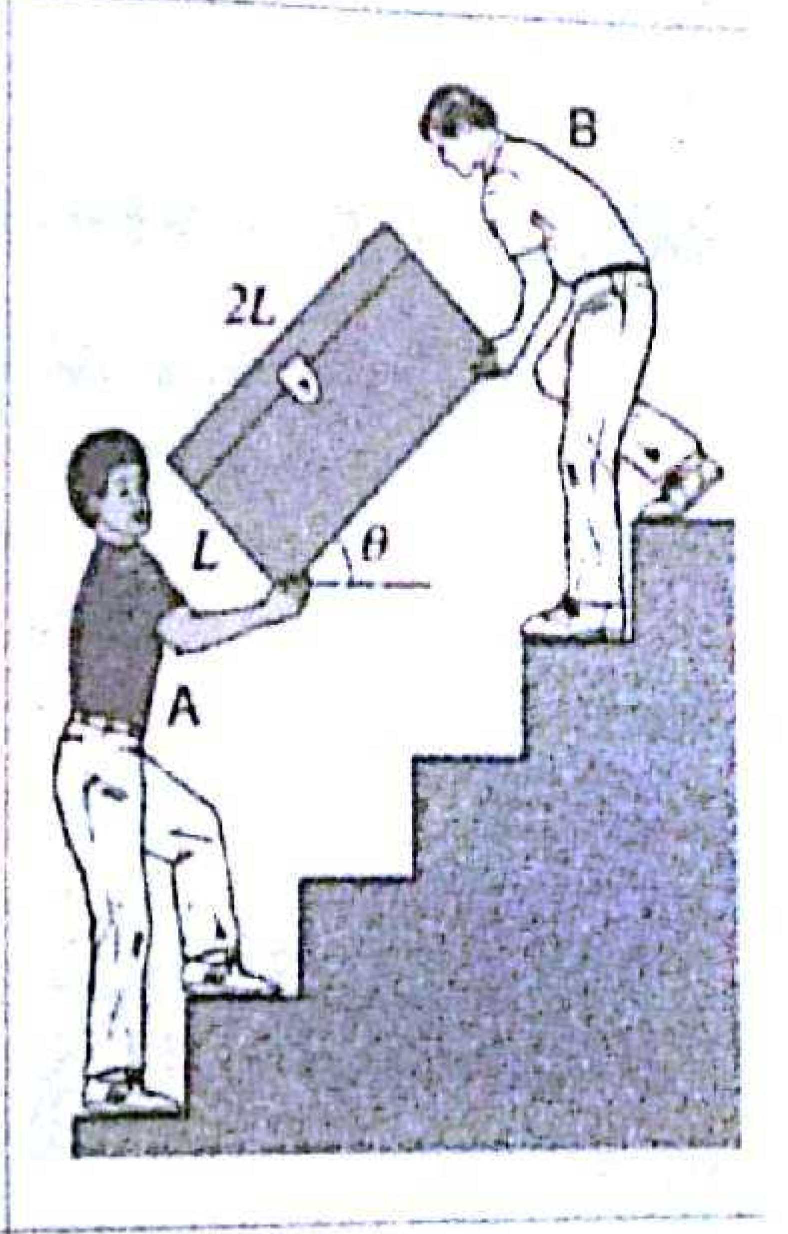
a) $F_P = F(\frac{a}{b})$,
b) $F_P = F(\frac{a+b}{b})$,
c) $F_P = F(\frac{b}{a})$
d) $F_P = F(\frac{a}{a+b})$
e) $F_P = F(\frac{b}{a+b})$

PE-5.14. *¿Qué es mejor: estar arriba o estar abajo?*

Dos alumnos A y B transportan un pesado baúl por una escalera, aplicando fuerzas verticales por debajo y en cada extremo. El baúl tiene una altura L y un largo $2L$ y su masa está distribuida de forma tal que el centro de masa está distribuida de forma tal que el centro de gravedad se encuentra en su centro geométrico. ¿Si el baúl forma un ángulo $\theta = 45°$ con la horizontal, cómo se comparan los pesos que soportan los dos alumnos?

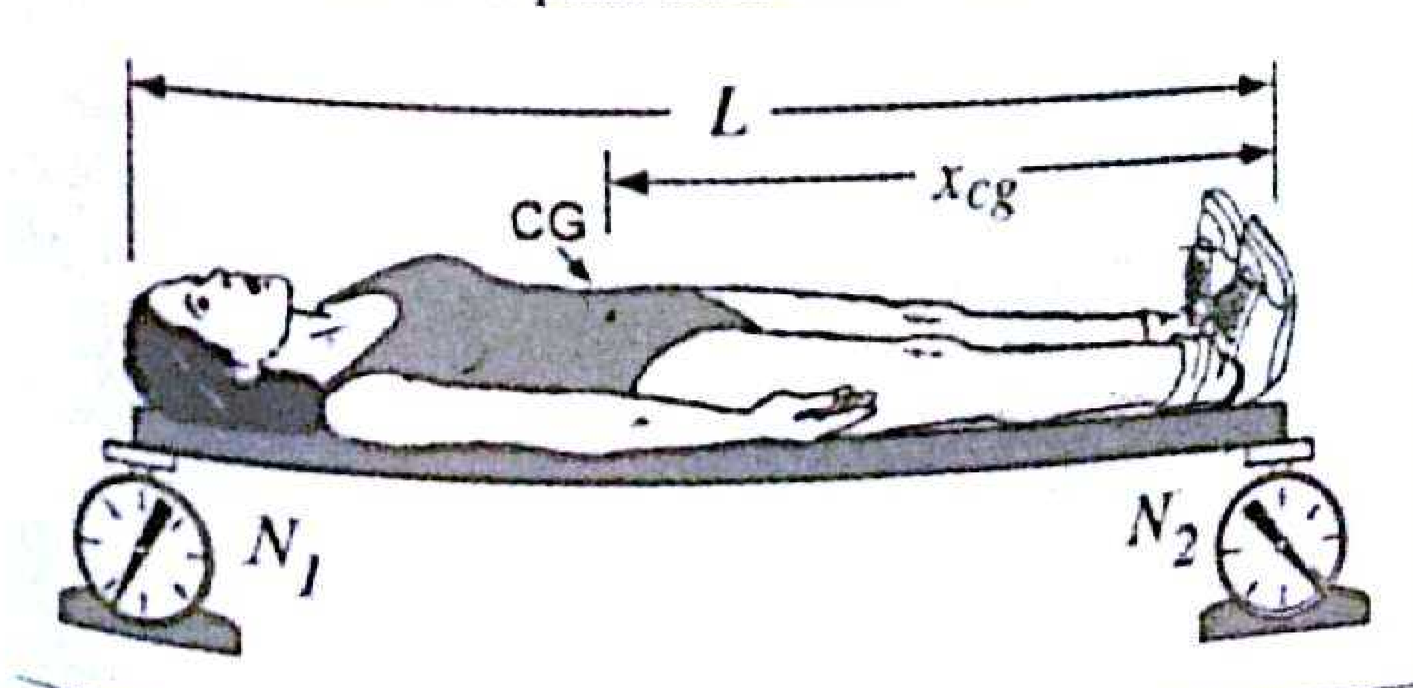
a) $F_A = 3F_B$,   b) $F_B = F_A$,   c) $F_A = 2F_B$,

d) $F_B = 2F_A$ e) $F_A = 4F_B$



PE-5.15. *¿Dónde queda tu centro de gravedad?*

Para determinar la ubicación de su centro de gravedad, una alumna se acuesta sobre una tabla liviana con su cuerpo extendido horizontalmente. Los extremos de la tabla están apoyadas sobre dos básculas. Las básculas se ajustan inicialmente para indicar cero con la tabla sola.



Si las lecturas de las básculas son: N_1 = 40 kg y N_2 = 32 kg. y la longitud total de la alumna en esa posición es L = 1,80 m, ¿A qué distancia de sus pies queda su centro de gravedad?

a) x_{cg} = 1,00 m
b) x_{cg} = 1,20 m
c) x_{cg} = 1,10 m
d) x_{cg} = 0,90 m
e) x_{cg} = 0,85 m

PE-5.16. *Una intrépida escaladora de rappel*

Una escaladora de rappel que pesa 600 N desciende por una pared vertical y, para descansar, apoya sus pies sobre una porción lisa de la pared. En la posición de equilibrio mostrada las fuerzas ejercidas por sus pies son perpendiculares a la cara de la pared y el ángulo entre la pared y la cuerda es $\theta = 36{,}9°$. La tensión de la cuerda en esa posición es:

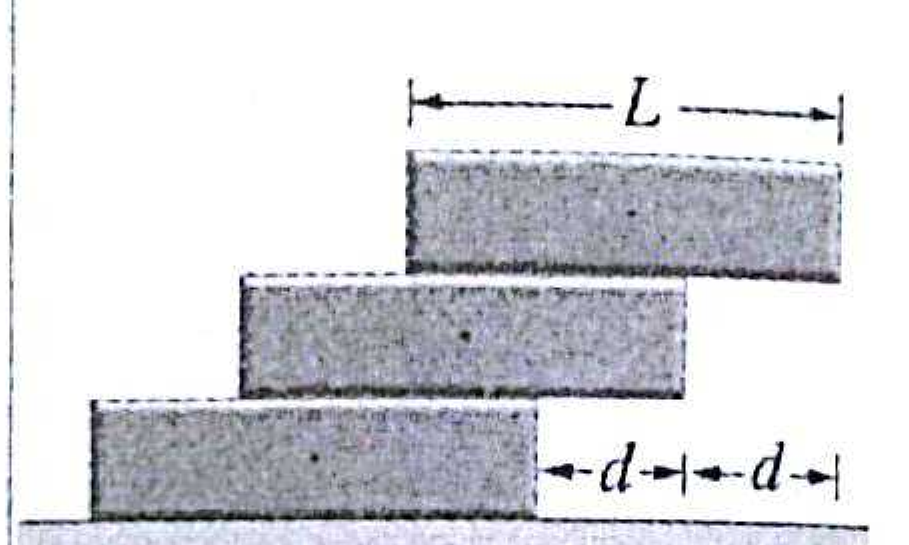


a) $T = 600$ N, b) $T = 999$ N, c) $T = 480$ N,

d) $T = 360$ N e) $T = 750$ N

PE-5.17. *Tres bloques colocados en escalera*

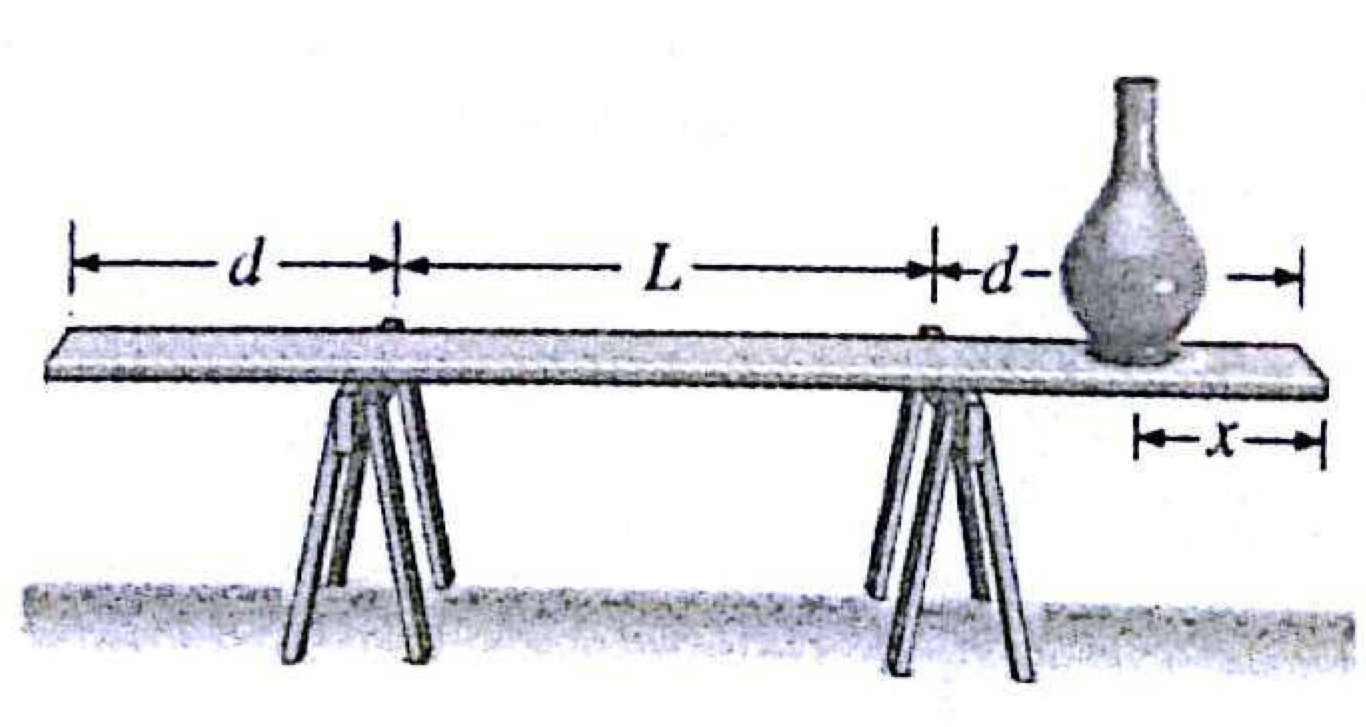
Tres bloques uniformes e idénticos, de ancho L son colocados en una superficie horizontal uno encima del otro, de forma tal que queden desplazados en la misma distancia d. ¿Cuál será la máxima distancia que pueden sobresalir sin que los bloques se volteen?



a) $d = \frac{L}{5}$, b) $d = \frac{L}{4}$, c) $d = \frac{L}{3}$, d) $d = \frac{L}{2}$, e) $d = \frac{2L}{5}$

PE-5.18. *¿Dónde se podrá colocar el jarrón?*

Una tabla uniforme de masa $M = 6$ kg está colocada simétricamente sobre dos caballetes que están separados por una distancia $L = 1{,}0$ m, de manera tal que sobresale a cada lado una distancia $d = 0{,}5$ m. Sobre la tabla se coloca un jarrón de masa $m = 8$ kg.

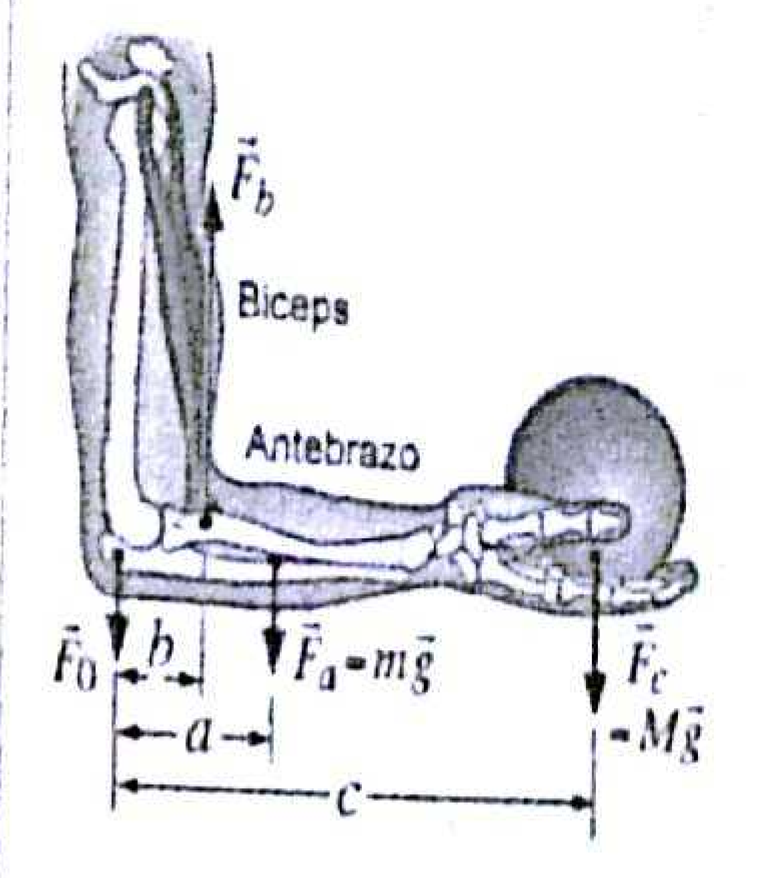


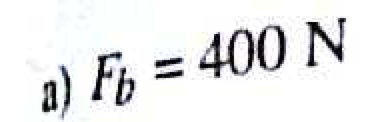
La tabla se volcará si el jarrón es colocado a una distancia horizontal x desde el extremo menor que:

a) 12,5 cm
b) 15,0 cm
c) 25,0 cm
d) 30,0 cm
e) 36,0 cm

PE-5.19. *La fuerza que soportan tus músculos bíceps*

La figura muestra un brazo humano en posición de ángulo recto, levantando una pelota. El antebrazo junto con la mano está en equilibrio bajo la acción de cuatro fuerzas: su propio peso $F_a = mg = 20$ N, el peso de la bola $F_c = Mg = 50$ N, la tensión $\vec{F}_b$ del tendón del bíceps y la fuerza F_0 ejercida sobre el antebrazo por la parte superior del brazo en el codo. Supongamos que CG del antebrazo está ubicado a una distancia $a = 15$ cm de la articulación del codo, y la distancia de la bola al punto pivote es $c = 34$ cm. ¿Cuál será la fuerza del músculo bíceps si su punto de aplicación dista una distancia $b = 5{,}0$ cm del pivote?



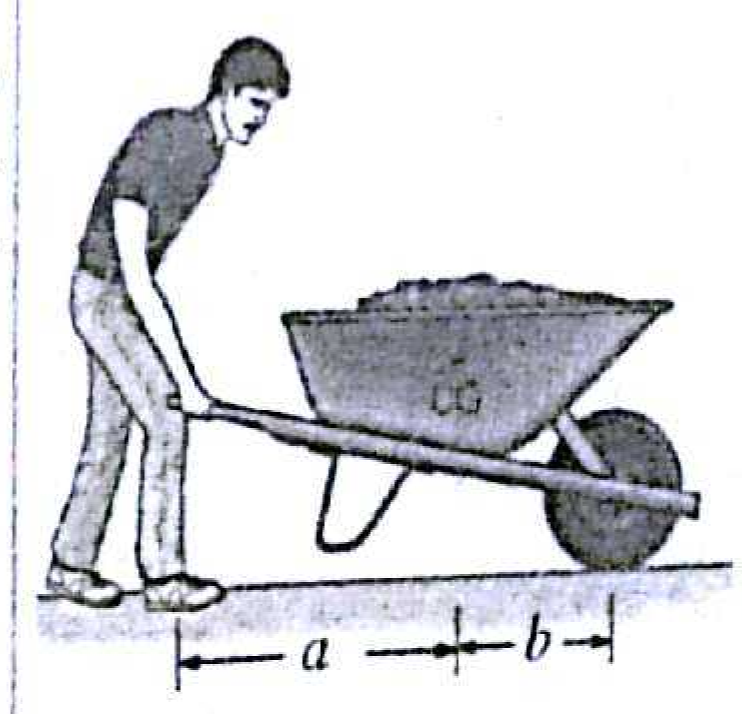


a) $F_b = 400$ N b) $F_b = 300$ N c) $F_b = 200$ N

d) $F_b = 150$ N e) $F_b = 70$ N

PE-5.20. *Fuerza para levantar la carretilla*

Una carretilla y su contenido tienen una masa de 40 kg. En la posición mostrada su centro de gravedad CG está a la distancia horizontal $b = 50$ cm del eje de la rueda y a una distancia horizontal $a = 90$ cm del punto donde es sostenida por el hombre. ¿Qué fuerza vertical se debe ejercer para mantener la carretilla en equilibrio?



a) 600 N, b) 400 N, c) 360 N, d) 280 N, e) 140N

PE-5.21. *El hilo del cartel está bajo tensión*

Un cartel rectangular de altura $a = 0{,}80$ m y ancho $b = 1{,}20$ m está sostenido de una pared mediante una articulación en una esquina inferior y un hilo en su esquina superior. Si la masa del cartel es uniforme y su peso es de 160 N, el hilo está sometido a una tensión de...

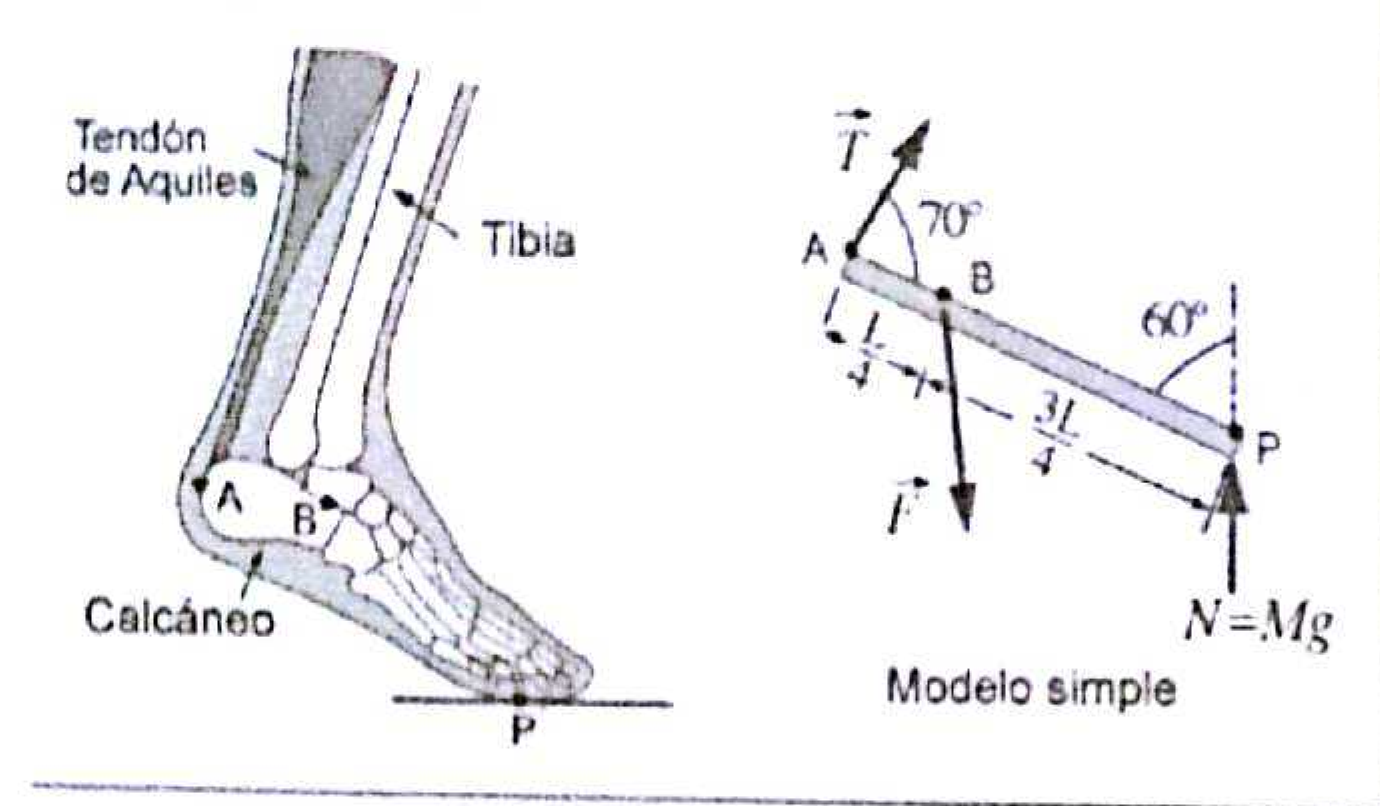


a) $T = 240$ N, b) $T = 180$ N, c) $T = 160$ N,

d) $T = 120$ N, e) $T = 60$ N

PR-5.22. *La gran fortaleza del tendón de Aquiles*

El tendón de Aquiles es una banda fibrosa que sirve para transmitir fuerzas desde los músculos de la pantorrilla al hueso calcáneo, posibilitando la flexión del pie, caminar de puntillas y despegar el pie del suelo. La figura muestra la estructura anatómica de un pie cuando hace contacto con el suelo en un punto P.



A la derecha se representa un modelo mecánico simple para esta situación. ¿Cuál sería el valor de la fuerza T que ejercen los músculos del tendón de Aquiles cuando una persona de peso Mg está parada de puntillas sobre un solo pie?

a) $T = 1{,}6\ Mg$
b) $T = 2{,}8\ Mg$
c) $T = 5{,}6\ Mg$
d) $T = 0{,}5\ Mg$
e) $T = 0{,}1\ Mg$

CAP. 5: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
5.01				√	
5.03			√		
5.05					√
5.07		√			
5.09				√	
5.11					√
5.13		√			
5.15	√				
5.17			√		
5.19	√				
5.21				√	

	a	b	c	d	e
5.02	√				
5.04		√			
5.06			√		
5.08				√	
5.10			√		
5.12				√	
5.14	√				
5.16					√
5.18	√				
5.20					√
5.22		√			

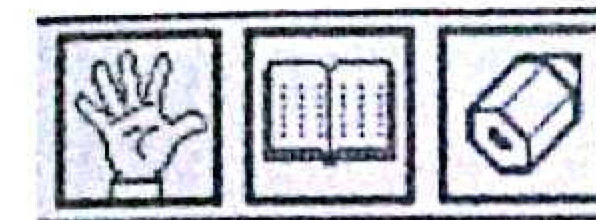
6

GRAVITACIÓN Y FUERZAS CENTRALES

La gravitación es la responsable del peso de los cuerpos, es la que provoca su caída cerca de la Tierra, la que mantiene la Luna en su órbita en torno a la Tierra, y a todos los planetas ligados al Sol. Es un fenómeno general (universal) que se manifiesta entre dos objetos materiales cualesquiera. Esta idea genial formulada por Newton a los 23 años de edad, fue fundamentada en ciertas leyes empíricas que habían sido propuestas por Kepler para explicar los datos astronómicos sistemáticos y precisos de Nicolás Copérnico y Tycho Brahe. La ley de gravitación de Newton establece que cada partícula del universo atrae a todas las demás con una fuerza que es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Estrictamente, esta ley tiene validez para masas puntuales, y para el caso de cuerpos extendidos se les puede considerar como una colección de partículas para calcular la fuerza total como la suma de las fuerzas debidas a todas las partículas, usando el cálculo integral que el mismo Newton se vio en la necesidad de inventar. Para el caso de los cuerpos con distribución esférica de masa, encontraremos que la fuerza sería la misma que si las masas estuviesen concentradas en su centro. Una propiedad importante de la fuerza gravitatoria es que es una fuerza central, es decir, su línea de acción pasa por un punto fijo y no ejerce torque alrededor de este punto, como consecuencia, el momento angular se conserva. Además, la fuerza gravitatoria es conservativa y se presta para una descripción en términos de energía potencial. La conservación de la energía y del momento angular nos permitirá mostrar que la trayectoria de un planeta o satélite moviéndose bajo la influencia de la fuerza de gravedad es, en general, una elipse con el centro de fuerzas situado en uno de los focos.

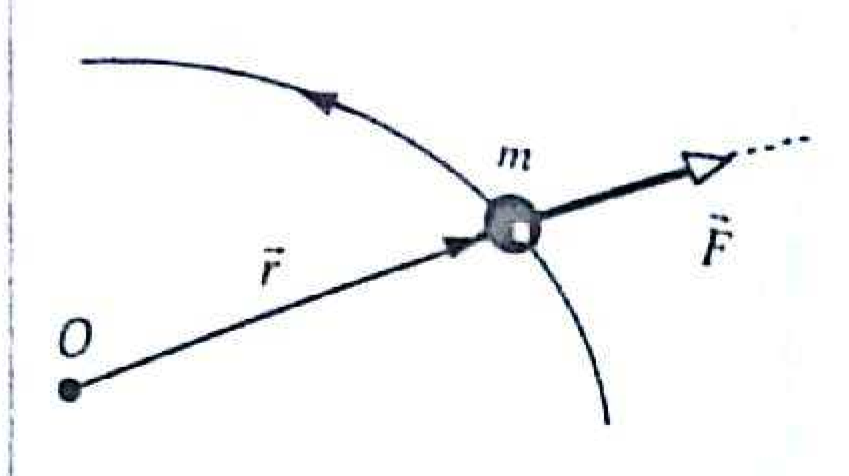
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Las tres leyes de Kepler
- La ley de gravitación universal de Newton
- La gravedad cerca de la superficie terrestre
- Energía potencial gravitatoria
- Energías en el movimiento de los satélites
- Teoría de la gravitación de Einstein



FUERZAS CENTRALES

Una fuerza central es cualquier tipo de fuerza (de atracción o de repulsión) cuya dirección siempre pasa a través de un punto fijo. Son ejemplos de fuerzas centrales, la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta y la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas.



$$\vec{F} = \pm F_r \hat{r}$$

Como la dirección de la fuerza central siempre pasa por un punto O, entonces los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ permanecen paralelos, y el torque debido a esta fuerza, en relación a O, es cero:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = d\vec{L}/dt = 0$$

Por lo tanto, cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular en relación con el centro de la fuerza es una constante del movimiento.

Fuerza central
$\vec{\tau} = 0$
$\vec{L}$ *se conserva*

LAS TRES LEYES DE KEPLER

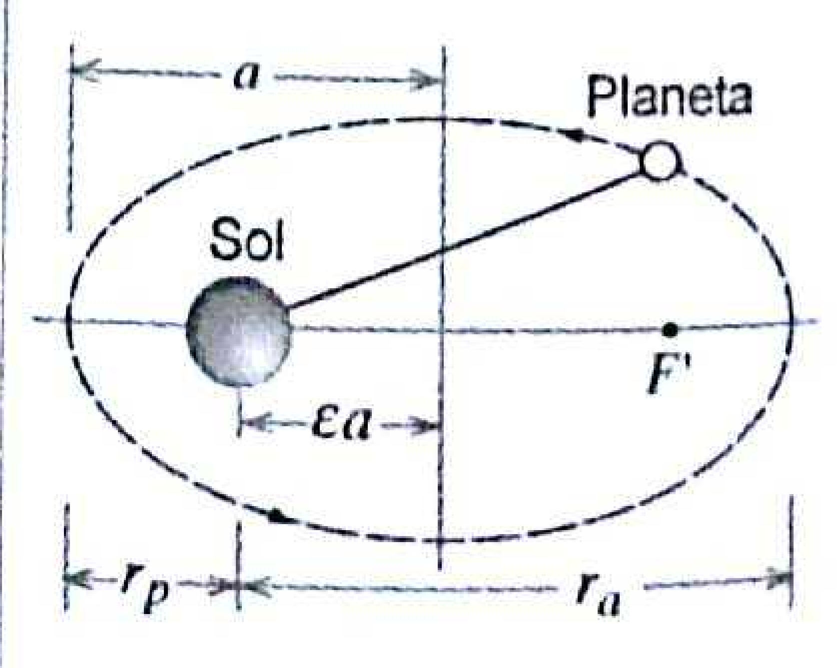
Con anterioridad a la formulación de la Ley de Gravitación Universal por parte de Isaac Newton, Johannes Kepler había enunciado tres leyes empíricas basándose en las observaciones astronómicas precisas que había compilado Tycho Brahe (1546-1601). Aunque estas leyes explicaban correctamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol, para la época no se tenía ninguna idea las razones de este comportamiento.



Johannes Kepler (1571 -1630)

1ª LEY DE KEPLER: *LEY DE LAS ÓRBITAS*

Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas teniendo al Sol como uno de los focos (La demostración de esta ley está dada en el problema PR 6-21)
Recordemos que una órbita elíptica puede ser descrita por dos parámetros: el *semieje mayor a* y la *excentricidad* ε. La distancia desde el centro de la elipse hasta uno de los focos es εa. La máxima distancia desde el Sol al planeta es el *apogeo*: $r_a = a(1+\varepsilon)$, mientras que la mínima distancia del planeta al Sol es el *perigeo*: $r_p = a(1-\varepsilon)$.



Elipse de semieje mayor *a*
y excentricidad ε

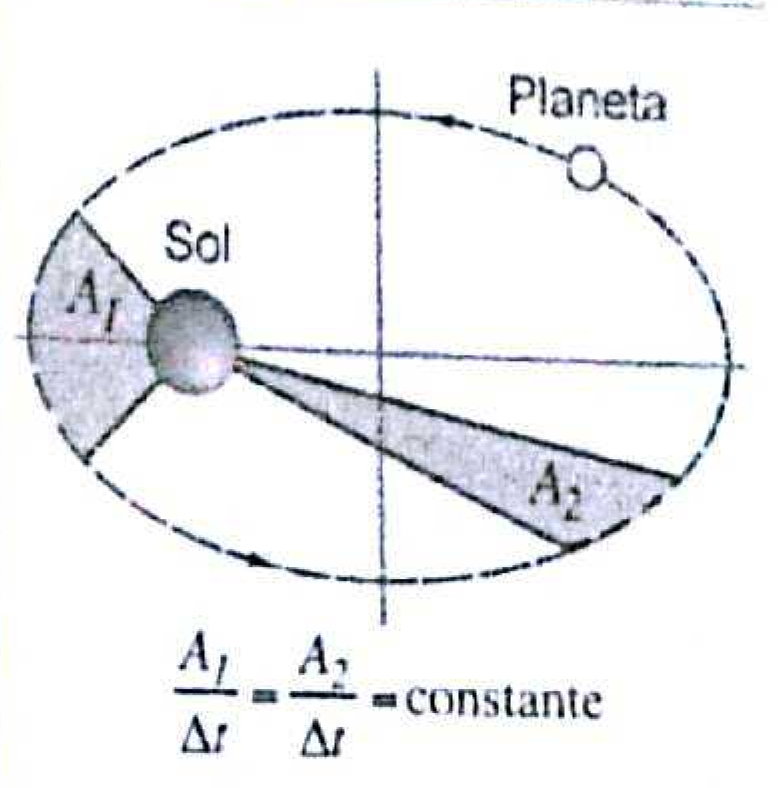
Una *órbita circular* se considera como el caso especial de una órbita elíptica que no tiene excentricidad ($\varepsilon = 0$). En este caso los dos focos coinciden en el centro del círculo.

Órbita circular: $\varepsilon = 0$
$r_p = r_a = a$

2ª LEY DE KEPLER: *LEY DE LAS ÁREAS*

El radio-vector que une al Sol con cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. (Problema PR.-6.22)

Según esta ley, el planeta en órbita se mueve más rápidamente cuando está cerca del Sol que cuando está lejos. La ley de las áreas es consecuencia de que la fuerza de gravedad es una fuerza central y por lo tanto, se conserva el momento angular.



$$\frac{A_1}{\Delta t} = \frac{A_2}{\Delta t} = \text{constante}$$

3ª LEY DE KEPLER: *LEY DE LOS PERÍODOS*

El cuadrado del periodo orbital *T*, de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semi eje mayor *a* de la órbita elíptica:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$$

Siendo *M* la masa del Sol. Esta relación es independiente de la masa del cuerpo que orbita. (Problema PR.-6.23).

LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Fue el genio de Isaac Newton el que vino a desentrañar el significado de los descubrimientos empíricos resumidos en las tres leyes de Kepler. Para lograr esto, se vio en la necesidad primero de inventar nuevas herramientas matemáticas, el cálculo diferencial e integral. Se le ocurrió a Newton que la fuerza que mantiene los planetas dando vueltas alrededor del Sol debía ser la misma que aquella que provoca que los cuerpos caigan aceleradamente en la Tierra. Esta fuerza, que llamamos de gravedad, debe actuar entre cualesquiera dos partículas del universo.



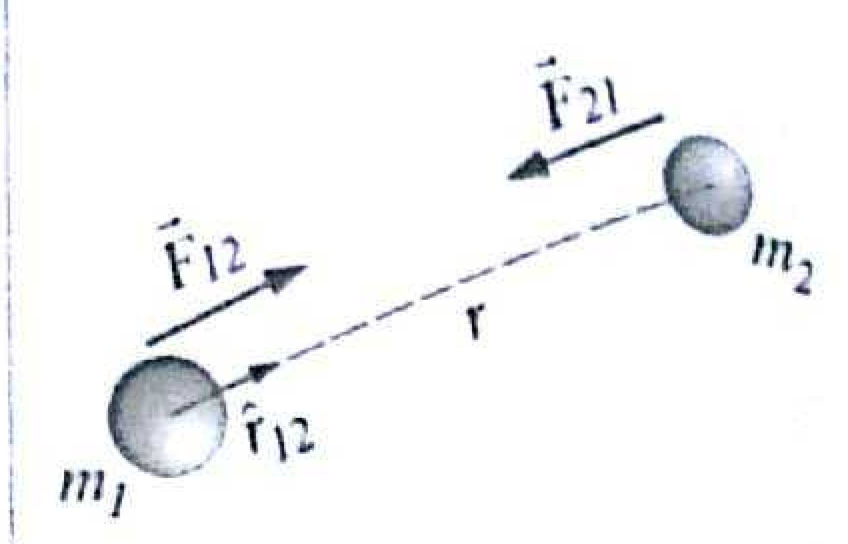
Sir Isaac Newton (1643 -1727)

La ley de gravitación de Newton establece que, todo cuerpo puntual de masa m_1 ejerce una fuerza atractiva sobre otro de masa m_2, que es proporcional a las masas de los dos cuerpos e inversamente proporcional a la distancia *r* que los separa.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde G es la llamada constante de gravitación universal. En forma vectorial, la fuerza ejercida sobre m_2 por m_1 es:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\eta}_{12}$$



Donde el vector unitario $\hat{\eta}_{12}$ tiene su origen en la partícula m_1 que ejerce la fuerza y el signo (-) indica que la fuerza es atractiva. La fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida por m_2 sobre m_1, tiene el mismo módulo y dirección que $\vec{F}_{21}$ pero su sentido es contrario, según la tercera ley de Newton.

Constante de gravitación
$G = 6{,}67\text{x}10^{-11}$ N.m^2/kg^2

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\eta}_{12}$$

La expresión anterior es aplicable a cuerpos cuyo tamaño sea pequeño frente a la distancia que los separa. Cuando tenemos objetos extensos, se procede a dividir estos en elementos infinitesimales de masa. Esta fue una de las motivaciones que tuvo Newton para inventar el calculo diferencial e integral.

Acción y reacción:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Las fuerzas gravitatorias obedecen el principio de superposición; esto es, la fuerza total sobre una partícula i es la suma de las fuerzas ejercidas por las demás partículas sobre esta actuando independientemente.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \vec{F}_{3i} + ... = \sum_{j \neq i}\vec{F}_{ji}$$

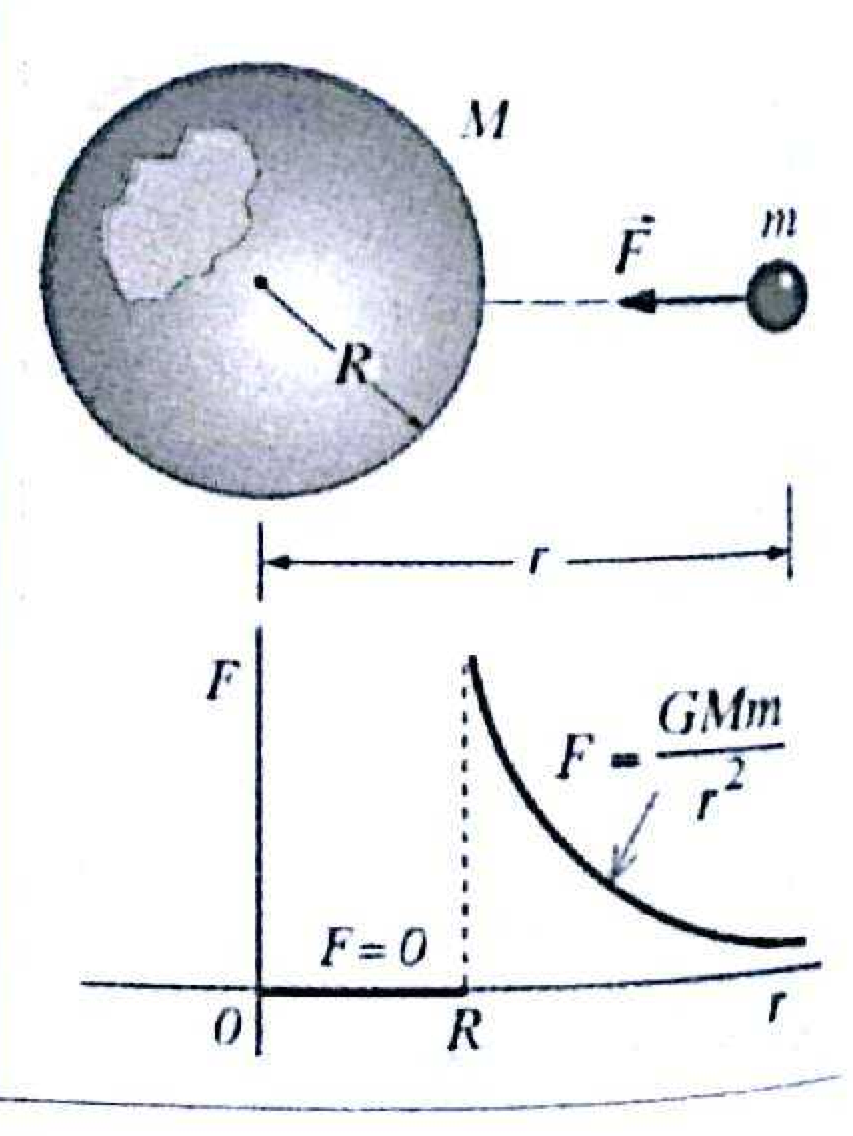
FUERZA DE UN CASCARÓN ESFÉRICO

Si una partícula de masa m se localiza fuera de un cascarón esférico uniforme de masa M y radio R, el cascarón atrae la partícula como si la masa del cascarón estuviera concentrada en su centro, (Problema PR-6.07).

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad r \geq R$$

Si la partícula se localiza en el interior del cascarón, la fuerza sobre ella es cero, (Problema PR-6.07).

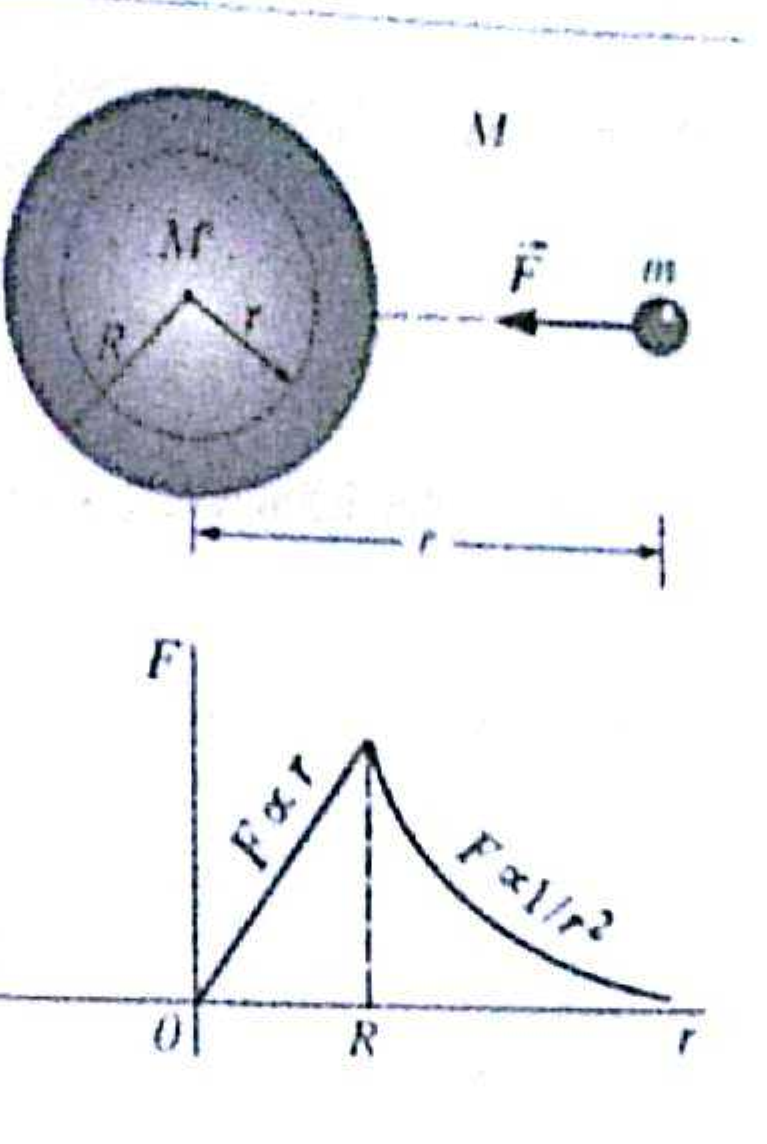
$$F = 0 \qquad r < R$$



FUERZA DE UNA ESFERA SÓLIDA

Si una partícula de masa m se localiza fuera de un esfera maciza uniforme de masa M y radio R, la esfera atrae la partícula como si su masa estuviera concentrada en su centro. Esto se deduce si consideramos la esfera como una colección de cascarones esféricos concéntricos. La fuerza es:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad r \geq R$$



Si la partícula se localiza dentro de la esfera sólida homogénea de masa M, la fuerza sobre m sólo se debe a aquella porción de masa, M' contenida dentro de la esfera de radio $r < R$.

$$F = G\frac{M'm}{r^2} = G\frac{Mm}{R^3}r \qquad r < R$$

Donde hemos sustituido la masa M' a partir de la relación de los volúmenes ($V'/V = M'/M = r^3/R^3$). Si la esfera no fuera uniforme pero tuviese una densidad ρ que fuera una función de r solamente (masa con simetría esférica), entonces se evalúa M' a partir de la integral de volumen.

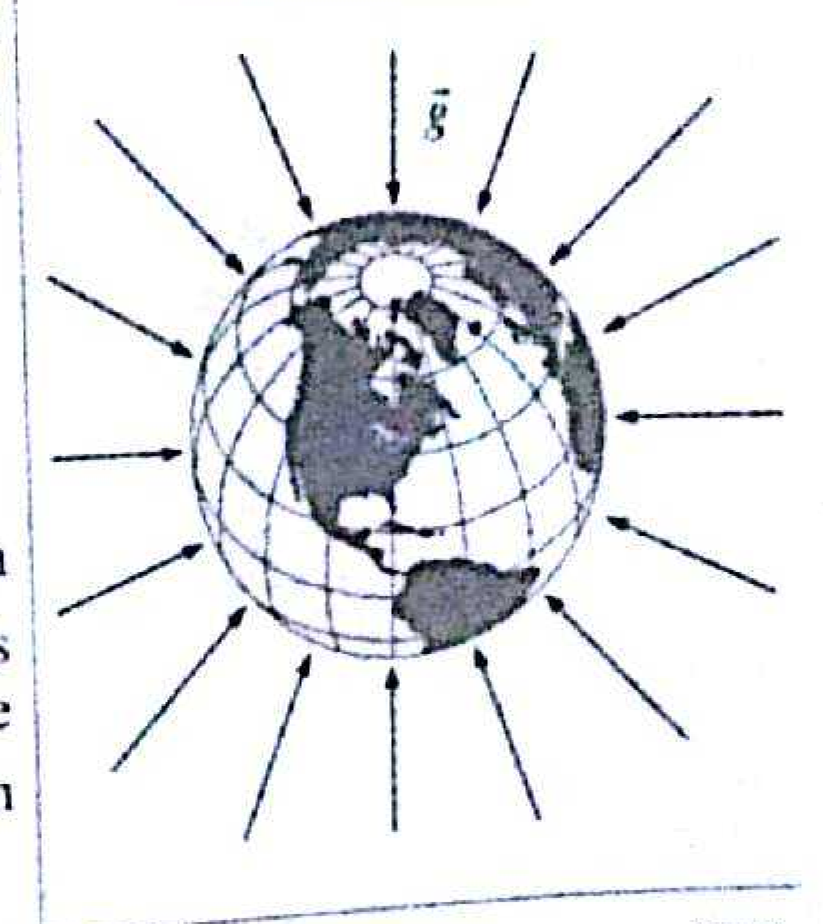
EL CAMPO GRAVITATORIO

Para describir el hecho de que entre los cuerpos se ejerce una fuerza atractiva gravitatoria a distancia, se introduce la idea de que todo cuerpo modifica el espacio a su alrededor produciendo un *campo gravitatorio*. De tal manera que si colocamos una partícula testigo en un punto dado, ésta interacciona con el campo gravitatorio que allí existe debido a la presencia de otros cuerpos. Se define el campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto del espacio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa:

Campo gravitatorio: La fuerza gravitatoria por unidad de masa

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{g} = \vec{F}_g / m \qquad \text{(N/kg)}$$



Donde $\vec{F}_g$ es la fuerza gravitatoria sobre la partícula testigo de masa m debida a todas los demás cuerpos. Es importante aclarar que, aunque $\vec{g}$ tiene unidades de aceleración (N/kg = m/s^2), el campo gravitatorio es un concepto diferente al concepto de aceleración.

Una vez conocida la intensidad de campo en un punto del espacio, se puede determinar la fuerza que se ejerce sobre una partícula de masa m, es decir su peso, $\vec{W} = m\vec{g}$.

Peso de un cuerpo (en newtons)

$\vec{W} = m\vec{g}$

LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

La fuerza ejercida por la Tierra sobre un cuerpo de masa m a cierta altura $h << R_T$ sobre la superficie terrestre es:

$$F = \frac{GM_T m}{r^2} = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

Si la única fuerza que actúa sobre un cuerpo es la gravitatoria, éste caerá libremente con una aceleración cuyo valor promedio es:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24}\,\text{kg})}{(6{,}37\text{x}10^6\text{m})^2} = 9{,}80\text{m/s}^2$$

Cerca de la superficie terrestre

$$a = g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}80\text{m/s}^2$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La fuerza de gravedad se caracteriza porque el trabajo que realiza sólo depende de las posiciones inicial y final, y no de la trayectoria del recorrido. Es decir, es una *fuerza conservativa* y por lo tanto podemos definir una función escalar energía potencial U:

$$U_B - U_A = -W_{A\to B} = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_g \bullet d\vec{r}$$

$$U_B - U_A = -\int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right) \bullet d\vec{r} = GMm\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

Resulta conveniente escoger el "cero de referencia" para la energía potencial, con el punto inicial A en el infinito. Así, cuando una partícula de masa m es trasladada desde el infinito hasta una distancia r de otra partícula de masa M, su energía potencial gravitatoria es:

$$U(r) - 0 = GMm\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r}\Big|_{\infty}^{r} = -\frac{GMm}{r}$$

Energía potencial gravitatoria entre dos partículas m y M:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Tomando $U = 0$ en $r = \infty$

Vemos que la energía potencial gravitatoria es cero en el infinito y se va haciendo cada vez mas negativa (disminuye) al disminuir la separación r.

ENERGÍA POTENCIAL CERCA DE LA TIERRA

La energía potencial asociada a una partícula de masa m en la superficie terrestre y a una altura h por encima son, respectivamente:

$$U(R_T) = -\frac{GM_T m}{R_T} \qquad U(R_T + h) = -\frac{GM_T m}{(R_T + h)}$$

El cambio en la energía potencial es:

$$U(R_T + h) - U(R_T) = -\frac{GM_T m}{(R_T + h)} + \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{GM_T mh}{(R_T + h)R_T}$$

Si la altura es despreciable frente al radio terrestre ($h << R_T$), luego: $R_T + h \cong R_T$ y se obtiene la expresión familiar de la variación de energía potencial con la altura.

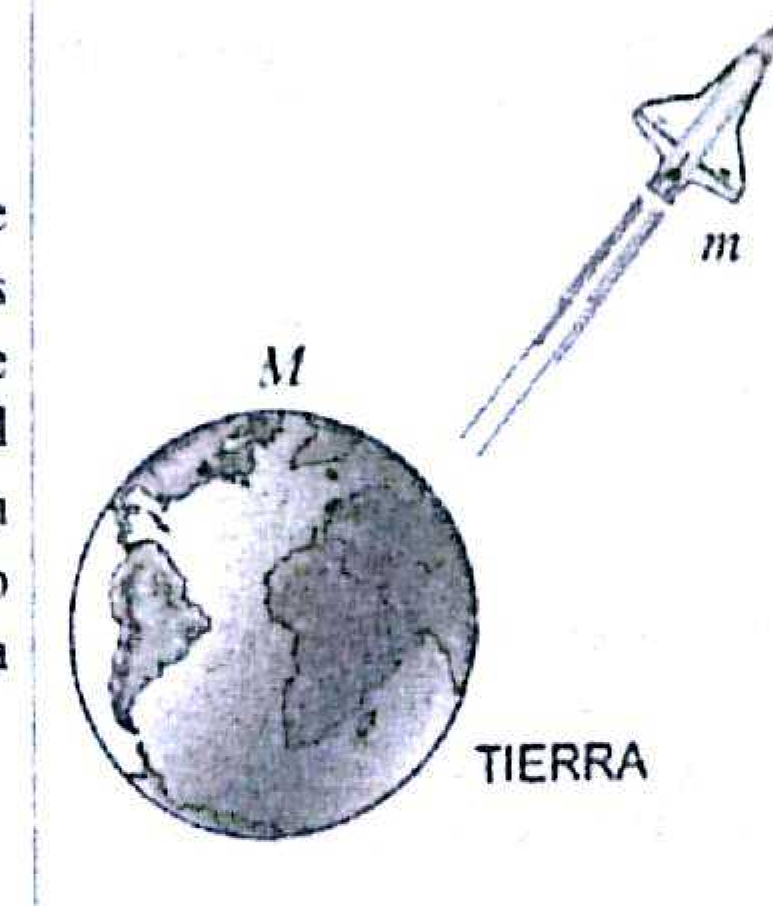
$$\Delta U = \frac{GM_T m}{R_T^2}h = mgh$$

Variación de la energía potencial cerca de la superficie terrestre

$$\Delta U = \frac{GM_T m}{R_T^2}h = mgh$$

VELOCIDAD DE ESCAPE

Suponga que un proyectil de masa m es disparado desde la superficie terrestre. Mediante consideraciones energéticas, podemos encontrar el valor mínimo que debe tener su velocidad inicial, v_e, para que pueda escapar del campo gravitatorio terrestre. Aplicando la conservación de la energía mecánica total en el instante del lanzamiento cuando abandona la superficie terrestre y cuando alcanza una distancia infinita a la Tierra:



$$E = U_o + K_o = U_\infty + K_\infty$$

$$E = U + K = -G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0 + 0$$

Si despejamos v_e, encontramos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})}{6{,}37\text{x}10^6}} = 11{,}2\text{km/s}$$

Velocidad de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11{,}2\text{km/s}$$

La velocidad de escape es la misma para todos los objetos (de cualquier masa m) y es independiente de la dirección con la que el cuerpo abandona la superficie terrestre.

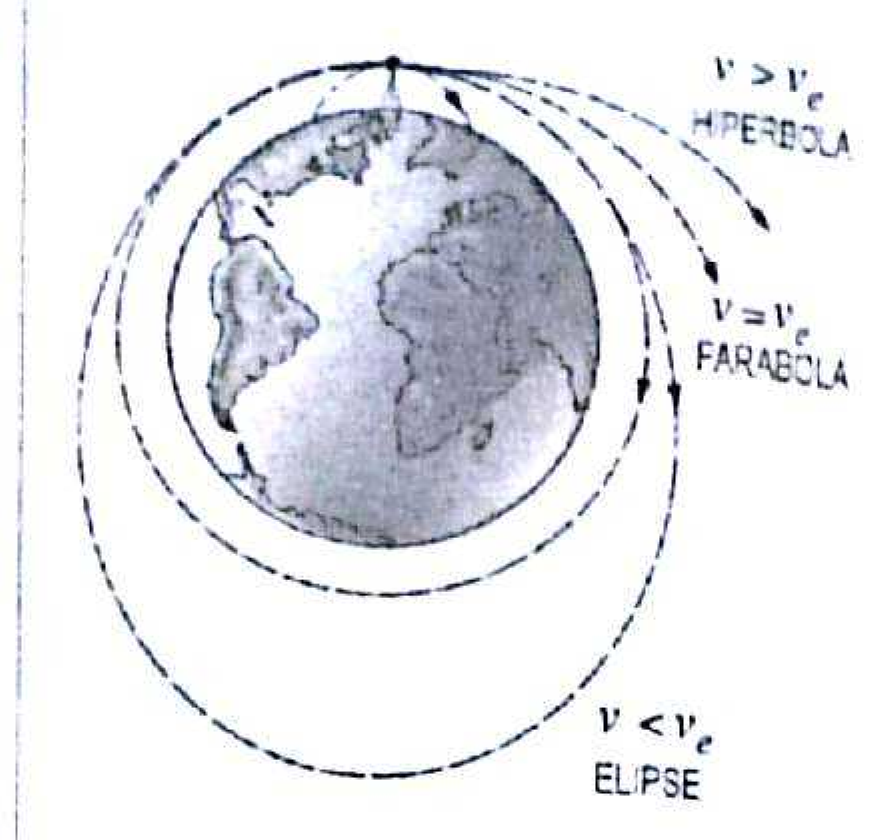
ENERGÍAS EN EL MOVIMIENTO DE SATÉLITES

Suponga un objeto que es lanzado con diferentes velocidades en forma horizontal desde la superficie terrestre.

Si la velocidad del objeto es mayor que la velocidad de escape ($v > v_e$), su energía total es positiva ($E > 0$), y el objeto se escapará de la Tierra siguiendo una *hipérbola*.

Si la velocidad del objeto es igual a la velocidad de escape ($v = v_e$), su energía total es cero ($E = 0$), el objeto se escapará de la Tierra describiendo una *parábola*.

Si la velocidad del objeto es menor que la de escape ($v < v_e$), su energía total es negativa ($E < 0$), el objeto quedará ligado a la Tierra y su trayectoria será una *elipse* (o una *circunferencia*). Si su velocidad es muy pequeña ($v << v_e$), la órbita elíptica interseca la Tierra y el satélite chocará con su superficie.



Trayectorias que seguiría una partícula lanzada horizontalmente por encima de la superficie terrestre

TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

El atributo de una cuerpo que es responsable de su interacción gravitatoria con otros cuerpos, se denomina *masa gravitatoria*. Esta masa, m_g, es la que medimos cuando comparamos los pesos de dos cuerpos por medio de una balanza. Por otro lado, el atributo del cuerpo que cuantifica su resistencia a ser acelerado por *cualquier fuerza*, se denomina *masa inercial*. Esta masa, m_i, es la que se refiere la segunda ley de Newton.

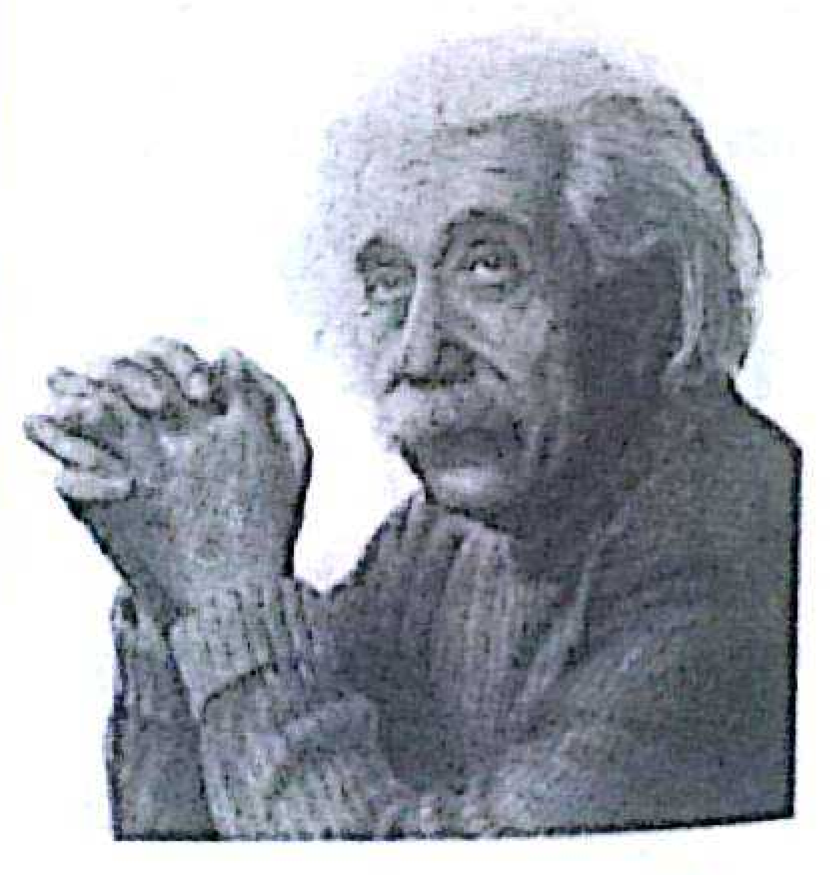
Masa gravitatoria m_g

$$F = G\frac{m_g M}{r^2} = m_g g$$

Masa inercial

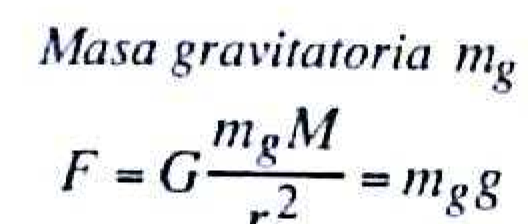
$$F = m_i a$$

La equivalencia de los dos tipos de masas no es obvia y hasta ahora no se ha detectado experimentalmente ninguna diferencia numérica entre ellas. La igualdad numérica entre las masa gravitatoria y la masa inercial ($m_g = m_i$), llevó a Einstein a la conclusión de que no hay manera de que un observador pueda distinguir si está en un marco de referencia acelerado en ausencia de gravedad o si está en reposo en presencia de un campo gravitatorio uniforme. Este es el llamado *principio de equivalencia* que constituye el fundamento de una teoría mas exacta de la gravitación conocida como teoría general de la relatividad.



Albert Einstein (1879-1955)

La teoría de Einstein se reduce a la teoría de Newton para cuerpos que se mueven con velocidades pequeñas en comparación con la de la luz ($v << c$) y cuando las energías potenciales gravitacionales sean pequeñas $GMm / r << mc^2$.

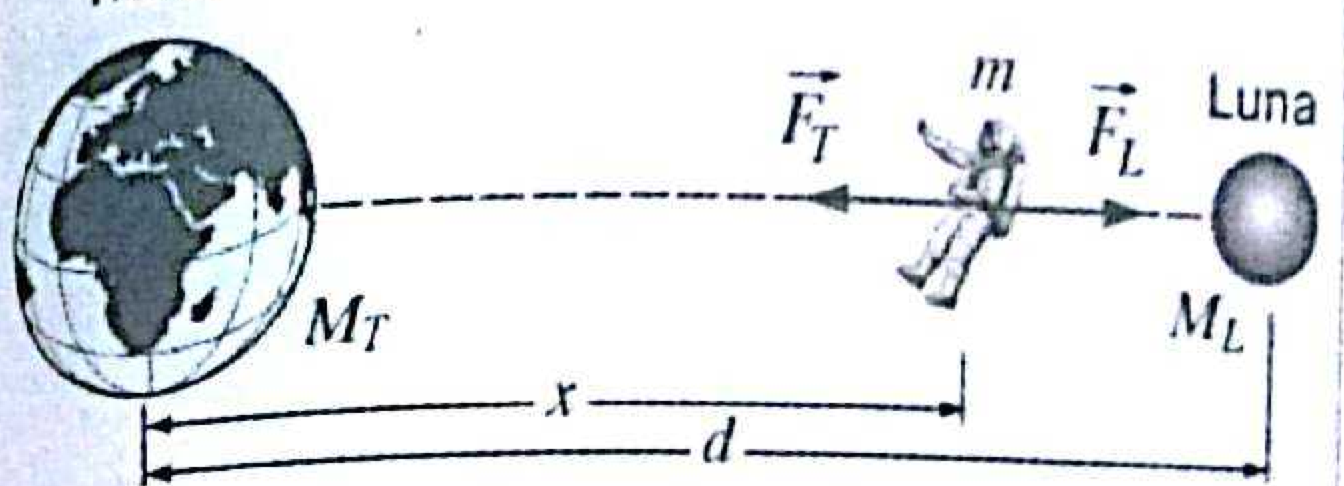


PROBLEMAS RESUELTOS

PR-6.01. *Gravedad nula entre la Tierra y la Luna*

Existe un punto entre la Tierra y la Luna donde la atracción de ambos sobre una nave espacial, se equilibran.

Si ignorásemos la presencia del Sol y de los otros planetas, ¿en qué punto a lo largo de la línea que conecta la Tierra y la Luna, la fuerza gravitacional sobre un objeto es igual a cero.?



Solución: Sea d la distancia Tierra-Luna y x la distancia del objeto a la Tierra. La fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m es:

$$F_{neta} = F_L - F_T = Gm[\frac{M_T}{x^2} - \frac{M_L}{(d-x)^2}] = 0$$

$$\frac{M_T}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2}$$

$$(d-x)^2 = \frac{M_L}{M_T}x^2 \quad \Rightarrow \quad d - x = \pm\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}x$$

La solución física para x comprendida entre 0 y d es:

$$x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{7{,}35\text{x}10^{22}\text{kg}}{5{,}98\text{x}10^{24}\text{kg}}}} = 0{,}90d$$

La posición del objeto está a 9/10 de la distancia a la Luna y es independiente de la masa m del objeto.

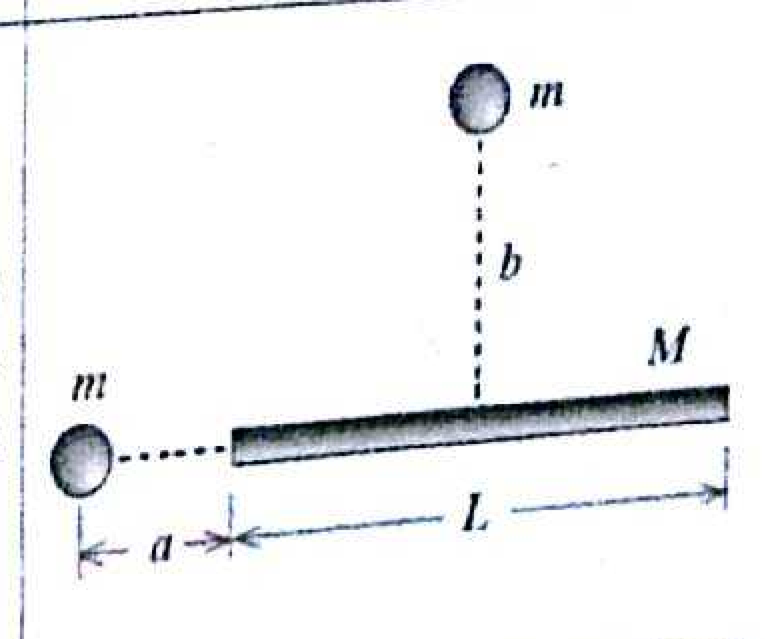
Respuesta: $x = 0{,}90d$

PR-6.02. *Fuerza entre una partícula y una barra*

Una partícula de masa m está a una cierta distancia de una barra delgada de longitud L y masa uniforme, M. Calcule la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre la partícula, si esta se encuentra:

a) En el eje de la barra y a una distancia a de un extremo.

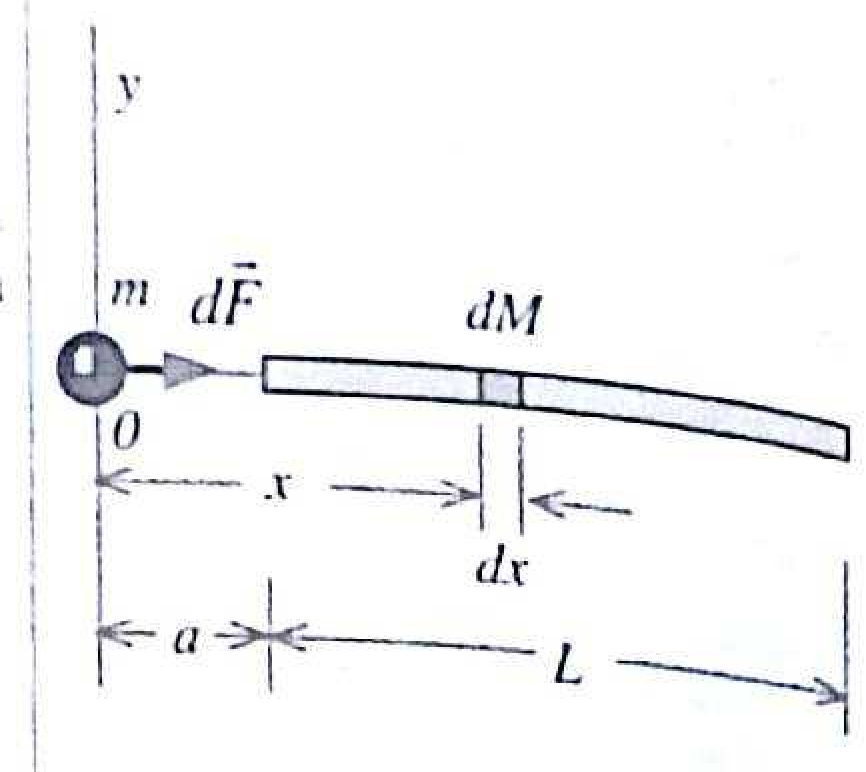
b) En la línea de simetría y a una distancia b de la barra.



Solución: a) En la barra escogemos un segmento infinitesimal de longitud dx y masa dM. Como la masa es uniforme, $dM/M = dx/L$, luego el elemento de masa es:

$$dM = (M/L)dx$$

Las fuerzas sobre m debida a todos los elementos dM son atractivas y apuntan hacia la derecha, por lo tanto, la fuerza total es:



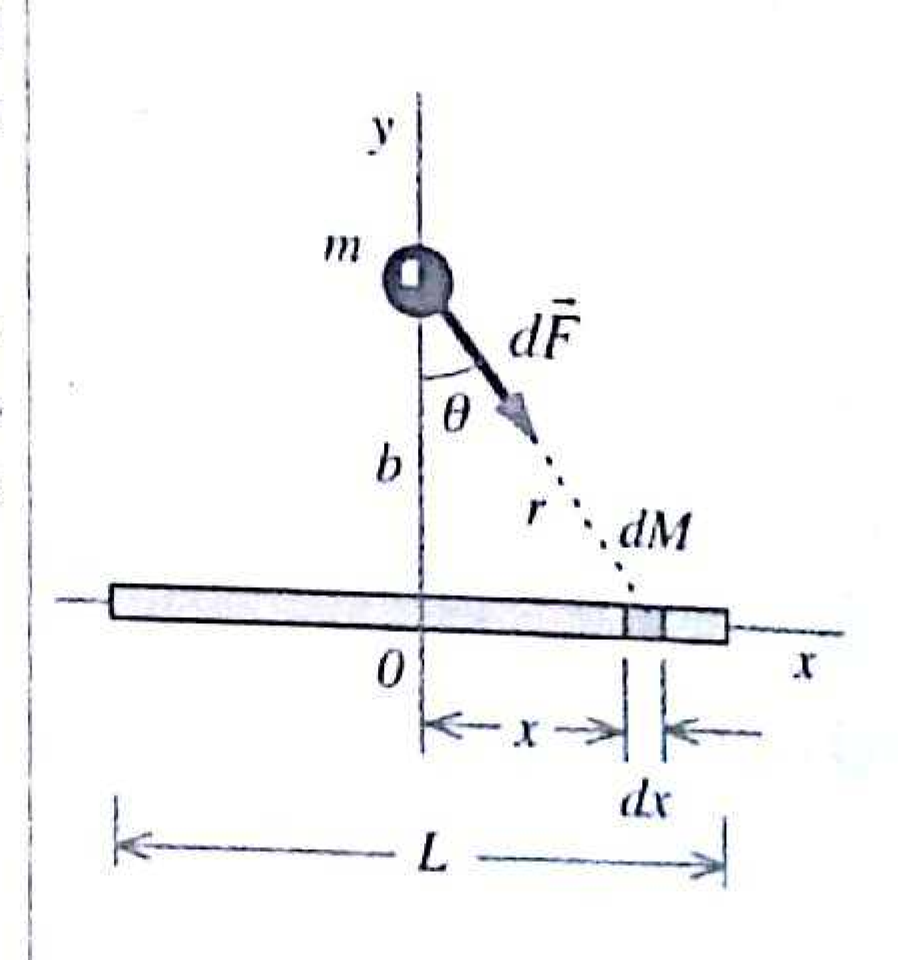
$$\vec F_a = \int d\vec F = \hat x \int_a^{a+L} G\frac{m}{x^2}dM = \hat x \frac{GmM}{L}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2}$$

$$\vec F_a = \hat x \frac{GmM}{L}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{L+a} = \hat x \frac{GmM}{L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)$$

$$\vec F_a = \frac{GmM}{a(a+L)}\hat x$$

Observe que si los cuerpos están separados por una distancia muy grande ($a >> L$), esta expresión tiende al valor $F_a \to GmM/a^2$, es decir, los cuerpos se comportan como si fueran dos partículas.

b) La fuerza $d\vec F$ debida a un elemento: $dM = (M/L)dx$ tiene una componente dF_x paralela a la barra que, debido a la simetría, al sumarlas da cero. La fuerza resultante es la suma de las componentes en la dirección y:



$$d\vec F_y = dF\cos\theta(-\hat y) = \frac{GmdM}{r^2}\frac{b}{r}(-\hat y)$$

$$\vec F_b = \int d\vec F_y = GmM\frac{b}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{(b^2+x^2)^{3/2}}(-\hat y)$$

$$\vec F_b = (-\hat y)\frac{GmMb}{L}\left(\frac{x}{b^2\sqrt{b^2+x^2}}\right)\Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$\int \frac{dx}{(b^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{b^2+x^2}}$$

$$\vec F_b = \frac{2GmM}{b\sqrt{4b^2+L^2}}(-\hat y)$$

Observe que si la separación de los cuerpos es muy grande ($b >> L$), la expresión de la fuerza tiende a $F_b \to GmM/b^2$, es decir, los cuerpos se comportan como si fuesen dos partículas.

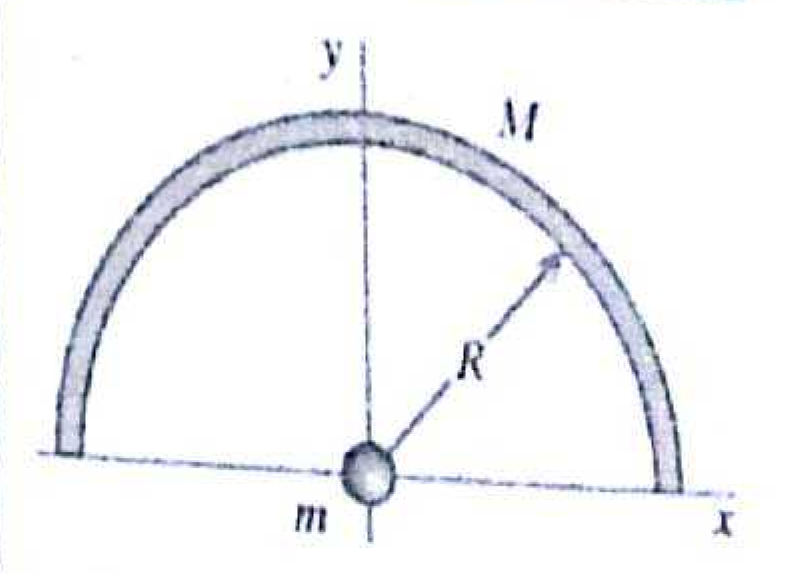
Respuesta:

a) $\vec F_a = \dfrac{GmM}{a(a+L)}\hat x$

b) $\vec F_b = \dfrac{2GmM}{b\sqrt{4b^2+L^2}}(-\hat y)$

PR-6.03. Atracción entre partícula y barra semicircular

Una barra uniforme de masa M está doblada en forma de media circunferencia de radio R. Calcule la fuerza que se ejerce sobre una partícula de masa m ubicada en el centro de curvatura de la barra.



Solución: Dividimos la barra en segmentos de longitud de arco, $ds = Rd\theta$, cuya masa elemental es:

$$\frac{dM}{M} = \frac{ds}{\pi R} \quad \Rightarrow \quad dM = \frac{M}{\pi R}(Rd\theta) = \frac{M}{\pi}d\theta$$

Este elemento ejerce una fuerza $d\vec F$ sobre m que queda en la dirección radial. La componente horizontal, dF_x, al sumarla con la del elemento simétrico, resulta cero. La componente vertical dF_y es:

$$dF_y = dF\cos\theta = \frac{GmdM}{R^2}\cos\theta = \frac{GmM}{\pi R^2}\cos\theta d\theta$$

Integrando por todo el arco, obtenemos la fuerza total:

$$F_y = \int dF_y = \frac{GmM}{\pi R^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{GmM}{\pi R^2}sen\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

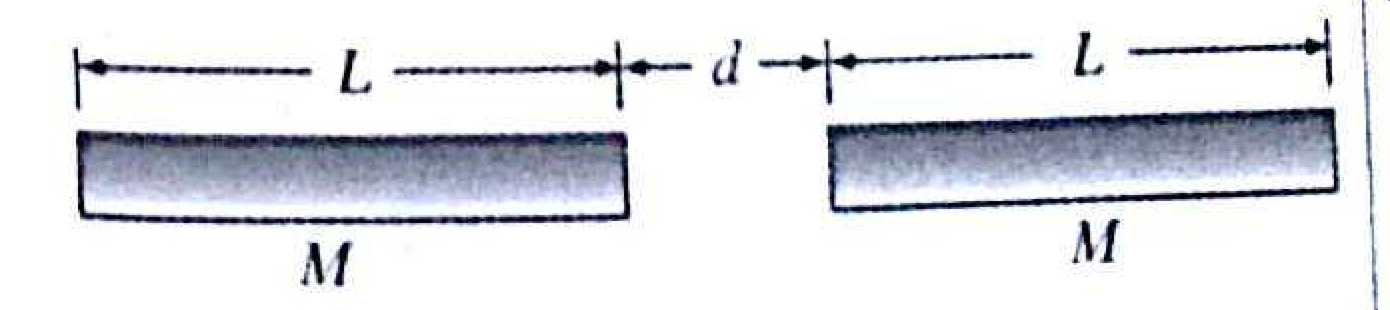
$$F_y = \frac{GmM}{\pi R^2}[(1)-(-1)] = \frac{2GmM}{\pi R^2}$$

Respuesta:

$$\vec F = \frac{2GmM}{\pi R^2}\hat y$$

PR-6.04. Atracción gravitatoria entre dos barras

Dos barras delgadas uniformes de longitud L y masa M se encuentran a lo largo de la misma línea recta y tienen sus extremos próximos separados por una distancia d.

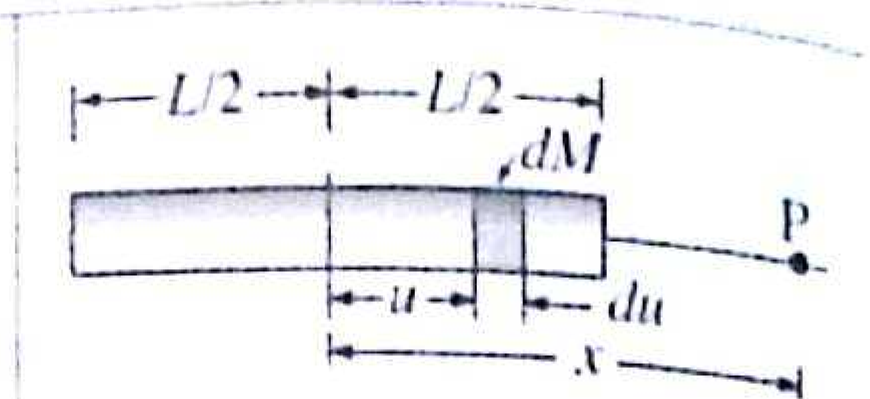


Demuestre que la fuerza de atracción gravitacional mutua entre estas barras tiene una magnitud:

$$F = \frac{GM^2}{L^2}\ln\left[\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)}\right]$$

Solución: Calculemos primero la intensidad del campo gravitacional que produce la barra de la izquierda a una distancia x desde su centro. Un elemento infinitesimal de masa de la barra izquierda, $dM = M(du/L)$, crea campo cuya magnitud es:

$$dg = \frac{GdM}{r^2} = \frac{GM(du/L)}{(x-u)^2}$$

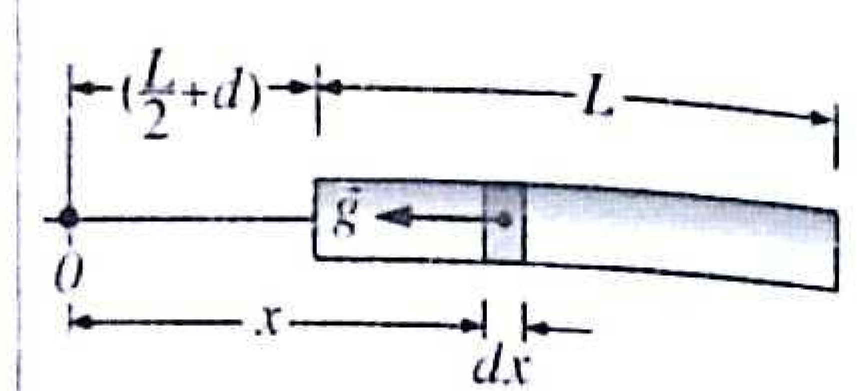


La intensidad del campo gravitacional total producido por la barra de la izquierda a una distancia x de su centro es:

$$g(x) = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{GMdu}{L(x-u)^2} = \frac{GM}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{du}{(x-u)^2}$$

$$g(x) = \frac{GM}{L}\int_{x+L/2}^{x-L/2} \frac{(-dz)}{z^2} = \frac{GM}{L}\frac{1}{z}\Big|_{x+L/2}^{x-L/2}$$

$$g(x) = \frac{GM}{L}\left(\frac{1}{x-L/2} - \frac{1}{x+L/2}\right)$$



La fuerza de atracción gravitacional sobre un elemento de masa $dM = M(dx/L)$ de la barra de la derecha es:

$$dF = dMg(x) = \left(M\frac{dx}{L}\right)\frac{GM}{L}\left(\frac{1}{x-L/2} - \frac{1}{x+L/2}\right)$$

La fuerza total de atracción ejercida sobre la barra es:

$$F = \frac{GM^2}{L^2}\int_{d+L/2}^{d+3L/2}\left(\frac{dx}{x-L/2} - \frac{dx}{x+L/2}\right)$$

$$F = \frac{GM^2}{L^2}[\ln(x-L/2) - \ln(x+L/2)]\Big|_{d+L/2}^{d+3L/2}$$

$$F = \frac{GM^2}{L^2}\left[\ln\left(\frac{d+L}{d}\right) - \ln\left(\frac{d+2L}{d+L}\right)\right] = \frac{GM^2}{L^2}\ln\left[\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)}\right]$$

Respuesta:

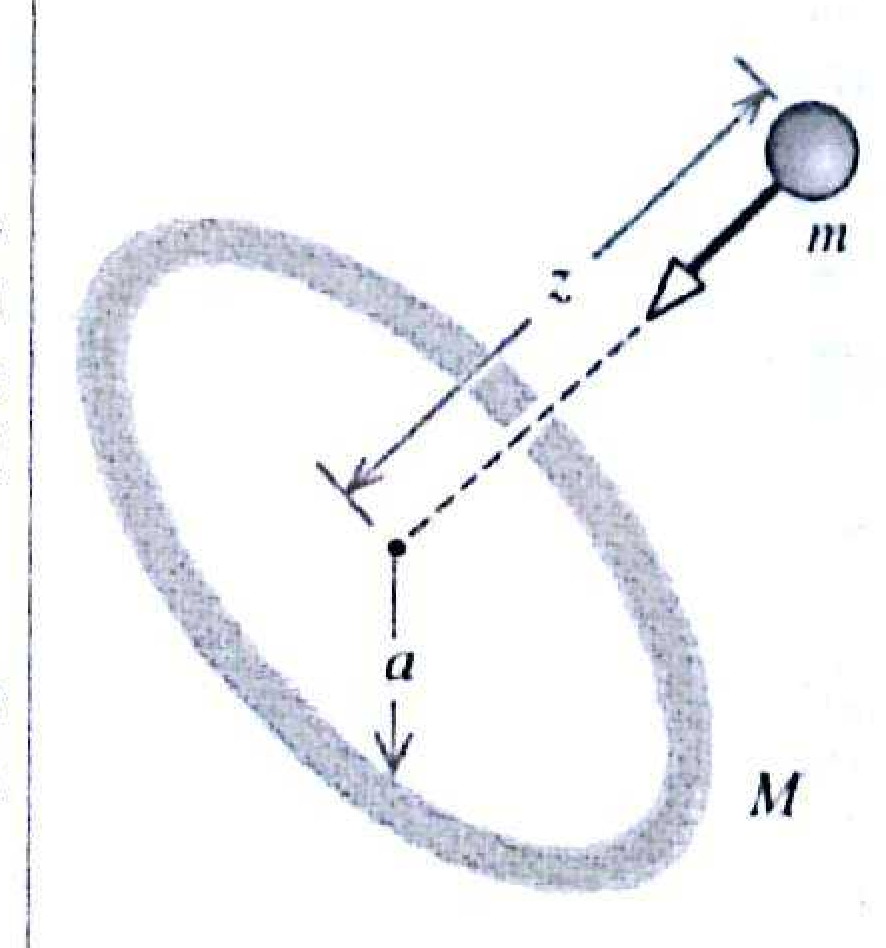
$$F = \frac{GM^2}{L^2}\ln\left[\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)}\right]$$

PR-6.05. *Atracción de una nebulosa anular*

Ciertas galaxias tienen estructuras en forma de anillo. Suponga una masa M distribuida uniformemente en un anillo delgado de radio a. Una partícula de masa m se encuentra a una distancia z desde el centro del anillo en el eje de simetría.

a) ¿Cuál es la fuerza gravitacional sobre la partícula?

b) Suponga que la partícula cae desde el reposo como consecuencia de la atracción del anillo. Halle la velocidad con la que pasará la partícula por el centro del anillo.



Solución: a) Cada elemento de masa dM del anillo ejerce una fuerza elemental:

$$dF = G\frac{mdM}{r^2} = G\frac{mdM}{a^2+z^2}$$

Si consideramos dos elementos de masa opuestos a cada lado del anillo, por simetría las componentes de la fuerza en dirección perpendicular al eje z, se cancelan por pares. Por lo tanto, sólo nos interesa la componente z:

$$dF_z = \frac{GmdM}{r^2}\cos\theta = \frac{GmdM}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{GmdMz}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Todas las partículas de masa dM del anillo están a igual distancia del punto P. Integrando por todo el anillo encontramos la fuerza total:

$$F_z = \int\frac{GmdMz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Gmz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int dM = \frac{GmMz}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

La fuerza resultante sobre la partícula m queda a largo del eje del anillo y dirigida hacia el centro de éste.

b) Aplicando la conservación de la energía mecánica entre las posiciones inicial (punto P) y final (punto O): $U_P + K_P = U_O + K_O$. Cada elemento de masa del anillo está equidistante de la partícula, por lo tanto:

$$-\frac{GmM}{\sqrt{a^2+z^2}} + 0 = -\frac{GmM}{a} + \frac{1}{2}mv^2$$

Simplificando, se obtiene la velocidad de la partícula cuando pasa por el centro del anillo:

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

Respuesta:

a) $\vec{F} = \frac{GmMz}{(a^2+z^2)^{3/2}}(-\hat{z})$

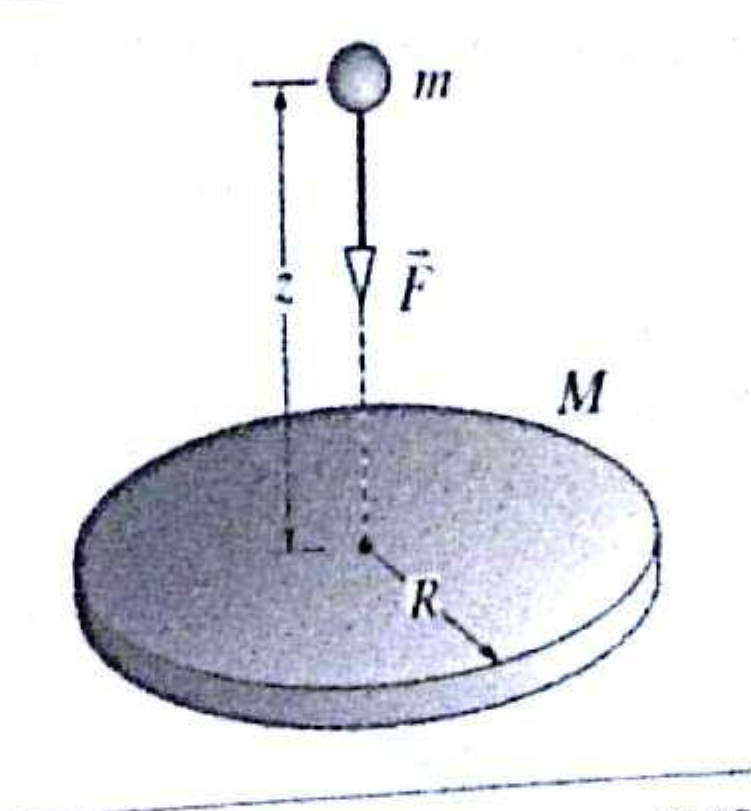
b) $v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)}$

PR-6.06. *Fuerza de un disco sobre una masa puntual*

Considere un disco circular delgado de radio R y masa uniforme, M.

a) Determine la fuerza gravitacional que este disco ejerce sobre una partícula material de masa m colocada sobre el eje y a una distancia z de su centro.

b) ¿El resultado hallado en (a) se reduce al valor esperado cuando la distancia z sea muy grande?

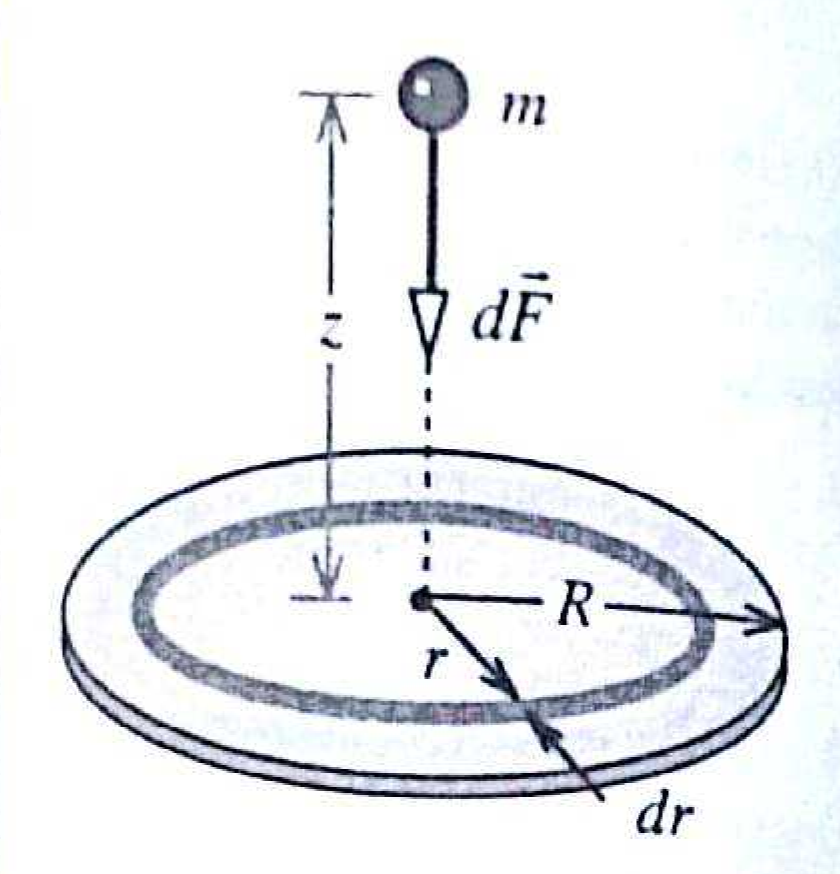


Solución: Si dividimos el disco en anillos concéntricos delgados, un anillo de radio r y espesor dr tiene una masa elemental:

$$dM = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr)$$

Siendo la densidad superficial de masa: $\sigma = M/\pi R^2$. Usando el resultado del problema anterior, la fuerza ejercida sobre la partícula m por este anillo delgado está dirigida hacia el centro del anillo y tiene un valor:

$$dF_z = \frac{GmdMz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Gm(\sigma 2\pi r dr)z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$



Integrando esta expresión encontramos la fuerza total :

$$F_z = \int dF_z = Gm\sigma 2\pi z \int_0^R \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = Gm\sigma 2\pi z\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\Bigg|_0^R = Gm\sigma 2\pi z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Reemplazando el valor de $\sigma = M/\pi R^2$, tenemos:

$$\vec{F} = \frac{2GMm}{R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)(-\hat{z})$$

b) Para grandes distancias $z >> R$, el segundo término del paréntesis se puede aproximar mediante el desarrollo binomial:

$$\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{-1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2$$

En este límite el anillo se comportaría como una masa puntual:

$$\vec{F} \to G\frac{Mm}{z^2}(-\hat{z})$$

Respuesta:

a) $\vec{F} = \frac{2GMm}{R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)(-\hat{z})$

b) Para $R << z$: $\vec{F} \to G\frac{Mm}{z^2}(-\hat{z})$

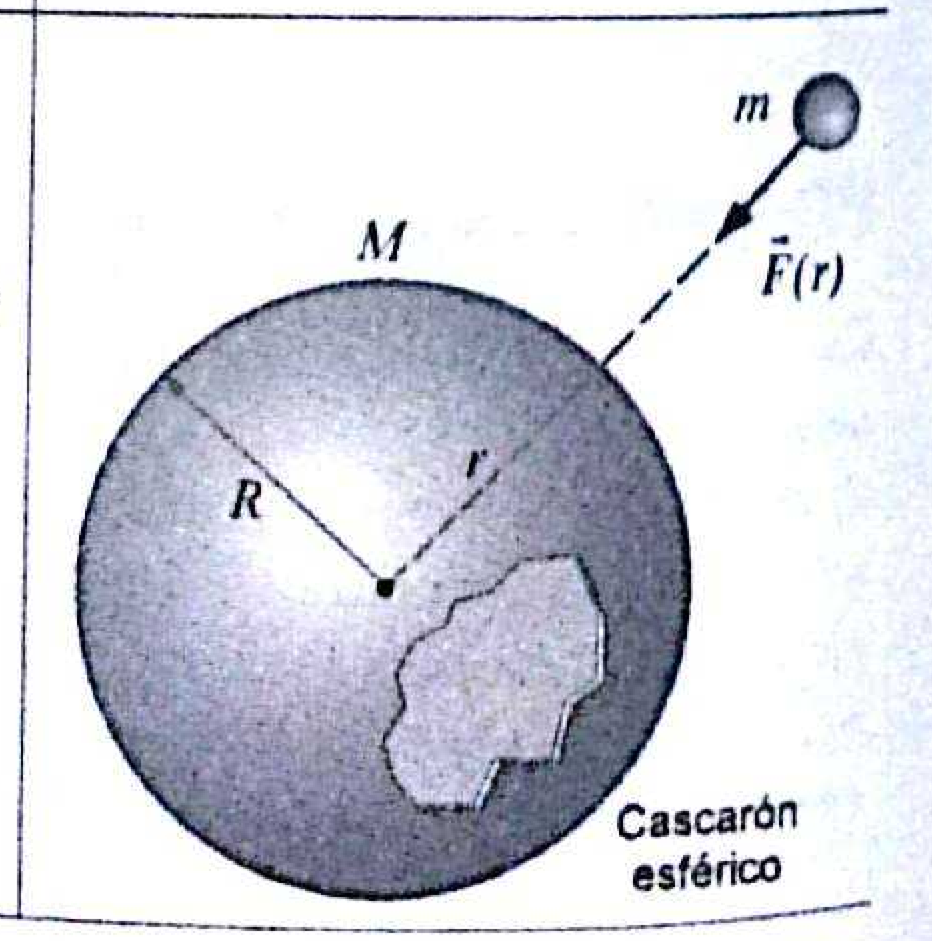
PR-6.07. *Partícula exterior a un cascarón esférico*

Sea un cascarón esférico de masa uniforme M y radio R, y una partícula de masa m que está afuera del cascarón.

a) Halle la energía potencial del sistema.

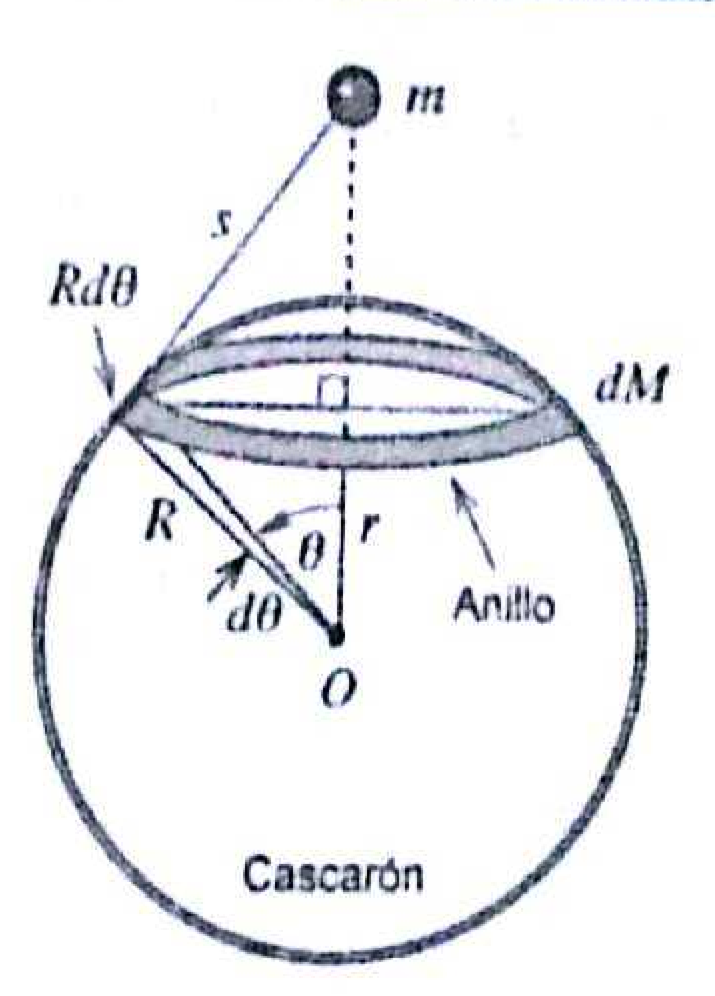
b) Halle la fuerza entre el cascarón y la partícula.

c) ¿Se puede aplicar el resultado a cualquier esfera?



Solución: a) Si dividamos el cascarón en anillos concéntricos, la masa elemental dM está dada por:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{(2\pi R sen\theta)Rd\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}sen\theta d\theta$$

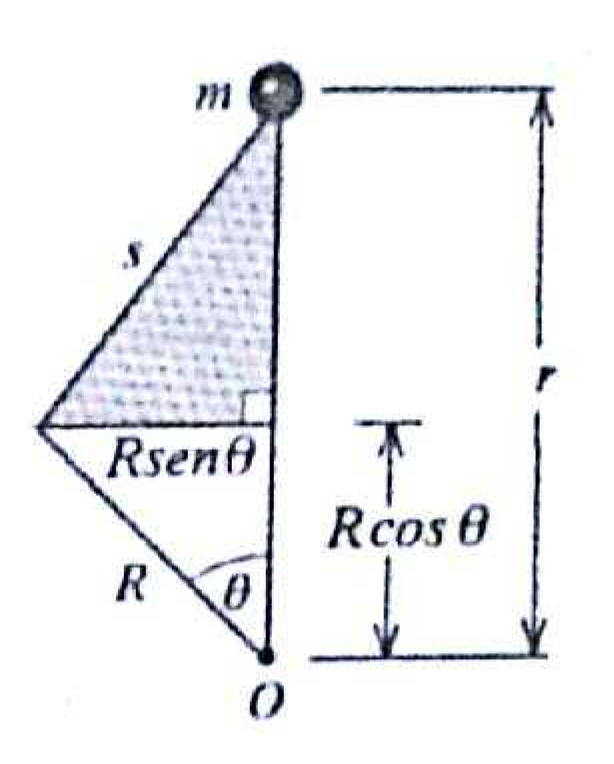


Todos los puntos del anillo equidistan de la partícula, y la energía potencial asociada al anillo y la partícula m es:

$$dU = \frac{GmdM}{s} = \frac{GmMsen\theta d\theta}{2s}$$

Considerando el triángulo rectángulo sombreado, se tiene:

$$s^2 = (r - Rcos\theta)^2 + (Rsen\theta)^2 = r^2 - 2rRcos\theta + R^2$$



Tomando diferenciales en ambos miembros de esta ecuación:

$$2sds = 2rRsen\theta d\theta$$

Sustituimos ahora $sen\theta d\theta$ en la expresión anterior para la energía potencial:

$$dU = -\frac{GmM}{2s}\frac{sds}{rR} = -\frac{GmM}{2rR}ds$$

Integrando entre los límites desde $s = r - R$ ($\theta = 0°$) hasta $s = r + R$ ($\theta = \pi$), obtenemos la energía potencial total:

$$U = -\frac{GmM}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GmM}{2rR}[(r+R)-(r-R)] = -\frac{GmM}{r}$$

b) La fuerza sobre la partícula es la derivada de la energía potencial:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GmM}{r}\right) = -\frac{GmM}{r^2} \qquad (r > R)$$

c) Podemos generalizar el resultado a un cascarón esférico "grueso" o a una "esfera sólida" considerándolos como si estuviesen constituidas por una serie de capas esféricas concéntricas. Si cada una de estas capas tiene densidad uniforme, aunque fuesen distintas, podemos aplicar el resultado obtenido para $U(r)$ y $F(r)$. Por lo tanto, *el efecto gravitacional de una distribución esférica de materia sobre una partícula exterior, es como si toda la masa estuviera concentrada en su centro.*

Respuesta:

a) $U(r) = -\frac{GmM}{r}$ $\quad r \geq R)$

b) $\vec{F}(r) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$ $\quad (r \geq R)$

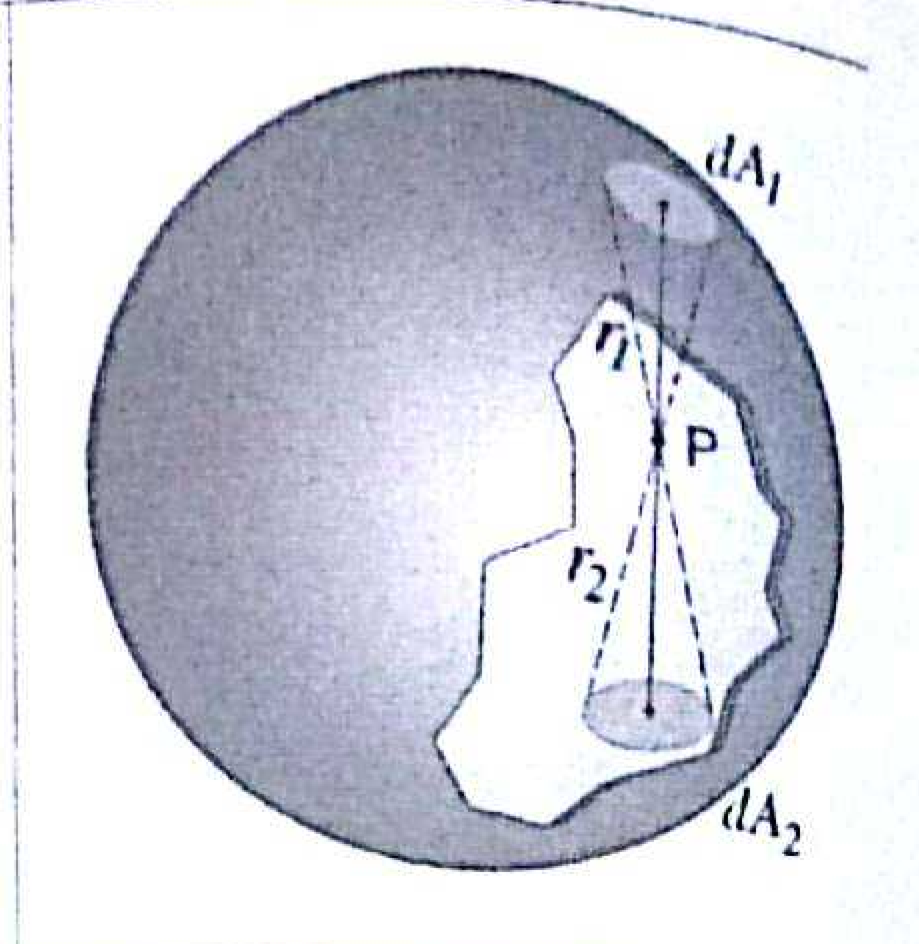
Cualquier distribución esférica

PR-6.08. *Fuerza nula dentro de un cascarón esférico*

Sea una partícula situada dentro de un cascarón esférico de masa uniforme. Considere un cono doble con las puntas en el punto P, que intercepte las áreas dA_1 y dA_2 del cascarón.

a) Demuestre que la fuerza resultante sobre una partícula en P por los elementos de masa interceptados es cero.

b) Demuestre luego que la fuerza gravitacional resultante de todo el cascarón sobre una partícula interna es cero.



Solución: Recordemos que un ángulo sólido se define como la razón del área subtendida en la superficie de una esfera y el radio r de la misma:

$$\text{Angulo sólido:} \quad \Omega = \text{Area subtendida}/r^2$$

La superficie curva subtendida en la esfera puede tener cualquier forma. Si se abarca todo el espacio el ángulo sólido total es: $\Omega = 4\pi r^2 / r^2 = 4\pi$ steradianes.

Si trazamos una línea r_1 y r_2, esta interseca la esfera en dos puntos formando el mismo ángulo ϕ con la normal a la superficie esférica. Por lo tanto, las áreas dA_1 y dA_2 están relacionadas con sus proyecciones dA_{1n} y dA_{2n} sobre los planos normales a r_1 y r_2, respectivamente:

$$d\Omega = \frac{dA_{1n}}{r_1^2} = \frac{dA_1 \cos\phi}{r_1^2} \qquad d\Omega = \frac{dA_{2n}}{r_2^2} = \frac{dA_2 \cos\phi}{r_2^2}$$

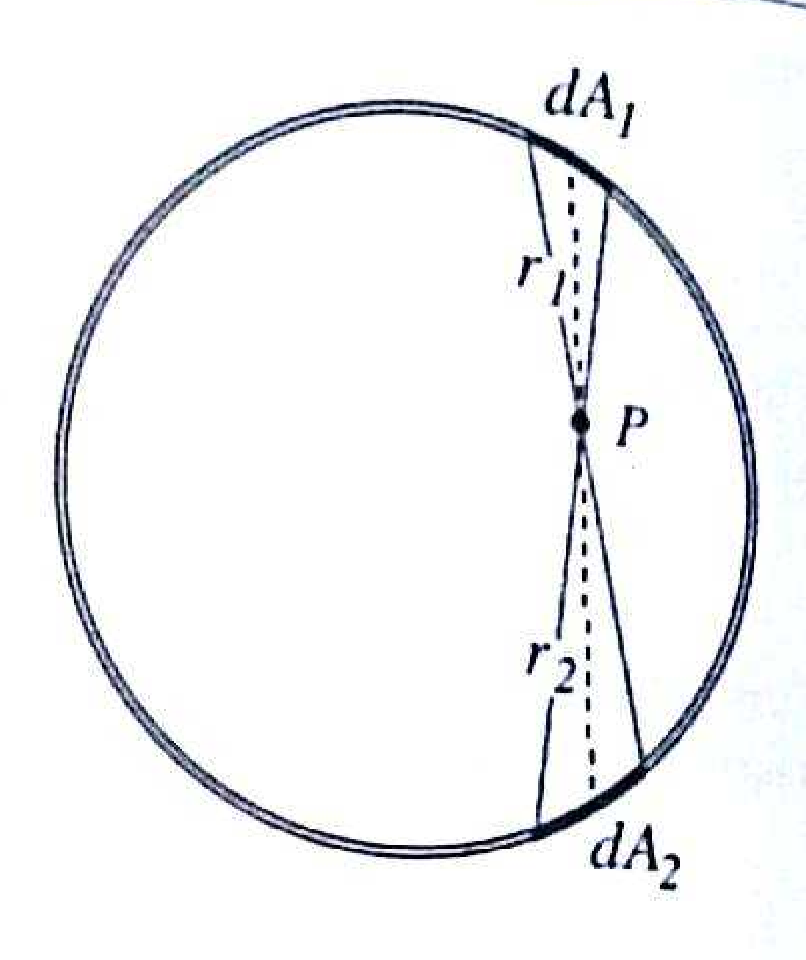
Como el ángulo sólido subtendido, $d\Omega$, es común a ambos conos, las masas de los dos elementos son:

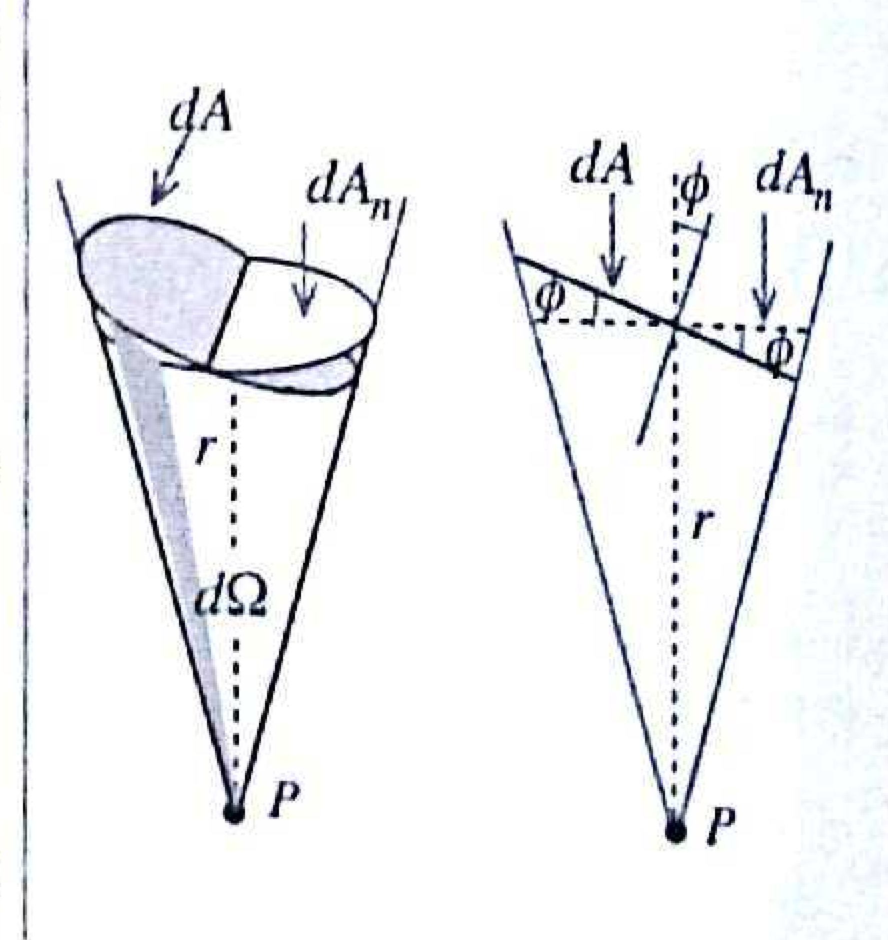
$$dm_1 = \sigma dA_1 = \frac{\sigma r_1^2 d\Omega}{\cos\phi} \qquad dm_2 = \sigma dA_2 = \frac{\sigma r_2^2 d\Omega}{\cos\phi}$$

Las fuerzas que ejercen estos dos elementos de masa sobre la partícula de prueba de masa m colocada en P, son de sentidos opuestos y la razón de sus módulos es:

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \frac{G\dfrac{m\,dm_1}{r_1^2}}{G\dfrac{m\,dm_2}{r_2^2}} = \left(\frac{dm_1}{dm_2}\right)\frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{r_2^2}{r_1^2} = 1$$

b) Si dividimos el cascarón entero en pares similares de áreas tomando conos en todas direcciones alrededor de P, las fuerzas se cancelan en pares y la resultante es cero.





Respuesta:

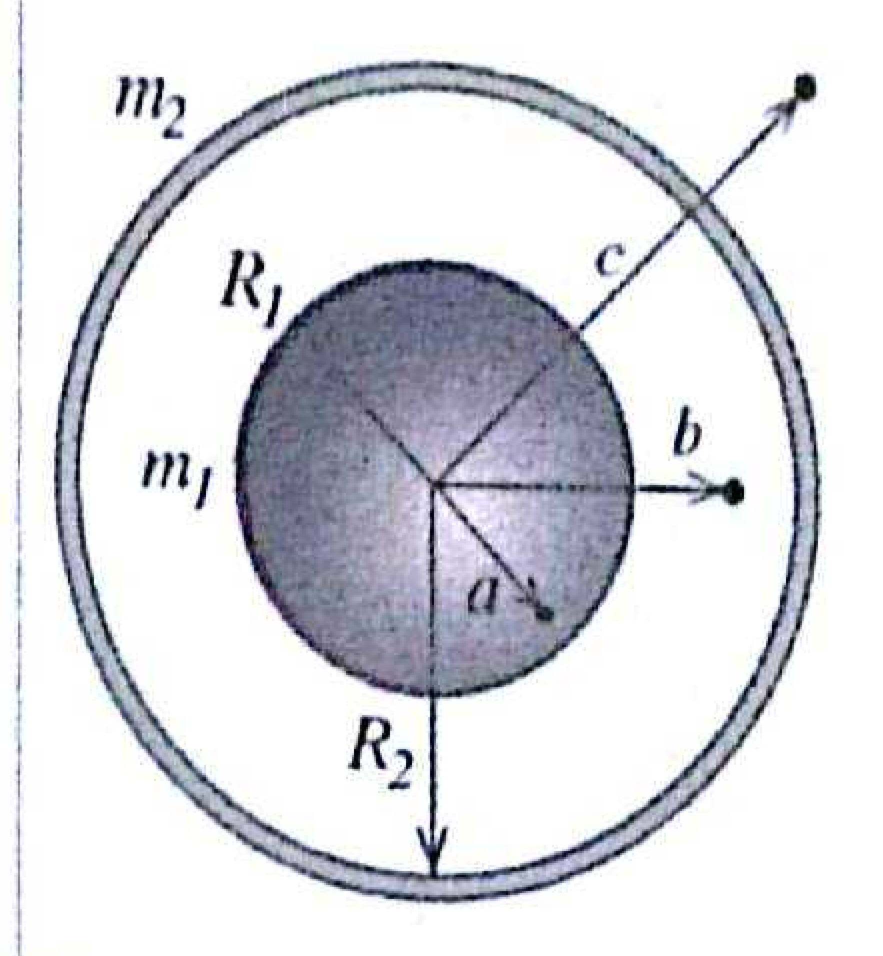
a) $d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2$

b) En el interior de un cascarón uniforme, la fuerza sobre una partícula es nula.

PR-6.09. *Esfera sólida dentro de un cascarón esférico*

Una esfera sólida de masa m_1 y radio R_1 se encuentra dentro de un cascarón esférico concéntrico de masa m_2 y radio R_2. Calcule la fuerza gravitacional ejercida por este sistema sobre una partícula de masa m ubicada en los tres puntos indicados, donde r se mide desde el centro de las esferas.

a) $r = a$, b) $r = b$, c) $r = c$,



Solución: a) De acuerdo al resultado del problema anterior, la fuerza gravitacional a una distancia r del centro de una esfera uniforme está determinada solamente por la masa que queda dentro de una esfera imaginaria de radio r. Si la esfera maciza tiene radio R, masa M y su densidad volumétrica ρ es uniforme, la razón de la masa encerrada por la esfera imaginaria a la masa total es:

$$\frac{m_r}{M} = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\rho(4\pi R^3/3)} = \frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad m_r = M\frac{r^3}{R^3}$$

La fuerza sobre una partícula m a una distancia radial $r = a$ se debe sólo a la masa comprendida en la región interna de radio a y es como si fuera debida a una masa puntual m_a colocada en su centro:

$$F_a = G\frac{m_a m}{a^2} = \frac{Gm}{a^2}\left(m_1\frac{a^3}{R_1^3}\right) = \frac{Gm_1 ma}{R_1^3}$$

b) Si la partícula está a una distancia radial b comprendida entre R_1 y R_2, el cascarón externo no tiene ningún efecto y la fuerza sobre m es debida enteramente a la esfera maciza de masa m_1:

$$F_b = G\frac{m_1 m}{b^2}$$

c) Si la partícula está a una distancia radial, $c > R_2$, la fuerza sobre m será la suma de las fuerzas ejercidas por la esfera maciza de masa m_1 y el cascarón de masa m_2:

$$F_c = G\frac{(m_1 + m_2)m}{c^2}$$

Respuesta:

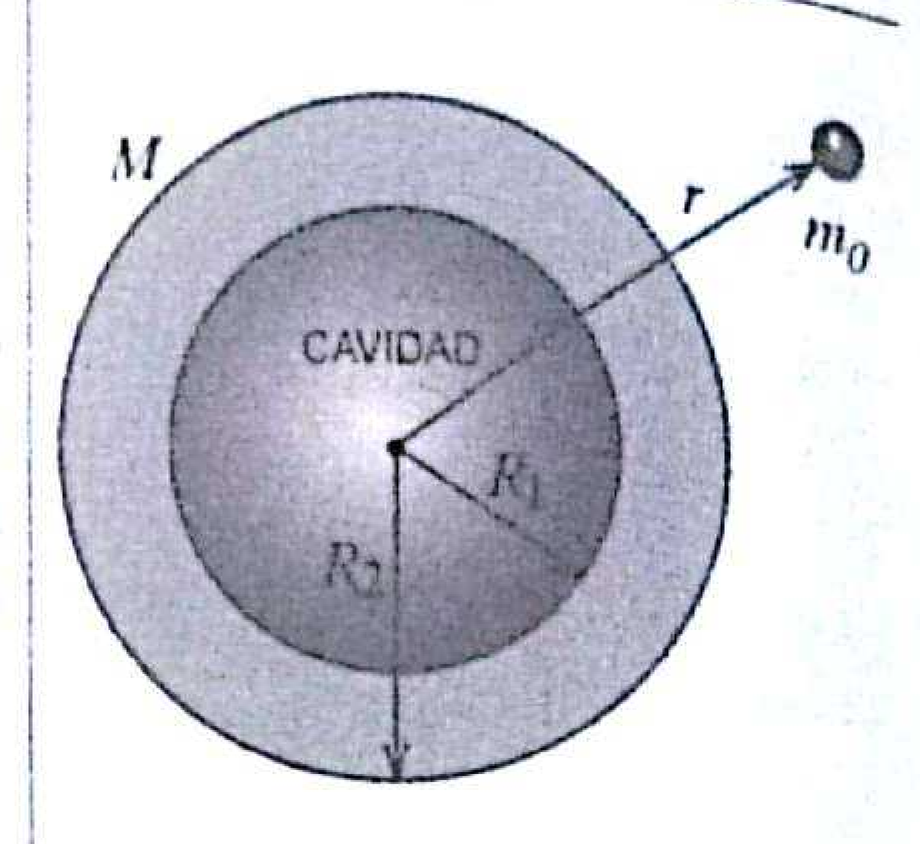
a) $\vec{F}_a = \dfrac{Gm_1 ma}{R_1^3}(-\hat{r})$

b) $\vec{F}_b = G\dfrac{m_1 m}{b^2}(-\hat{r})$

c) $\vec{F}_c = G\dfrac{(m_1 + m_2)m}{c^2}(-\hat{r})$

PR-6.10. *Campo gravitatorio de una esfera con cavidad*

Una esfera sólida de masa M y radio R_2 tiene una cavidad concéntrica de radio R_1. Calcule la intensidad del campo gravitatorio, es decir la fuerza por unidad de masa, en función de la distancia radial r desde el centro de la esfera, y haga una gráfica de $\vec{g}(r)$ en el intervalo: $0 \le r \le \infty$.



Solución: Una partícula de prueba m_0 colocada en la región $r < R_1$, no experimenta fuerza alguna:

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m_0} = 0 \qquad r < R_1$$

Para la región: $R_1 < r < R_2$, la fuerza sobre la partícula de prueba m_0 es debida a la masa dentro de una esfera imaginaria de radio r:

$$F = G\frac{m_0 m_r}{r^2} = \frac{Gm_0}{r^2}\rho\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

$$F = \frac{Gm_0}{r^2}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3) = \frac{Gm_0M}{r^2}\left(\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$$

La fuerza por unidad de masa es:

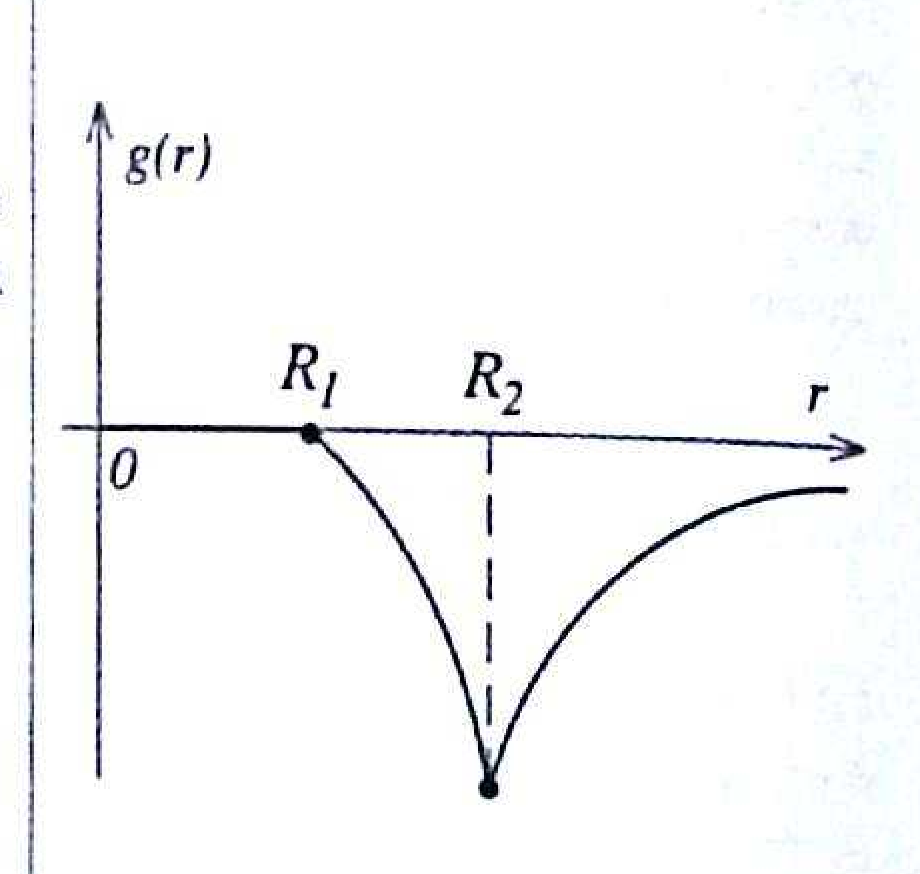
$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)\hat{r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

Se observa que esta expresión de $\vec{g}(r)$ toma los valores en la frontera:

$$g(r = R_1) = 0 \;\; \text{y} \;\; g(r = R_2) = -\frac{GM}{R_2^2}$$

Para la región exterior: $r > R_2$, la esfera se comporta como si fuera una masa puntual M colocada en su centro:

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \qquad (r > R_2)$$



Respuesta:

$r < R_1$: $\quad \vec{g}(r) = 0$

$R_1 < r < R_2$:

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)\hat{r}$$

$r > R_2$: $\quad \vec{g}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}$

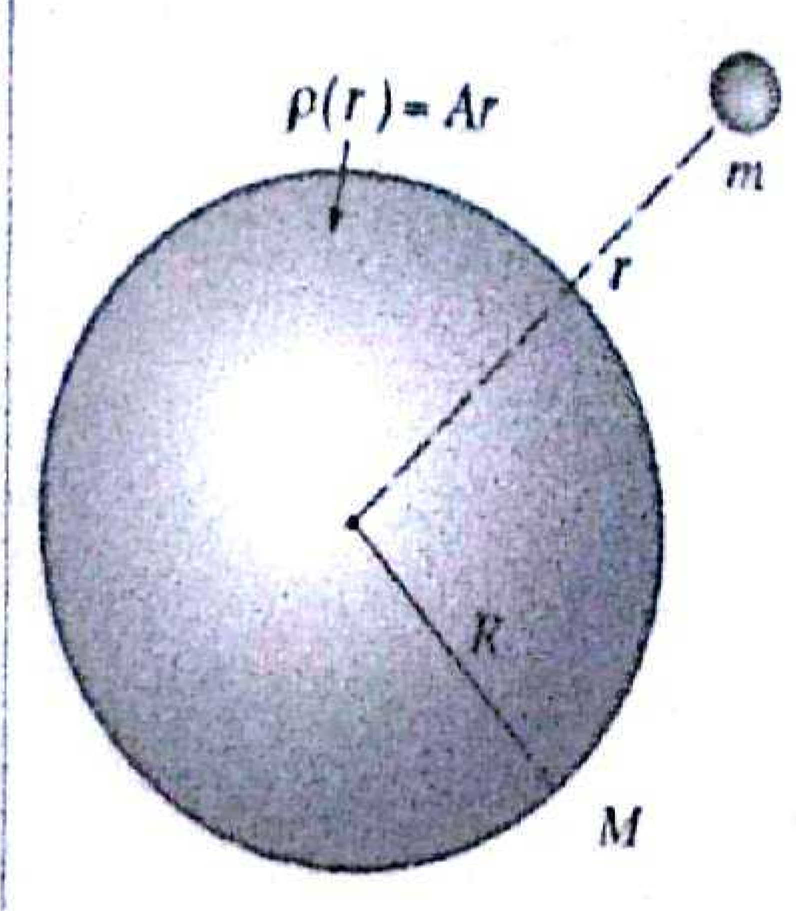
PR-6.11. *Fuerza de esfera con densidad no uniforme*

Una esfera maciza de radio R tiene una masa M distribuida de manera no uniforme que varía con la distancia r al centro:

$$\rho(r) = Ar \qquad r \le R$$

$$\rho = 0 \qquad r > R$$

a) Halle la constante A.
b) Determine la fuerza sobre una partícula de masa m colocada afuera de la esfera ($r > R$).
c) Determine la fuerza sobre una partícula de masa m colocada en el interior de la esfera ($r < R$).



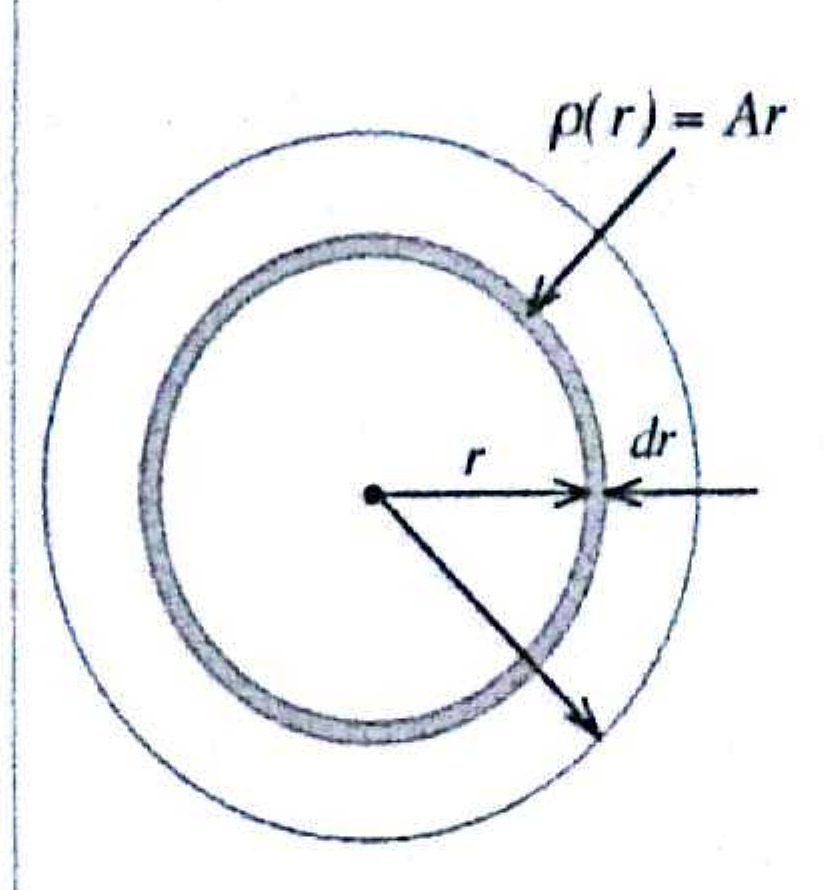
Solución: a) Consideremos un cascarón esférico de radio r y espesor dr. La masa de este cascarón elemental es:

$$dM = \rho dV = \rho(r)4\pi r^2 dr$$

La masa total de la esfera completa es:

$$M = \int_0^R \rho dV = \int_0^R (Ar)4\pi r^2 dr = 4\pi A\int_0^R r^3 dr = \pi AR^4$$

$$A = \frac{M}{\pi R^4}$$



b) Para un punto afuera de la esfera ($r > R$), esta actúa como si toda su masa estuviese en su centro. La fuerza sobre la partícula m es:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

c) Para un punto dentro de la esfera ($r < R$), cada concha en su interior de masa dM contribuye a la fuerza neta sobre la partícula m:

$$F(r) = \int dF = \int_0^r \frac{GmdM}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}\int_0^r dM$$

$$F(r) = \frac{Gm}{r^2}\int_0^r \rho dV = \frac{Gm}{r^2}\int_0^r Ar(4\pi r^2 dr)$$

$$F(r) = \frac{4\pi AGm}{r^2}\int_0^r r^3 dr = \frac{4\pi AGm}{r^2}\frac{r^4}{4} = \frac{GMmr^2}{R^4}$$

Respuesta:

a) $A = \dfrac{M}{\pi R^4}$

b) $r > R$: $\quad \vec{F}(r) = -\dfrac{GmM}{r^2}\hat{r}$

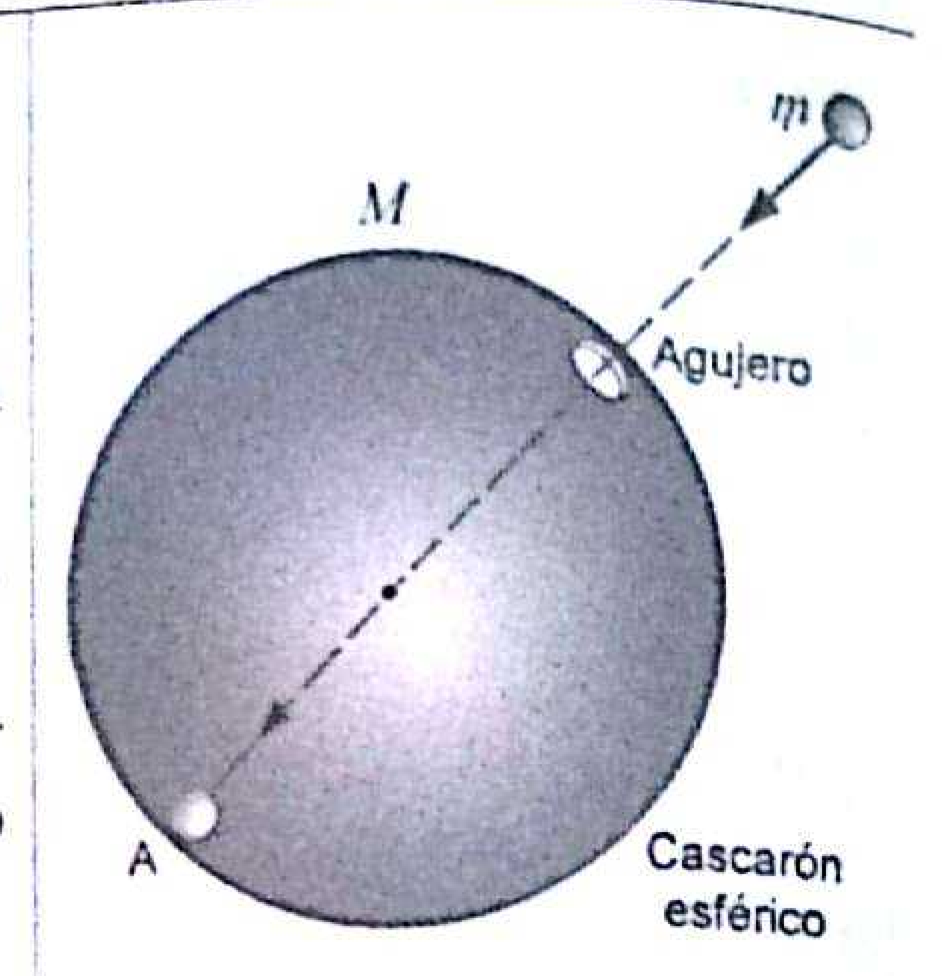
c) $r < R$: $\quad \vec{F}(r) = -\dfrac{GMmr^2}{R^4}\hat{r}$

PR-6.12. *Tiempo de viaje dentro de un cascarón*

Sea un cascarón esférico de masa M y radio R que tiene un pequeño agujero, enfrente del cual está una partícula de masa m a una distancia radial r.

a) Haga una gráfica de la energía potencial del sistema en función de la distancia r en el intervalo: $0 \le r \le \infty$.

b) Si se suelta una partícula en reposo desde la posición $r = 2R$, ¿cuánto tiempo tardará en viajar desde el agujero hasta el punto A diametralmente opuesto?



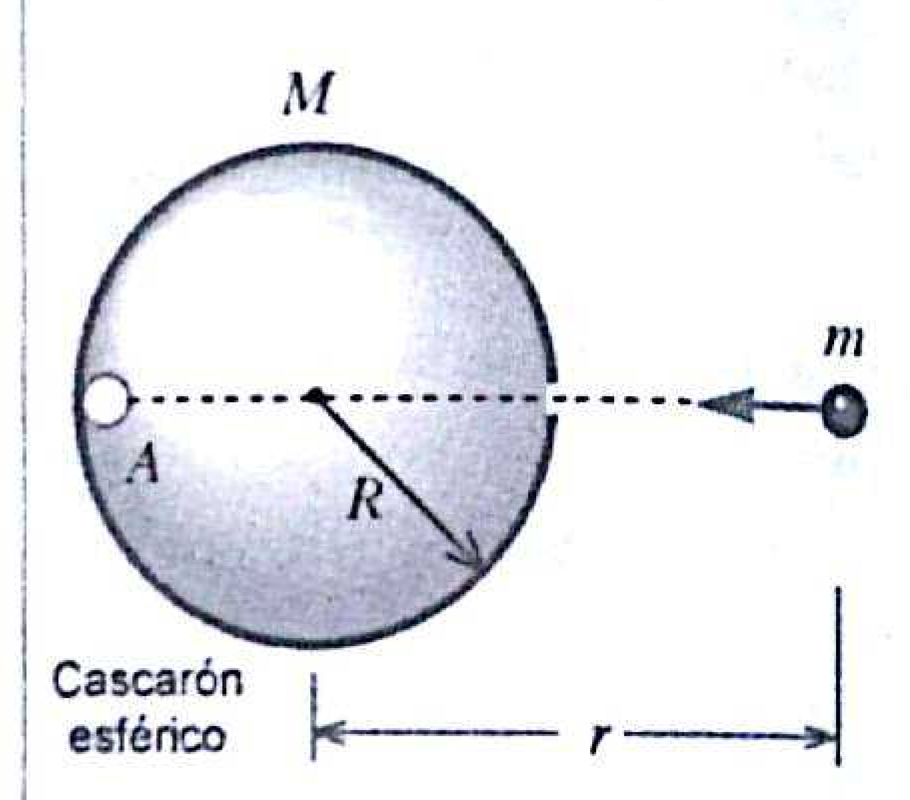
Solución: a) La fuerza gravitacional es conservativa y podemos definir la función energía potencial $U(r)$, mediante la expresión:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Conviene escoger el nivel cero de energía potencial cuando los cuerpos están a separación infinita, $U(\infty) = 0$:

$$U(r) - 0 = -\int_\infty^r \frac{GMm}{r^2}\hat{r} \bullet d\vec{r} = -GMm\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -GMm\frac{1}{r}\Big|_r^\infty$$

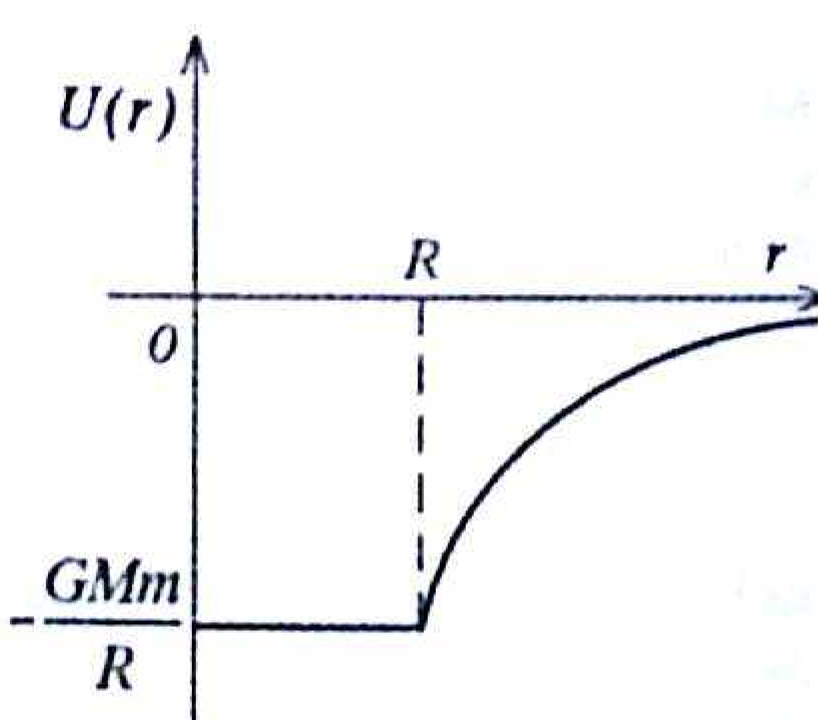
$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \qquad \text{(región } r \ge R\text{)}$$



En la frontera: $r = R$ se tiene, $U(R) = -GMm/R$ y como $\vec{F} = 0$ dentro de la esfera, entonces:

$$U(r) - U(R) = -\int_R^r \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$$

$$U(r) = -\frac{GMm}{R} = \text{constante} \qquad \text{(Región: } r < R\text{)}$$



Energía potencial gravitacional del sistema cascarón-partícula

b) Cuando la partícula llega al agujero, su velocidad se determina aplicando la conservación de la energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$:

$$0 + \left(-\frac{GMm}{2R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dentro de la esfera la energía potencial no varía y la partícula recorre la distancia $2R$ a velocidad constante:

$$t = \frac{2R}{v} = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Respuesta:

$$t = \frac{2R}{v} = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

PR-6.13. *Propuesta de túnel para tránsito super-rápido*

Se ha propuesto excavar un túnel recto que atraviese la Tierra a lo largo de una cuerda que conecte dos ciudades, para el desplazamiento de un tren que no requiere de ningún mecanismo de propulsión.

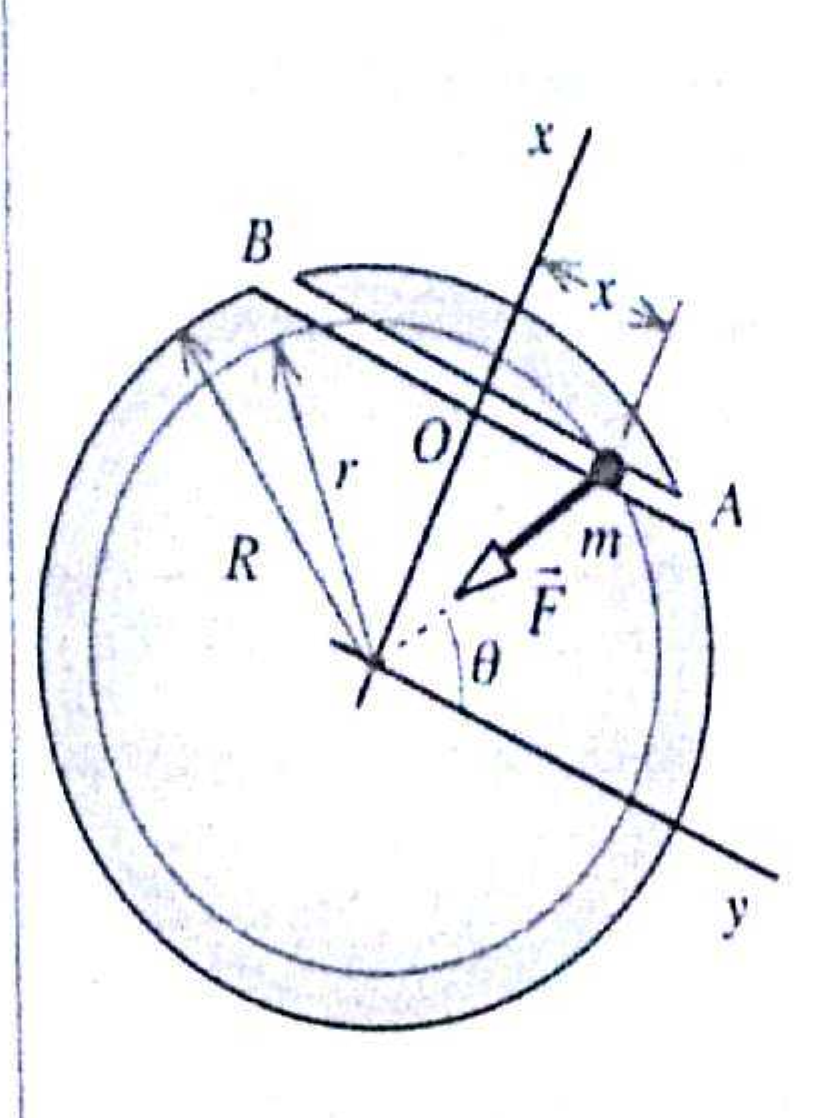
a) Suponga que la Tierra fuera homogénea e ignorando la fricción, demuestre que si se deja caer un objeto por el túnel, su movimiento sería del tipo armónico simple.

b) Halle el tiempo de duración del viaje entre las dos ciudades y demuestre que este no depende de la longitud del túnel ni de la masa del objeto.



Solución: Cuando el objeto está a distancia r del centro de la Tierra, la capa esférica exterior no tiene ningún efecto y la fuerza gravitacional sobre m se debe únicamente a la masa M' contenida dentro de la esfera interna de radio r:

$$M' = \left(\frac{V'}{V}\right)M = \left(\frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3}\right)M = \left(\frac{r^3}{R^3}\right)M$$



La fuerza ejercida sobre el objeto actúa hacia el centro de la tierra:

$$\vec{F} = -\frac{GmM'}{r^2}\hat{r} = -\frac{GmMr}{R^3}\hat{r}$$

La componente x de esta fuerza es:

$$F_x = -\frac{GmMr}{R^3}\cos\theta = -\frac{GmM}{R^3}x$$

Aplicando la 2ª ley de Newton: $F_x = ma_x$, tenemos:

$$-\frac{GmM}{R^3}x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{GM}{R^3}x = 0$$

Esta ecuación diferencial es característica del movimiento armónico simple: $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, donde la cantidad ω es la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

b) El tiempo de viaje sería la mitad del periodo:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{(6{,}37\text{x}10^6)^3}{(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})}} = 42{,}1\,\text{min}$$

Respuesta:

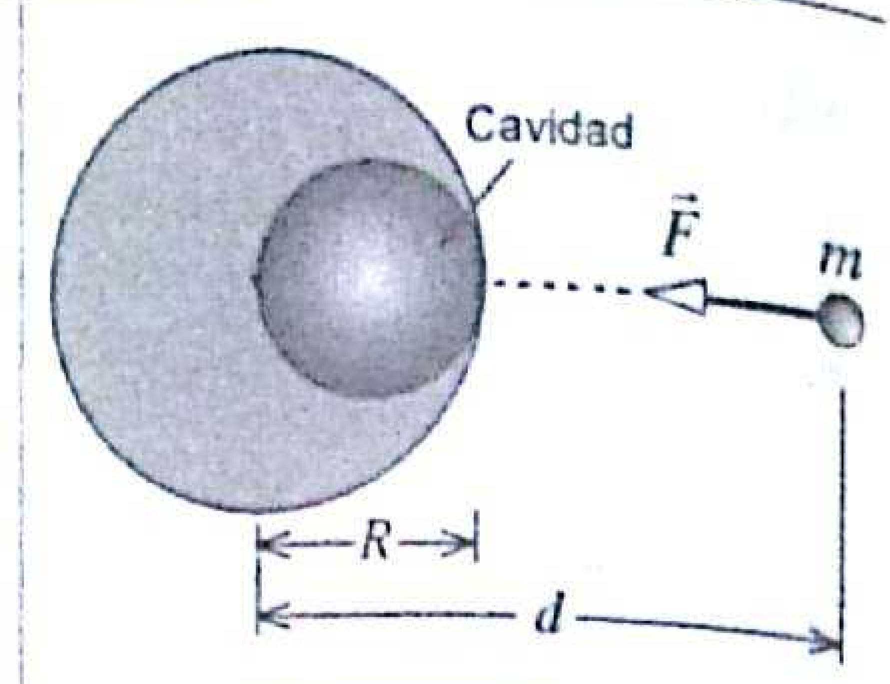
a) Es un movimiento armónico simple de período:

$$T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$$

b) t = 42,1 minutos. No depende ni del largo del túnel ni de la masa.

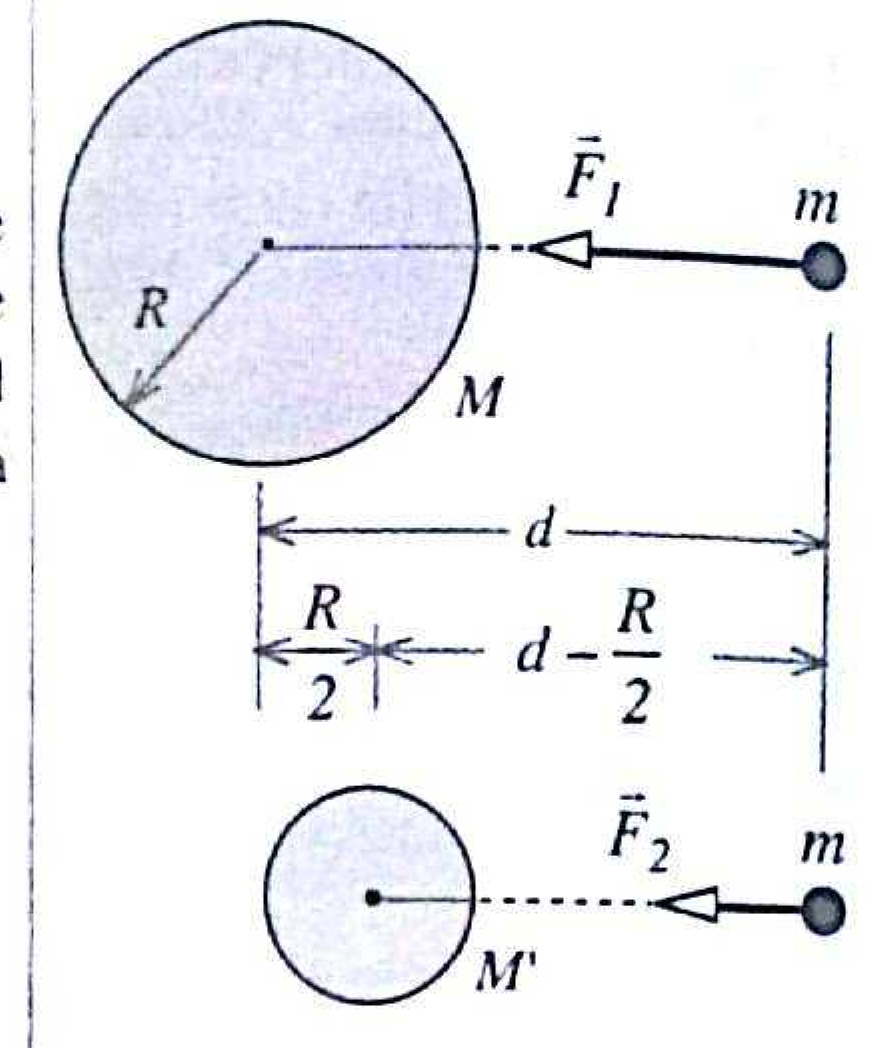
PR-6.14. *Fuerza de esfera con una cavidad excéntrica*

En una esfera sólida de radio R y masa M se practica una cavidad esférica de radio $R/2$, excéntricamente como se muestra en la figura. ¿Con qué fuerza atraerá la esfera ahuecada a una esferita de masa m, que esté situada afuera y a una distancia d de su centro?



Solución: Si la esfera estuviese completa ejercería sobre m una fuerza atractiva $\vec{F}_1$ cuyo módulo es:

$$F_1 = \frac{GmM}{d^2}$$



Como una parte de esta fuerza es debida a la porción de materia que hemos añadido, a esta fuerza habría que sustraer la fuerza $\vec{F}_2$ que ejercería una esfera con igual densidad de masa y del mismo radio $R/2$ de la cavidad. La masa de esta esfera pequeña sería:

$$M_2 = (\frac{V_2}{V})M = (\frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3})M = \frac{(R/2)^3}{R^3}M = \frac{1}{8}M$$

La fuerza atractiva $\vec{F}_2$ sobre m tendría un módulo:

$$F_2 = \frac{Gm(M/8)}{(d-R/2)^2}$$

Por lo tanto, la fuerza de la esfera hueca original sobre m es:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{GmM}{d^2} - \frac{GmM}{8(d-R/2)^2}$$

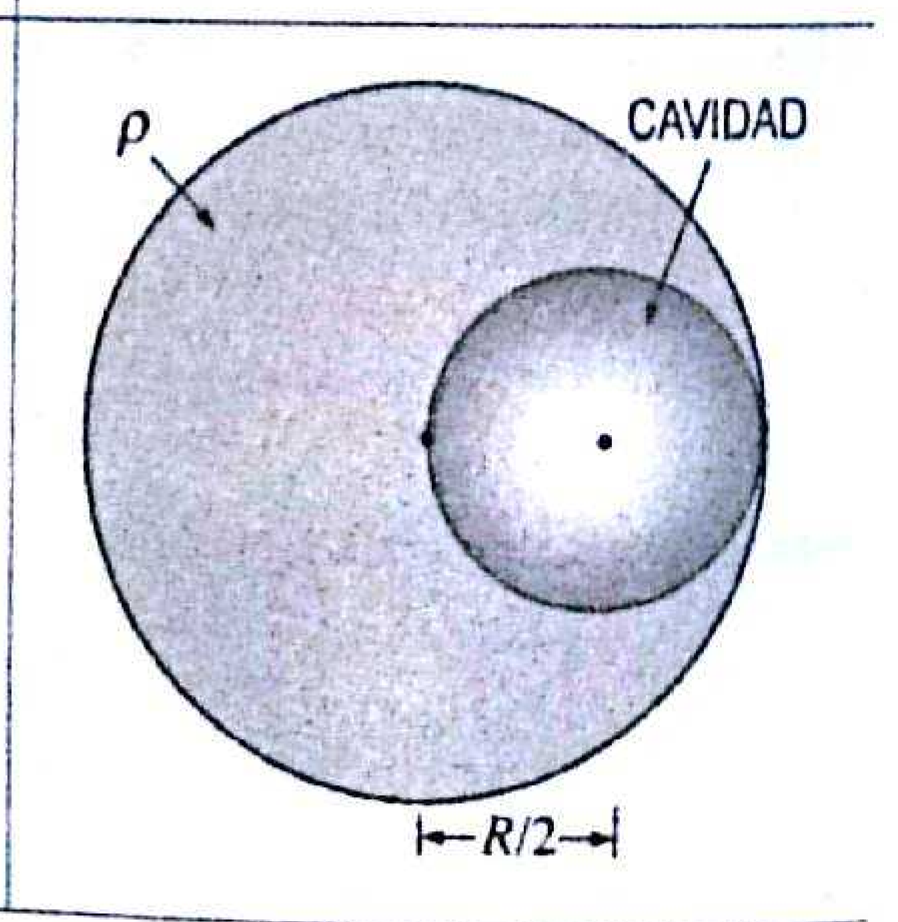
$$F = \frac{GmM}{d^2}[1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2}]$$

Respuesta:

$$\vec{F} = \frac{GmM}{d^2}[1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2}](-\hat{x})$$

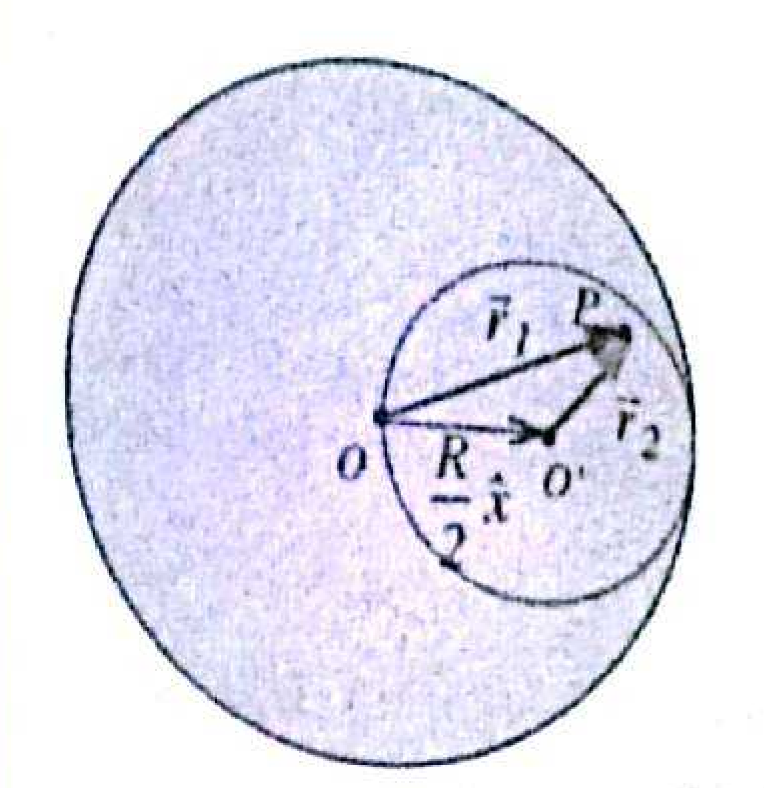
PR-6.15. *Campo gravitacional uniforme en la cavidad*

Considere una esfera sólida de radio R que posee una densidad de masa uniforme ρ, excepto por el hecho que tiene una cavidad esférica de radio $r = R/2$, centrada en $x = R/2$. Demuestre que el campo gravitatorio dentro de la cavidad es uniforme, y calcule su módulo y dirección.



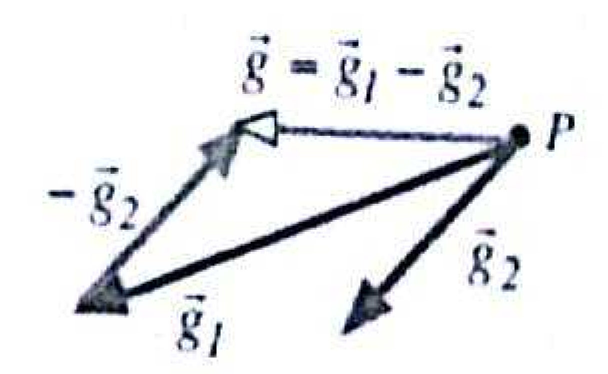
Solución: Procedemos a rellenar la cavidad con masa de igual densidad, ρ. En un punto P ubicado por el radio vector $\vec{r}_1$, el campo gravitacional $\vec{g}_1$ debido a la esfera completa es el producido por una esfera imaginaria de radio r_1, centrada en O:

$$\vec{g}_1 = \frac{GM_1}{r_1^2}(-\hat{r}_1) = \frac{G\rho}{r_1^2}(\frac{4}{3}\pi r_1^3)(-\hat{r}_1) = \frac{4\pi}{3}G\rho(-\vec{r}_1)$$

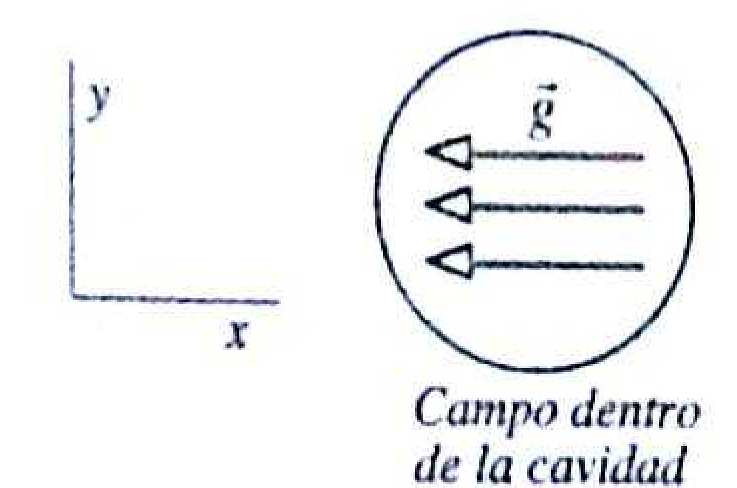


Por otra parte, el campo que produciría la esfera que ocupa la cavidad en el mismo punto P a distancia radial r_2 centrada en O', es:

$$\vec{g}_2 = \frac{GM_2}{r_2^2}(-\hat{r}_2) = \frac{G\rho}{r_2^2}(\frac{4}{3}\pi r_2^3)(-\hat{r}_2) = \frac{4\pi}{3}G\rho(-\vec{r}_2)$$



Para calcular el campo resultante en el punto P, hay que sustraer de $\vec{g}_1$ el campo $\vec{g}_2$ producido por la porción de masa que hemos agregado. Este procedimiento es equivalente a haber sustituido la cavidad (masa cero) por dos esferas de igual densidad de masa (una positiva y otra negativa):



Campo dentro de la cavidad

$$\vec{g} = \vec{g}_1 - \vec{g}_2 = -\frac{4\pi}{3}G\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4\pi}{3}G\rho\frac{R}{2}\hat{x}$$

$$\vec{g} = -\frac{2\pi}{3}G\rho R\hat{x}$$

Vemos que, el campo gravitatorio dentro de la cavidad es *uniforme* y apunta en la dirección de las x negativas.

Respuesta:

$$\vec{g} = -\frac{2\pi}{3}G\rho R\hat{x}$$

PR-6.16. *Navegando por el ecuador con una báscula*

Un objeto suspendido de una báscula de resorte es transportado en un buque que navega en la línea ecuatorial con una velocidad v. Halle la expresión para la lectura aproximada de la báscula en términos de la velocidad angular de la Tierra, ω y la lectura W_0 cuando el buque está en reposo.

$$W = W_0(1 \pm \frac{2\omega v}{g})$$

Solución: El objeto se desplaza en el ecuador en un círculo, bajo la acción de la fuerza de gravedad mg y la fuerza elástica del resorte de la báscula, cuyo módulo es $W = kx$. Esta última representa justamente la lectura que registra la báscula. Aplicando la 2ª de Newton al objeto:

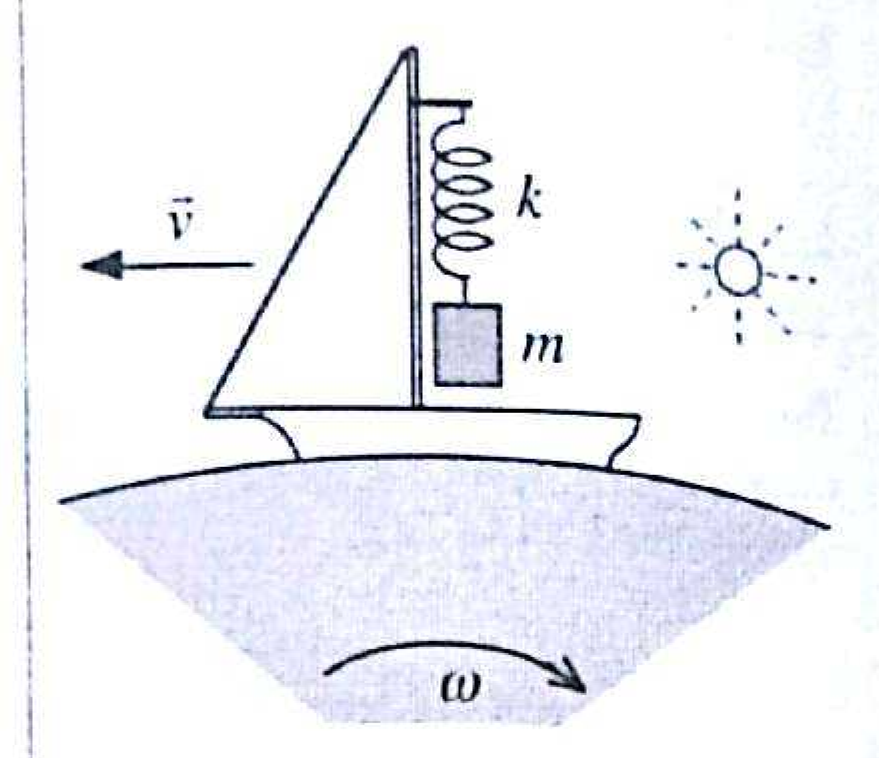
$$\sum F_r = mg - kx = mV^2/R$$

Siendo R el radio de la tierra y V la velocidad del buque relativa al centro de la tierra, la cual está compuesta por la velocidad lineal de rotación de la tierra ωR y la velocidad del buque con relación a la tierra $\pm v$.

$$V = \omega R \pm v$$

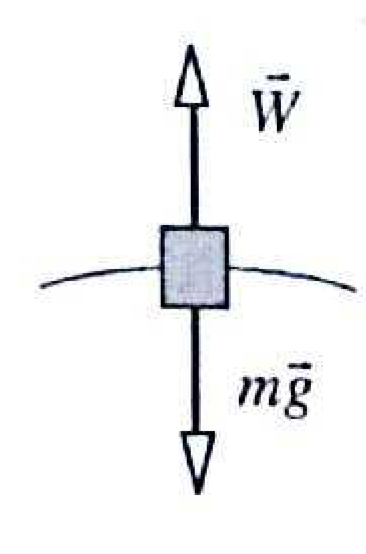
El signo (+) o (-) depende de si el buque viaja en el mismo sentido o en sentido contrario a la rotación de la Tierra. La expresión para la lectura de la báscula es:

$$W = kx = mg - m\omega^2 R \mp 2m\omega v - m\frac{v^2}{R}$$



Tomando en cuenta que la velocidad del barco es mucho menor que la debida a la rotación de la Tierra ($v << \omega R$), podemos despreciar el último término:

$$W = (mg - m\omega^2 R) \mp 2m\omega v$$



El termino entre paréntesis ($mg - m\omega^2 R$) es justamente la lectura de la báscula W_0, cuando el buque está en reposo ($v = 0$), por lo tanto:

$$W = W_0 \mp 2m\omega v = W_0(1 \mp \frac{2m\omega v}{W_0})$$

Tomando en cuenta que ($g >> \omega^2 R$) podemos aproximar:

$$\frac{2m\omega v}{W_0} = \frac{2m\omega v}{mg - m\omega^2 R} = \frac{2\omega v}{g}(1 + \frac{\omega^2 R}{g} + ...) \cong \frac{2\omega v}{g}$$

Queda demostrado que la lectura aproximada de la báscula es:

$$W = W_0(1 \mp \frac{2\omega v}{g})$$

Respuesta:

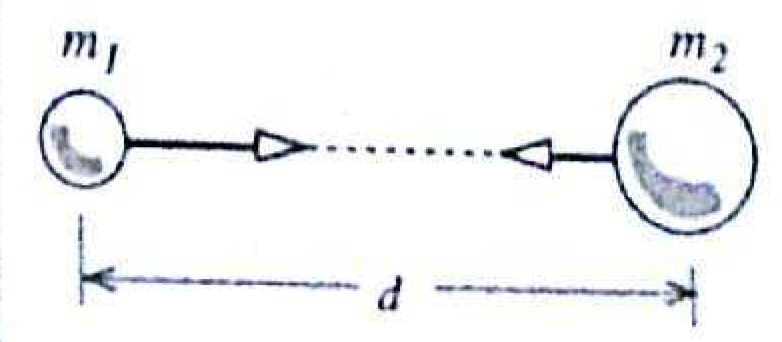
$$W = W_0(1 \mp \frac{2\omega v}{g})$$
(+) El buque viaja hacia el Oeste
(-) El buque viaja hacia el Este

PR-6.17. *Dos esferas que se atraen y chocan*

Dos esferas de masas m_1 y m_2, están inicialmente en reposo cuando están apartados por una distancia infinita. Debido a la atracción gravitacional se van acercando.
a) ¿Cuál será la velocidad relativa entre las esferas en el instante en que la separación de sus centros sea d?
b) Si las esferas tienen masas M y $2M$ y radios R y $2R$, ¿cuál es la velocidad relativa en el instante de chocar?

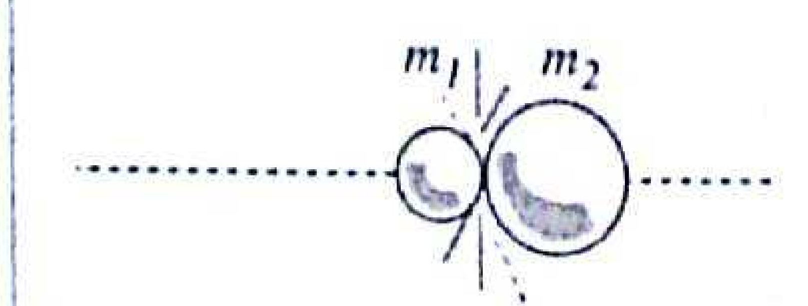
Solución: Como la fuerza externa al sistema es cero, se conserva la cantidad de movimiento lineal ($\vec{p}_f = \vec{p}_i$):

$$0 = m_1v_1 + (-m_2v_2) \quad \Rightarrow \quad m_1v_1 = m_2v_2 \qquad (1)$$



Cuando las esferas están a la separación inicial infinita sus energías cinética y potencial son ambos nulas. Cuando están a una distancia d, entre sus centros, por conservación de la energía mecánica, $U_i + K_i = U_f + K_f$:

$$0 + 0 = -G\frac{m_1m_2}{d} + (\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2) \qquad (2)$$



Despejando v_2 de la expresión (1) y sustituyéndola en la (2), tenemos:

$$G\frac{m_1m_2}{d} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\frac{m_1v_1}{m_2})^2$$

Despejando, encontramos la velocidades:

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{d(m_1+m_2)}}, \qquad v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = m_1\sqrt{\frac{2G}{d(m_1+m_2)}}$$

La velocidad relativa de acercamiento es:

$$v_r = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{d}}$$

b) En el instante del choque la distancia entre sus centros es: $d = R_1 + R_2 = 3R$, y por lo tanto la velocidad relativa es:

$$v_r = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Respuesta:

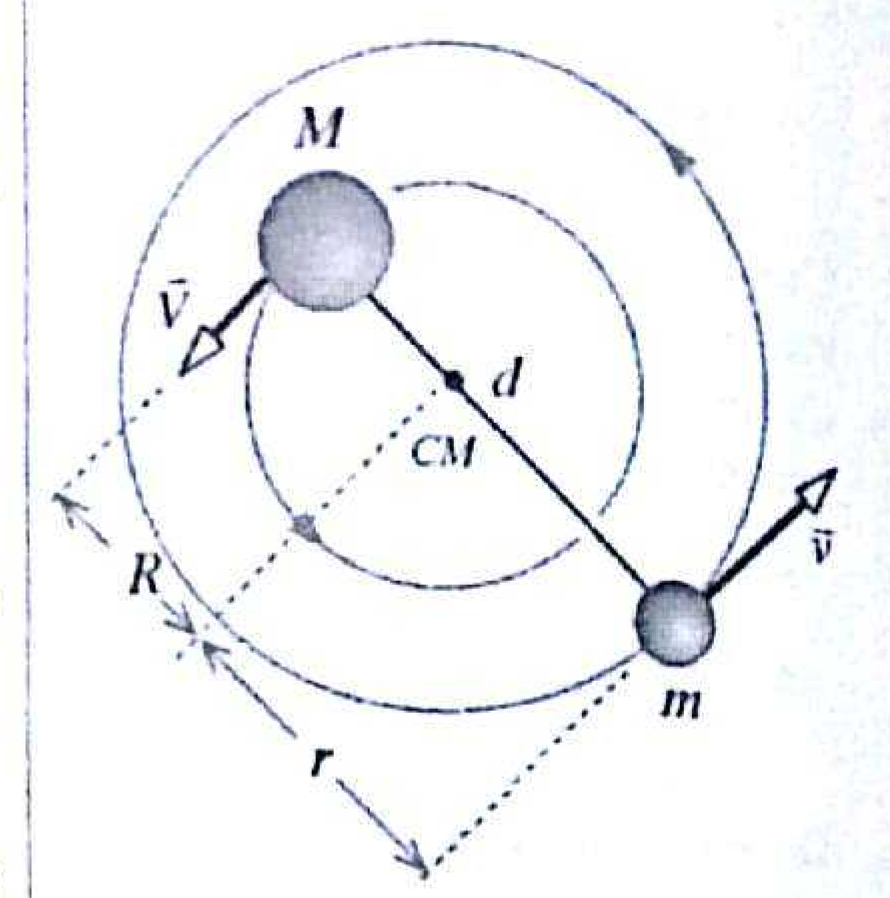
a) $v_r = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{d}}$
b) $v_r = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

PR-6.18. *Estrellas binarias girando en torno al CM*

Un par de estrellas de masas m y M, separadas por una distancia d, giran en órbitas circulares en torno al centro de masa común.
Halle el periodo de rotación de cada estrella.

Solución: Para hallar las distancias respectivas, r y R, de las estrellas al centro de rotación, escogemos la coordenadas del centro de masa en el origen:

$$x_{cm} = 0 = \frac{-MR + mr}{M + m} \quad \Rightarrow \quad MR = mr \qquad (1)$$



Cada estrella gira con movimiento circular uniforme bajo la atracción gravitacional de la otra. Aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$ a cada estrella, se tiene:

$$\frac{GMm}{d^2} = mr\omega_m^2 \quad \text{y} \quad \frac{GMm}{d^2} = MR\omega_M^2 \qquad (2)$$

Tomando en cuenta que: $MR = mr$ de las expresiones (2) se deduce que:

$$\omega_M = \omega_m = \omega$$

Esto era de esperar ya que en un dado intervalo de tiempo los vectores posición tienen iguales desplazamientos angulares. Simplificando las expresiones (2) y sumando tenemos:

$$\frac{G}{d^2}(M + m) = \omega^2 (r + R) = \omega^2 d$$

Por lo tanto, el periodo común de rotación es:

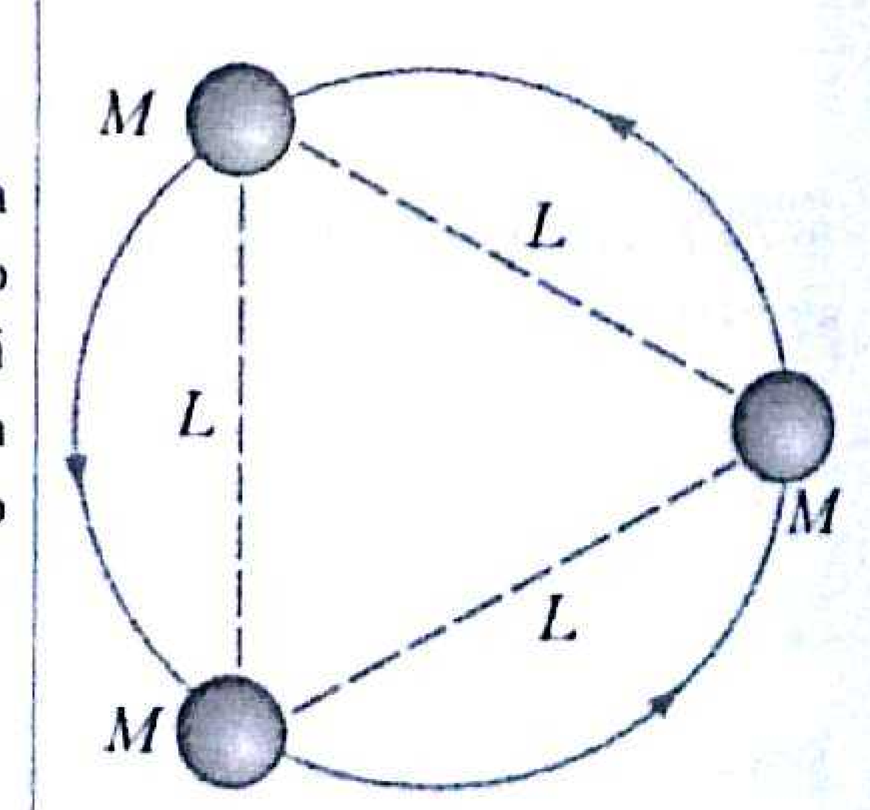
$$T^2 = (\frac{2\pi}{\omega})^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M + m)}$$

Respuesta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(M + m)}}$$

PR-6.19. *Tres estrellas orbitando en un triángulo*

Cierto sistema consiste de tres estrellas idénticas de masa M, que están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. ¿A qué velocidad deben moverse si todas giran bajo la influencia de la gravedad mutua en una órbita circular que circunscribe el triángulo equilátero y cuya forma se mantiene?

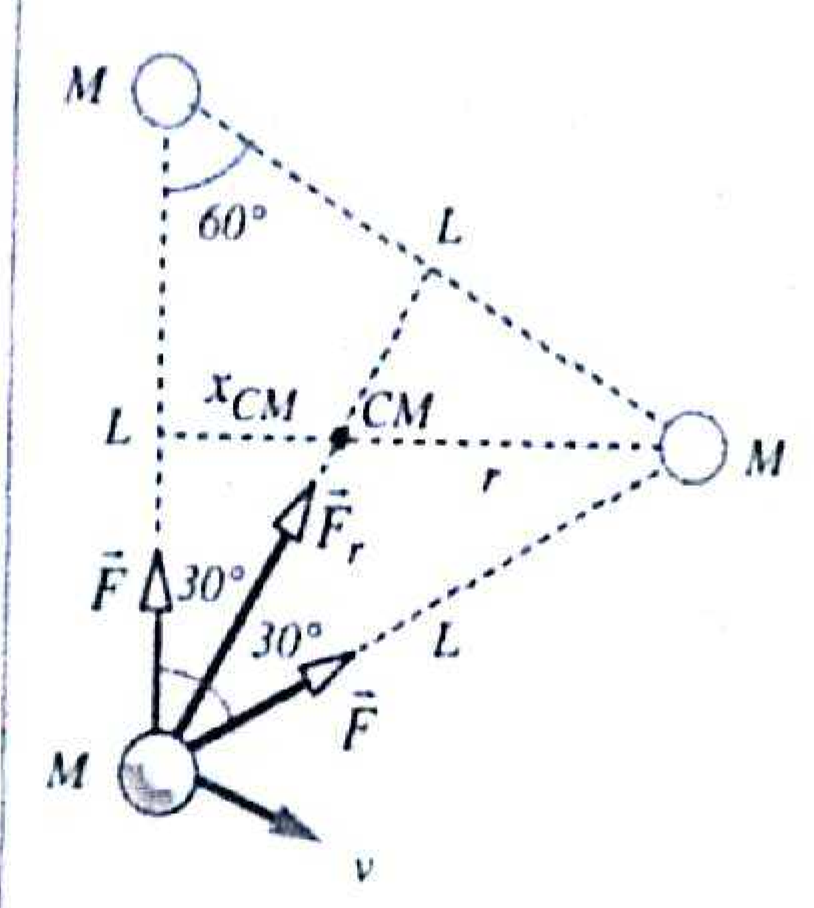


Solución: La fuerza sobre cada estrella es la resultante de la suma vectorial de las fuerzas de atracción gravitacional de las otras dos estrellas. De acuerdo al diagrama indicado, la fuerza resultante es radial y su módulo es:

$$F_r = 2F\cos 30^o = 2(\frac{GM^2}{L^2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\frac{GM^2}{L^2}$$

Las estrellas giran alrededor del centro de masa del sistema, cuya ubicación queda en la dirección del eje x:

$$x_{cm} = \frac{MLsen60^o + 2M(0)}{3M} = \frac{\sqrt{3}}{6}L$$



Por lo tanto el radio de la órbita circular de cada estrella es:

$$r = Lsen60^o - x_{cm} = \frac{\sqrt{3}}{2}L - \frac{\sqrt{3}}{6}L = \frac{\sqrt{3}}{3}L$$

Finalmente, aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento circular de una estrella:

$$F_r = M\frac{v^2}{r}$$

$$\sqrt{3}\frac{GM^2}{L^2} = M\frac{v^2}{\sqrt{3}L/3} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{L}}$$

Respuesta:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{L}}$$

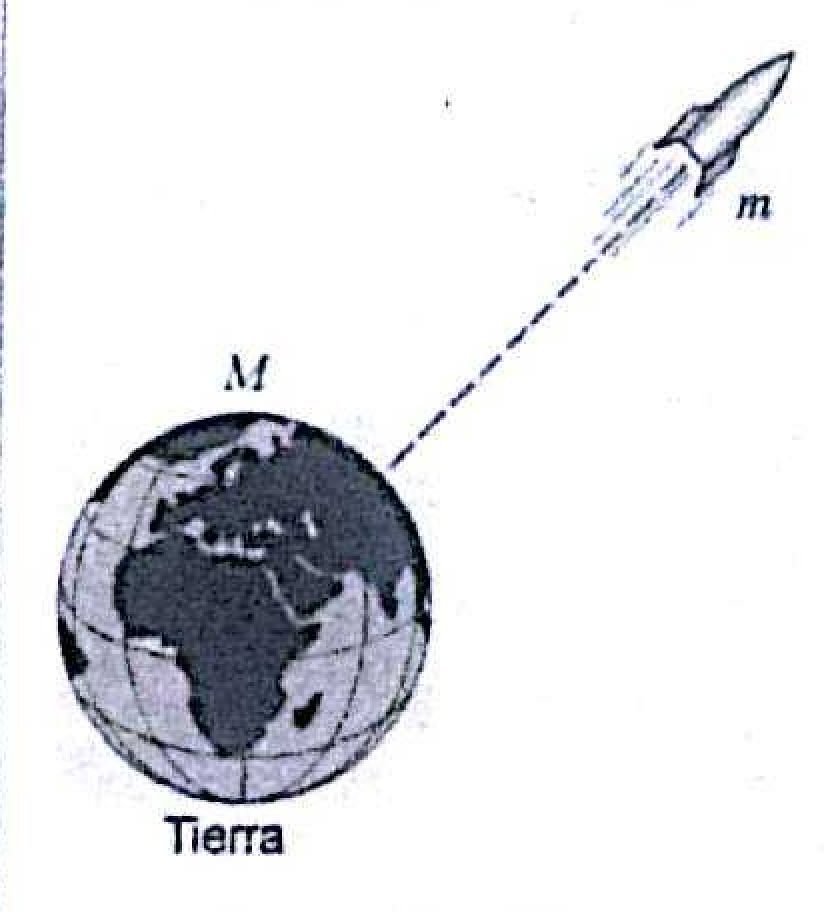
PR-6.20. *¿Escapará de la Tierra?*

Suponga que un cohete de masa m se lanza verticalmente hacia arriba desde la Tierra con una velocidad inicial, $v_0 = 2\sqrt{gR_T}$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

a) ¿Escapará este cohete de la Tierra?

b) En caso de ser así, ¿cuál sería su velocidad cuando se encuentre muy lejos de la Tierra?

* En este tipo de problemas despreciaremos los efectos de la fricción atmosférica.



Solución: a) La velocidad de escape sería aquella que garantice que el cohete pueda apenas llegar al infinito, agotando toda su energía cinética. Por lo tanto, su energía total en el infinito debería ser cero. A partir de la conservación de la energía, escribimos:

$$K_f + U_f = K_i + U_i = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + (-\frac{GmM_T}{R_T}) = 0$$

Despejando, encontramos la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}$$

Donde hemos tomado en cuenta la expresión para la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: $g = GM_T / R_T^2$. Vemos que la velocidad de lanzamiento es mayor que la de escape:

$$v_0 = 2\sqrt{gR_T} = \sqrt{2}v_e$$

Podemos concluir que este cohete escapa de la Tierra.

b) Aplicando la conservación de la energía, $K_i + U_i = K_f + U_f$, se obtiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (-\frac{GmM_T}{R_T}) = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Luego la velocidad del cohete cuando se encuentre muy lejos de la Tierra será:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{4gR_T - 2gR_T} = \sqrt{2gR_T}$$

Respuesta:

a) El cohete escapa de la Tierra
b) $v = \sqrt{2gR_T}$

PR-6.21. *Primera ley de Kepler: Ley de las órbitas*

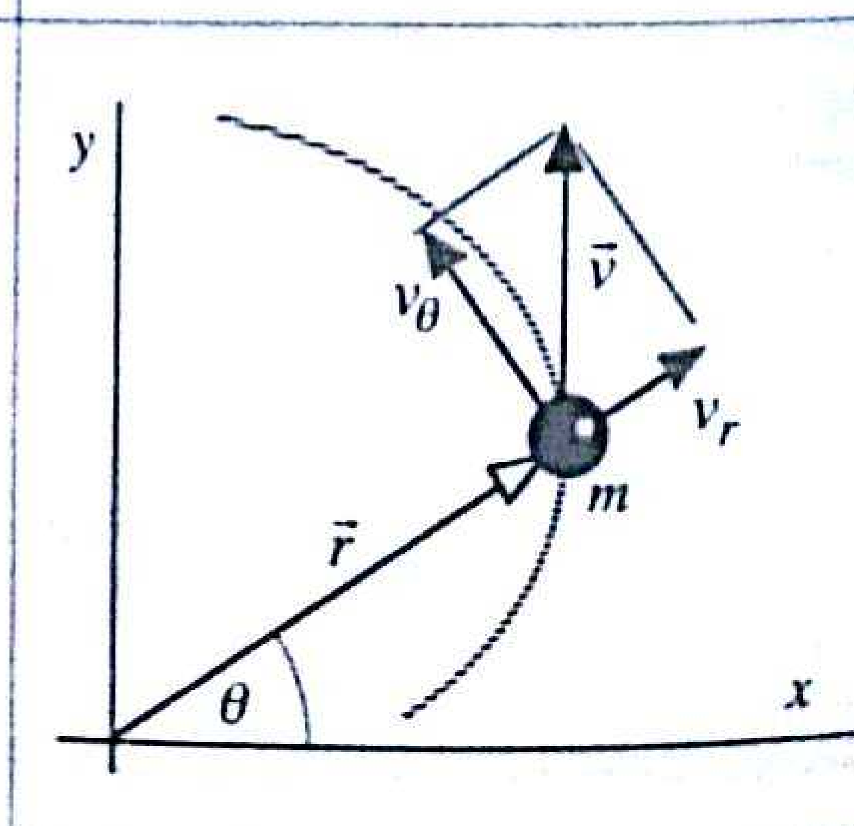
Demuestre que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los puntos focales.

Exprese la energía total E y el momento angular L del planeta en términos del semieje mayor a y de la excentricidad ε de la elipse.

Solución: Sean (v_r, v_θ) las componentes de la velocidad del planeta de masa m, en la dirección radial y transversal. La energía mecánica (cinética más potencial) es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{k}{r}$$

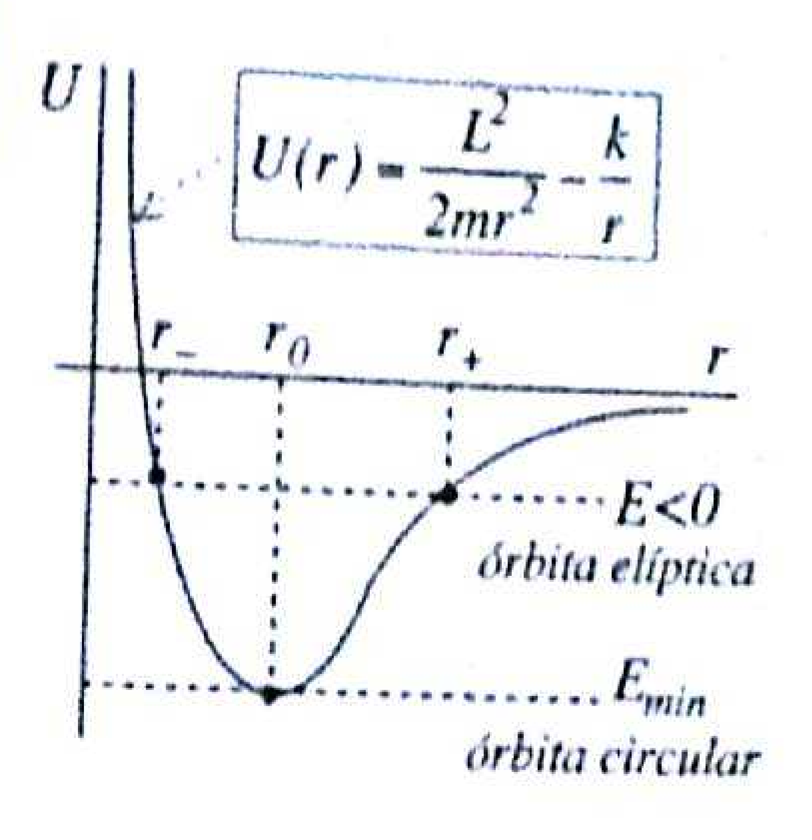
Siendo la constante: $k = GMm$, donde M es la masa del Sol.



El momento angular es: $L = mrv_\theta$. Despejando v_θ y sustituyéndolo en la expresión para la energía, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 + U(r)$$

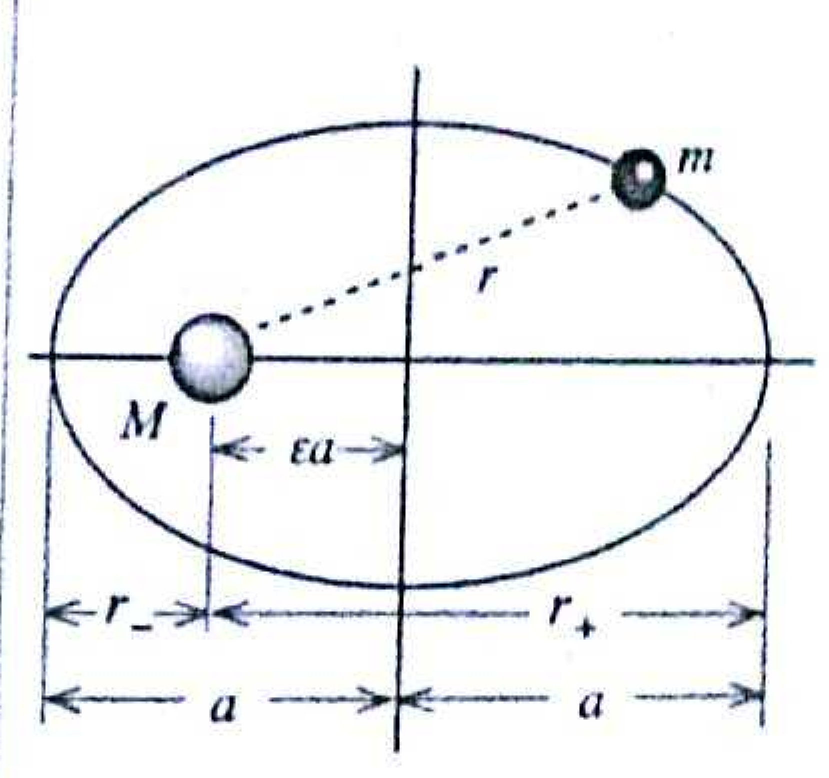
El término: $U(r) = L^2 / 2mr^2 - k/r$ representa una especie de energía potencial efectiva y su dependencia con r está representada en la siguiente gráfica.



Vemos en esta gráfica que en el caso en que la energía total tiene el menor valor posible ($E = E_{min}$), la distancia radial nunca cambia, $r = r_o$ y la velocidad radial, v_r, es nula. Esto corresponde a una *órbita circular*.

Cuando la energía total E (negativa) es mayor que $E_{mín}$ tenemos *órbitas elípticas*. La distancia radial entre M y m varía entre los dos valores extremos, r_- y r_+ y en esos puntos, se anula la velocidad radial. En efecto, para v_r = 0, de la ecuación anterior se obtiene una ecuación cuadrática en r:

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$



$r_+ = a(1+\varepsilon)$
$r_- = a(1-\varepsilon)$
$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Primera Ley de Kepler:
Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas teniendo al Sol como uno de los focos

Las dos raíces de esta ecuación son:

$$r_\pm = -\frac{k}{2E}[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}] = a(1 \pm \varepsilon)$$

En la elipse esta solución corresponde a las distancias extremas del planeta m respecto al punto focal (el Sol).

El semieje mayor está relacionado con la energía:

$$a = -\frac{k}{2E} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{k}{2a}$$

De la excentricidad obtenemos el momento angular:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{mka(1-\varepsilon^2)}$$

Queda demostrado que la energía E del planeta depende únicamente de la longitud del semi-eje mayor a de su órbita y es independiente de la excentricidad ε.

Respuesta:

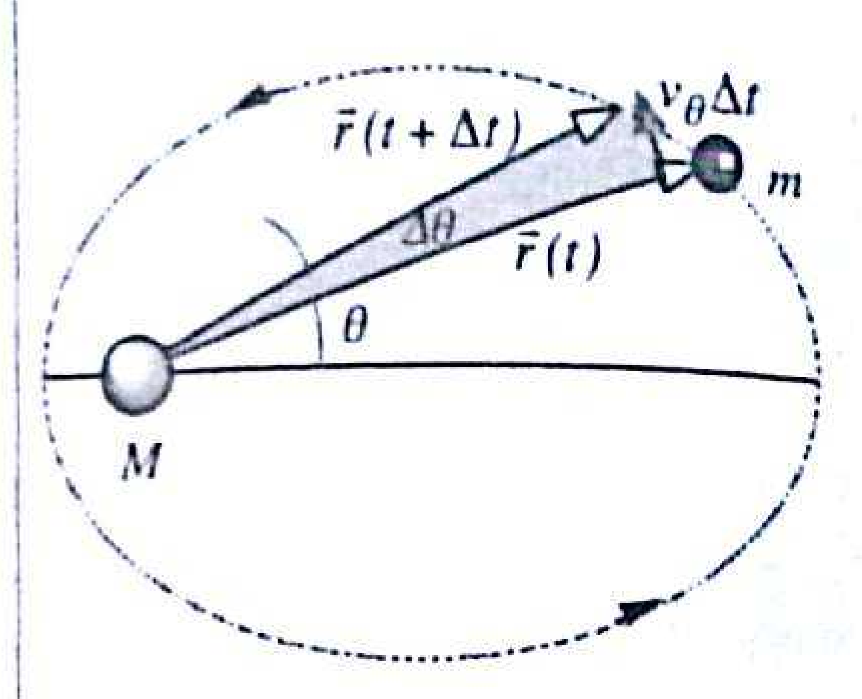
a) $E = -\frac{k}{2a}$
b) $L = \sqrt{mka(1-\varepsilon^2)}$

PR-6.22. *Segunda ley de Kepler: Ley de las áreas*

Demuestre que el radio vector trazado desde el Sol hasta un planeta, barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Solución: Durante un intervalo de tiempo muy corto, Δt, el planeta viaja una distancia $v_\theta \Delta t$ casi perpendicular al radio vector $\vec{r}(t)$ y barre el área triangular mostrada. Esta área es aproximadamente igual a la mitad de la base por la altura:

$$\Delta A = \frac{1}{2} Altura \times Base = \frac{1}{2} r(v_\theta \Delta t)$$



Segunda Ley de Kepler

Una línea que une a cualquier planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales

Dividiendo por Δt y pasando al límite, $\Delta t \to 0$, tenemos la tasa de barrido del área:

$$\frac{dA}{dt} = Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v_\theta$$

Teniendo en cuenta que el módulo del momento angular es: $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv_\theta$, se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

Por ser la fuerza gravedad una *fuerza central*, el torque sobre el planeta, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ es cero (puesto que $\vec{F}$ es paralelo a $\vec{r}$) y como consecuencia el momento angular se conserva, o sea, dA/dt es constante. Así pues, concluimos que: *el radio vector desde el Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Respuesta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

PR-6.23. *Tercera ley de Kepler: Ley de los períodos*

Demostrar que el cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semi eje mayor de la órbita elíptica.

Solución: Podemos aplicar el resultado del problema anterior en el caso en que el planeta recorre toda la elipse barriendo el área total A de la elipse en el periodo T:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A$$

El área de una elipse en términos de su excentricidad ε es:

$$A = \pi ab = \pi a(a\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Mientras que el momento angular es (Prob. PR-6.21):

$$L = \sqrt{mka(1-\varepsilon^2)}$$

Sustituyendo A y L en la expresión anterior, se obtiene:

$$T = \frac{2mA}{L} = \frac{2m\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{mka(1-\varepsilon^2)}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Tercera Ley de Kepler

El cuadrado del período es proporcional al cubo del semi-eje mayor

Es decir, el cuadrado del período es proporcional al cubo del semi-eje mayor. Observe que esta relación entre T y, a, es independiente de los parámetros del planeta particular: E, L y m.

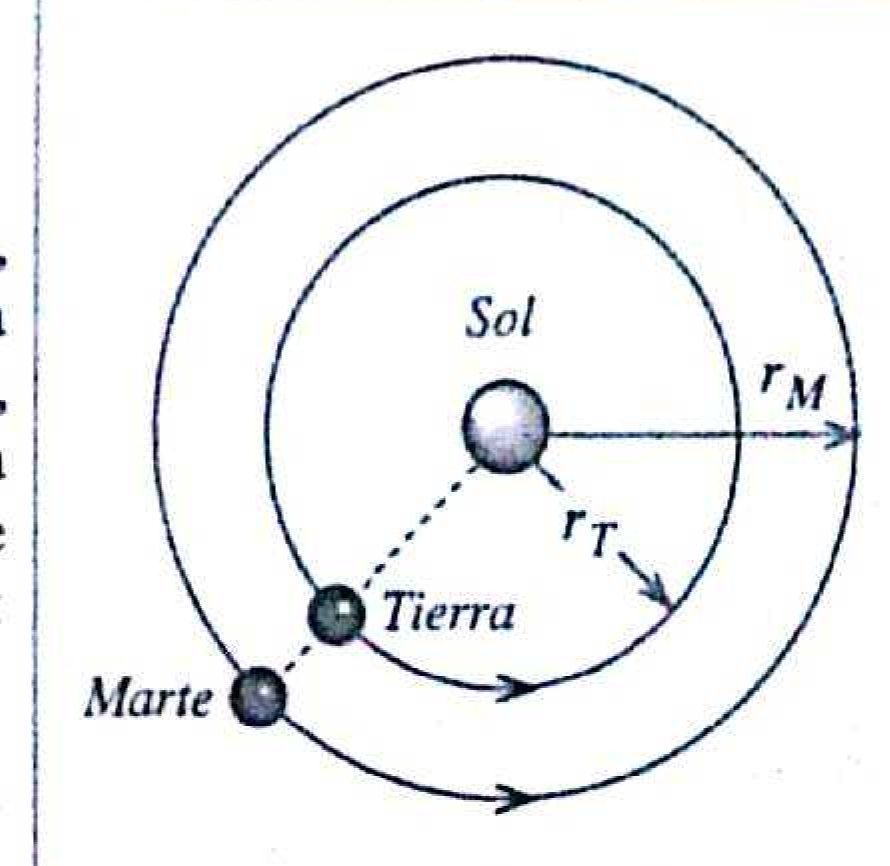
Respuesta:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3$$

PR-6.24. *Conjunción de Marte y la Tierra*

Cuando la Tierra, Marte y el Sol se encuentran alineados, se dice que los dos planetas están en conjunción. Suponga que un cierto día Marte y la Tierra están en conjunción, ¿cuantos días transcurrirán antes de que esto vuelva a suceder? Suponga que las órbitas de la Tierra y de Marte son circulares y coplanares, siendo lo radios respectivos: $r_T = 1$ U.A. y $r_M = 1{,}52$ U.A. (Unidades Astronómicas).

Se denomina periodo sinódico al de conjunción de dos planetas



Solución: Si la órbita fuera circular, por la tercera ley de Kepler el cuadrado del período de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del radio:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}}\, r^{3/2}$$

La relación entre los períodos de Marte y de la Tierra son:

$$\frac{T_M}{T_T} = \left(\frac{r_M}{r_T}\right)^{3/2} = 1{,}52^{3/2} = 1{,}89$$

El periodo de Marte es:

$$T_M = 1{,}87T_T = 1{,}89(365) = 690 \text{ días}$$

Las velocidad angular de Marte con relación a la de la Tierra es:

$$\omega_r = \omega_T - \omega_M = \frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}$$

Por lo tanto, el tiempo de encuentro está dado por:

$$T_R = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}} = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} = 775 \text{ días}$$

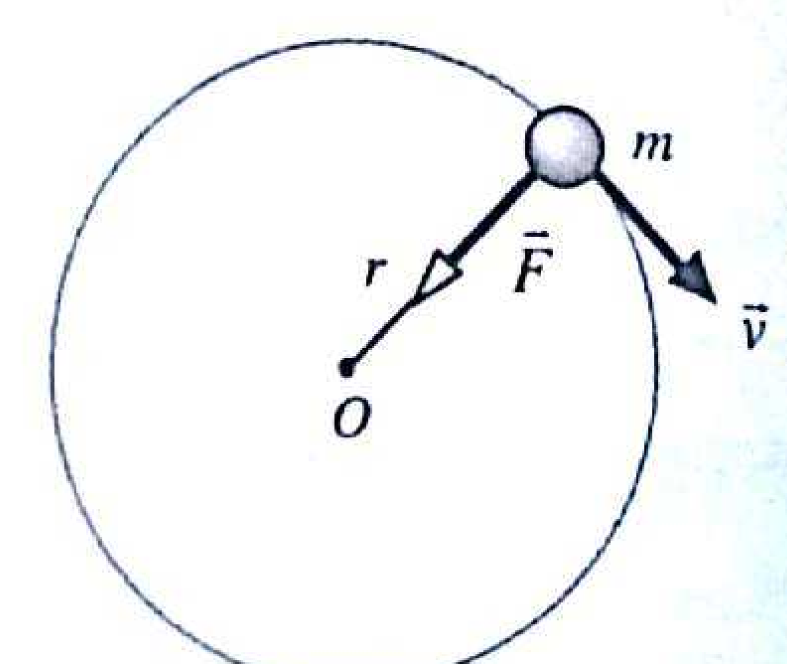
Respuesta:

$$T_R = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} = 775 \text{ días}$$

PR-6.25. *Una fuerza central que es proporcional a $1/r^3$*

Supongamos una masa puntual m que es atraída hacia el centro O con un campo de fuerzas que varía con el inverso del cubo de la distancia:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$$



Siendo k una constante. Si la partícula se mantiene moviéndose en una órbita circular de radio r. Determine:
a) La energía potencial, suponiendo $U(\infty) = 0$.
b) La energía cinética.
c) La energía total.

Solución: a) La diferencia de energía potencial es el trabajo requerido para traer la partícula desde el infinito:

$$U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r \left(-\frac{k}{r^3}\hat{r}\right)\cdot d\vec{r}$$

$$U(r) = 0 + k\int_\infty^r \frac{dr}{r^3} = -k\frac{1}{2r^2}\Big|_\infty^r = -\frac{k}{2r^2}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton ($F = ma$):

$$\frac{k}{r^3} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{k}{mr^2}$$

La energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{r^2}$$

La energía mecánica total es la suma:

$$E = K + U = \frac{k}{2r^2} + \left(-\frac{k}{2r^2}\right) = 0$$

Respuesta:

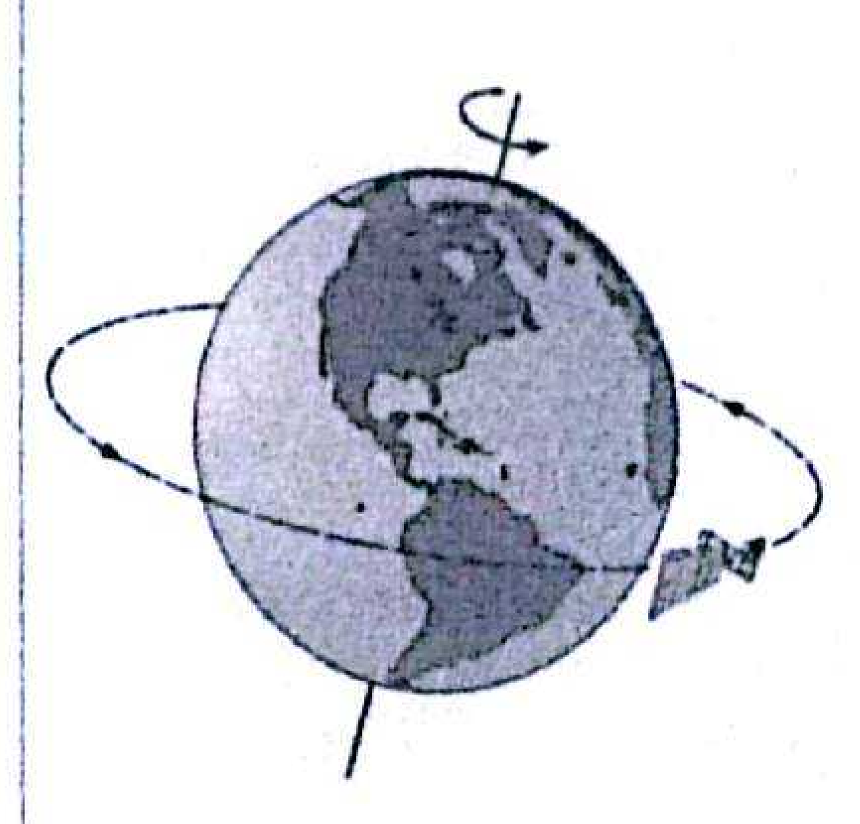
a) $U = -\frac{k}{2r^2}$,
b) $K = +\frac{1}{2}\frac{k}{r^2}$,
c) cero

PR-6.26. *Satélites artificiales geo-estacionarios*

Un satélite geosincrónico de comunicaciones en órbita es aquel que permanece en el mismo punto sobre la Tierra en el ecuador. Suponiendo que la órbita sea circular:
a) ¿Cuál debe ser su altura sobre la superficie terrestre?
b) ¿Cuál es la velocidad del satélite?
c) ¿Se podrían colocar satélites geoestacionarios para comunicaciones directamente sobre cada país?

Solución: a) La fuerza gravitatoria de la Tierra proporciona la fuerza centrípeta al satélite:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$



El radio de la órbita debe ser entonces:

$$r = \left(\frac{GT^2M}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$r = \left[\frac{(6{,}67\text{x}10^{-11}\text{N.m}^2/\text{kg}^2)(86400\text{s})^2(5{,}98\text{x}10^{24}\text{kg})}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

$$r = 4{,}22\text{x}10^7 \text{ m}$$

Para hallar la altura h del satélite, se le resta a r el radio de la tierra:

$$h = r - R = 4{,}22\text{x}10^7\text{m} - 6{,}37\text{x}10^6\text{m} = 3{,}58\text{x}10^7\text{m}$$

b) Para que el satélite permanezca estacionario sobre un meridiano en particular en la superficie terrestre, debe dar una vuelta cada 24 horas (T = 24 h = 86400 s). La velocidad del satélite debe ser:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(4{,}22\text{x}10^7\text{m})}{86400\text{s}} = 3069\text{m/s}$$

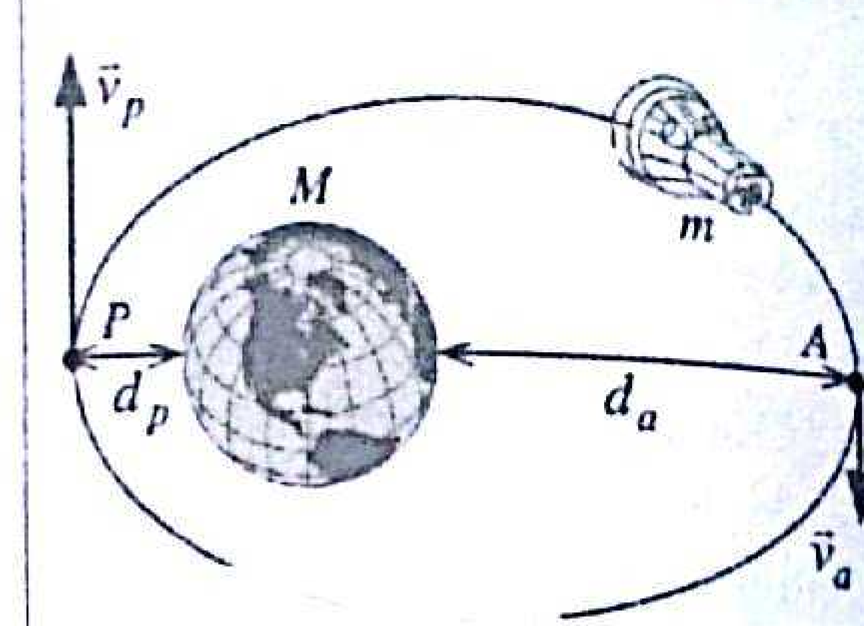
c) No se podrían colocar satélites geoestacionarios directamente sobre cada región de la Tierra. Para que el satélite permanezca inmóvil respecto a la Tierra, el plano de su órbita debe ser ecuatorial. Para cualquier otra órbita en un plano paralelo al ecuatorial, habría una componente de la fuerza gravitacional que tendería a sacar el satélite de ese plano.

Respuesta:

a) $h \cong 3600\text{km}$
b) $v = 3069\text{m/s}$
c) Imposible

PR-6.27. *Velocidades en el apogeo y el perigeo*

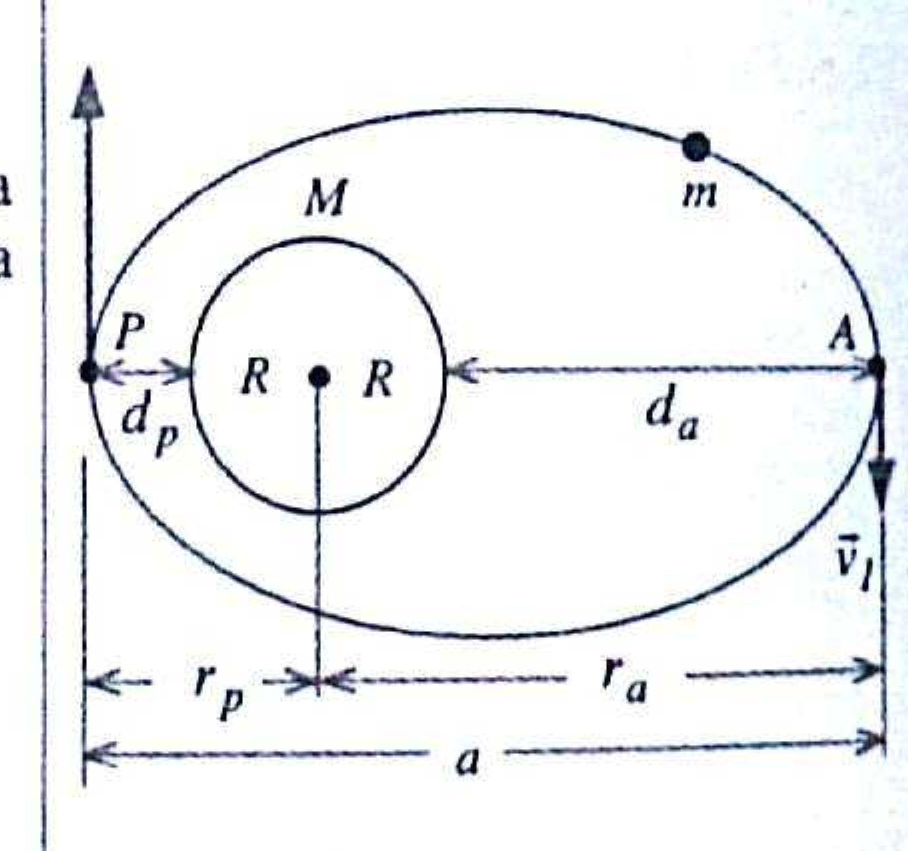
Un satélite se coloca en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia mas lejana a la superficie terrestre (apogeo), es $d_a = 3000$ km, y su distancia mas próxima a la superficie terrestre (perigeo), es $d_p = 400$ km. Determine la velocidad del satélite en estos puntos.



Solución: a) En las dos posiciones extremas la velocidad es perpendicular al radio vector. Aplicando la conservación del momento angular en ambos puntos, tenemos:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = mr_a v_a = mr_p v_p$$

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional de la Tierra y por lo tanto la energía mecánica total se conserva:



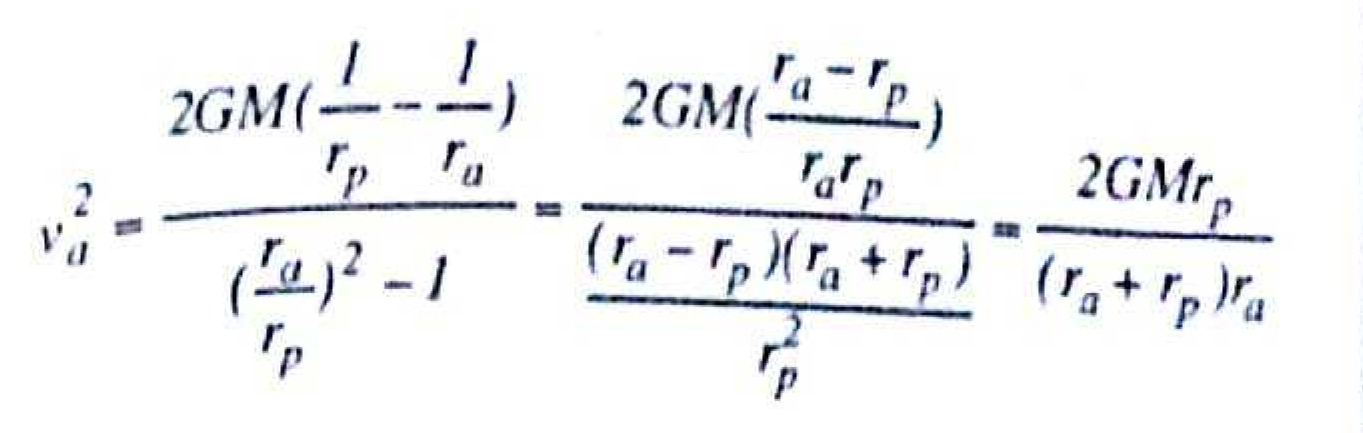
$$K_a + U_a = K_p + U_p$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + (-\frac{GMm}{r_a}) = \frac{1}{2}mv_p^2 + (-\frac{GMm}{r_p})$$

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{r_p}$$

Sustituyendo en esta expresión, la velocidad del satélite en el perigeo: $v_p = r_a v_a / r_p$, tenemos:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2}(\frac{r_a}{r_p})^2 v_a^2 - \frac{GM}{r_p}$$



$$v_a^2 = \frac{2GM(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a})}{(\frac{r_a}{r_p})^2 - 1} = \frac{2GM(\frac{r_a - r_p}{r_a r_p})}{\frac{(r_a - r_p)(r_a + r_p)}{r_p^2}} = \frac{2GMr_p}{(r_a + r_p)r_a}$$

Las distancias radiales medidas desde el centro de la Tierra son, respectivamente:

$$r_a = R_T + d_a = 6{,}37\text{x}10^6\text{m} + 3\text{x}10^6\text{m} = 9{,}37\text{x}10^6\text{m}$$

$$r_p = R_T + d_p = 6{,}37\text{x}10^6\text{m} + 0{,}4\text{x}10^6\text{m} = 6{,}77\text{x}10^6\text{m}$$

$$v_a^2 = \frac{2(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})(6{,}77\text{x}10^6)}{(9{,}37\text{x}10^6 + 6{,}77\text{x}10^6)(9{,}37\text{x}10^6)} = 3{,}57\text{x}10^7\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$v_a = 5975\text{m/s}$$

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p} = \frac{(5975\text{m/s})(9{,}37\text{x}10^6\text{m})}{6{,}77\text{x}10^6\text{m}} = 8270\text{m/s}$$

Respuesta:

En el apogeo: $v_a = 5975\text{m/s}$
En el perigeo: $v_p = 8270\text{m/s}$

PR-6.28. *Lanzamiento de un cohete a 45°*

Se lanza un cohete con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo $\theta = 45°$ con la vertical y de magnitud 0,8 veces la velocidad de escape. ¿Cuál será la máxima distancia que se aleja este cohete de la Tierra?

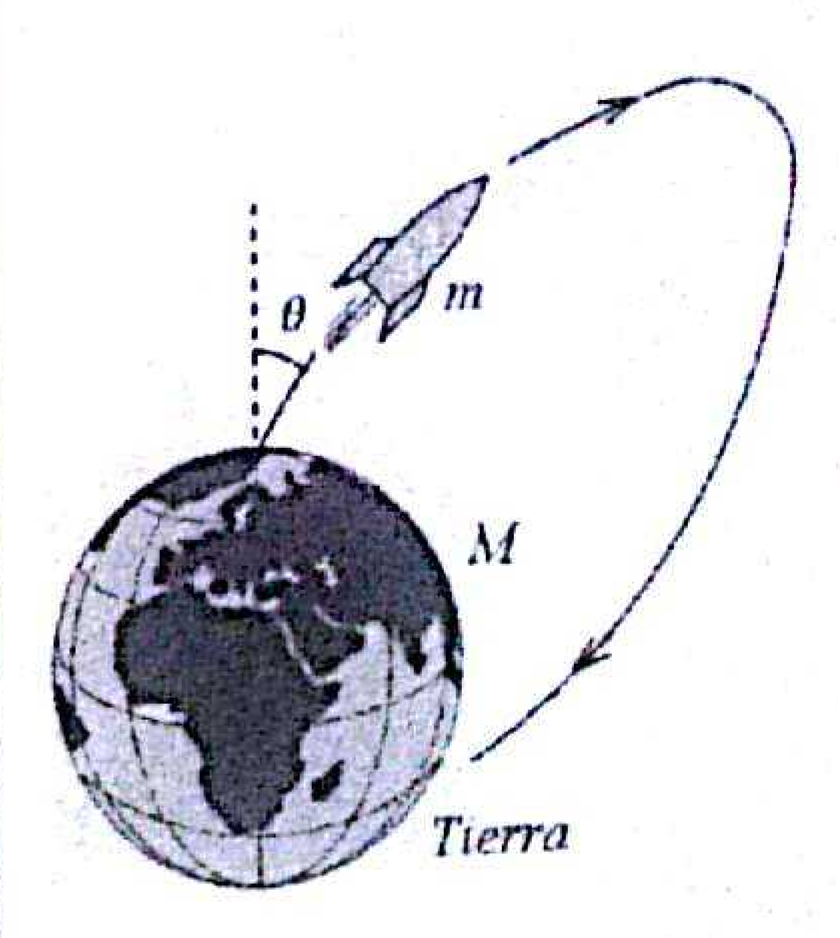
Solución: En la posición extrema de su trayectoria elíptica, la velocidad $\vec{v}$ es perpendicular al radio vector $\vec{r}$ desde el centro de la Tierra. Aplicando la conservación del momento angular ($L_F = L_0$):

$$mvr = mv_0 R\cos 45° \quad \Rightarrow \quad v = v_0(R/\sqrt{2}r) \qquad (1)$$

Por la conservación de la energía mecánica:

$$K_0 + U_0 = K_F + U_F$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (-\frac{GMm}{R}) = \frac{1}{2}mv^2 + (-\frac{GMm}{r}) \qquad (2)$$



Tomando en cuenta que la velocidad de escape desde la Tierra es $v_e^2 = 2GM/R$, escribimos:

$$v_0^2 - v_e^2 = v^2 - v_e^2 \frac{R}{r}$$

Sustituyendo v de la relación (1) y el valor $v_0 = 0,8v_e$, y llamando $x = R/r$, encontramos:

$$0,64v_e^2 - v_e^2 = \frac{0,64v_e^2}{2}x^2 - v_e^2 x$$

Simplificando, obtenemos la ecuación cuadrática en x:

$$0,32x^2 - x + 0,36 = 0$$

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(0,32)(0,36)}}{2(0,32)} \Rightarrow \begin{matrix} x_+ = 2,710 \\ x_- = 0,415 \end{matrix}$$

La solución buscada corresponde a:

$$x_- = 0,415 = R/r \quad \Rightarrow \quad r = 2,41R.$$

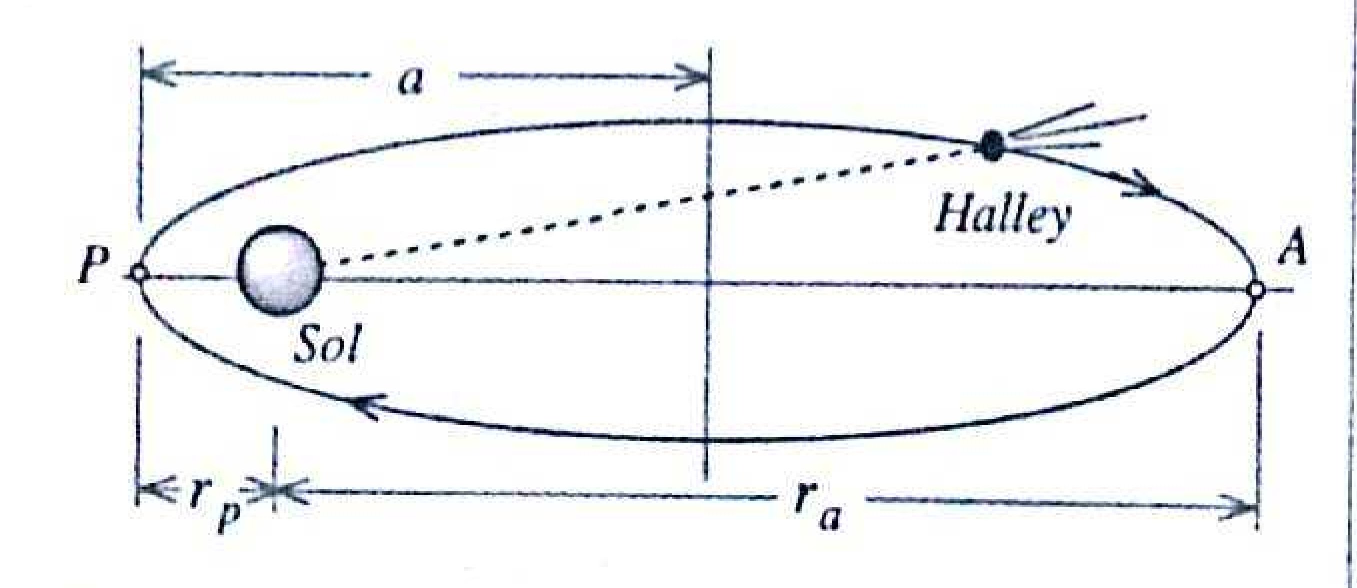
La otra solución correspondería a una posición extrema ($r = 0,369R$), la cual sería imposible de alcanzar porque el cohete tendría que penetrar dentro de la Tierra.

Respuesta:

Máxima distancia que se aleja desde el centro de la Tierra: $r = 2,41R$

PR-6.29. *Por allí pasará el cometa Halley en el año 2023*

El cometa Halley se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica muy alargada y su período es de 75,5 años.



En Febrero de 1986 el cometa Halley pudo ser observado cuando alcanzó su perigeo (mayor acercamiento al Sol), a una distancia $r_p = 8{,}75\text{x}10^{10}$ metros. En Noviembre del año 2023 pasará por su apogeo o máxima distancia al Sol, ¿Cuál será esta distancia r_a?

Solución: El período del cometa Halley en segundos es:

$$T = 75,5\text{años}(365\frac{\text{dias}}{\text{año}})(24\frac{\text{horas}}{\text{día}})(60\frac{\text{min}}{\text{hora}})(60\frac{\text{s}}{\text{min}})$$

$$T = 2,38\text{x}10^9\text{s}$$

De acuerdo a la tercera Ley de Kepler, la relación entre el semieje mayor de la órbita y el período del cometa es:

$$a^3 = (\frac{GM}{4\pi^2})T^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = (\frac{GMT^2}{4\pi^2})^{1/3}$$

$$a = [\frac{(6.67\text{x}10^{-11})(1,99\text{x}10^{30})(2,38\text{x}10^9)^2}{4\pi^2}]^{1/3} = 2,67\text{x}10^{12}\text{m}$$

El semieje mayor de la elipse, a, es justamente la semisuma de las distancias máxima y mínima:

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$$

Por lo tanto, la máxima distancia de Halley al Sol será:

$$r_a = 2a - r_p = 2\text{x}2,67\text{x}10^{12}\text{m} - 8,75\text{x}10^{10}\text{m} = 5,25\text{x}10^{12}\text{m}$$

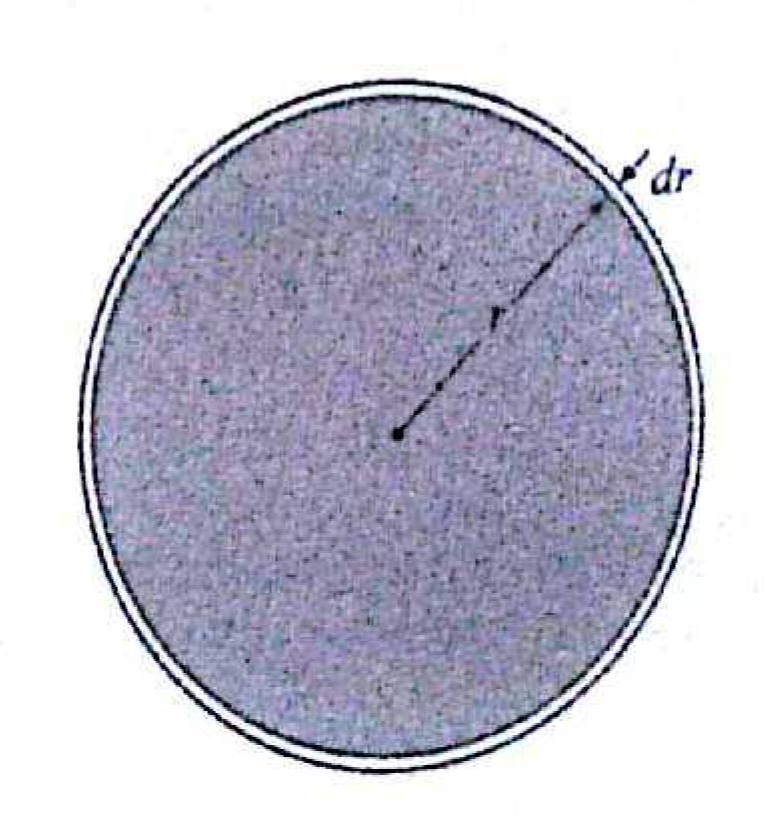
Respuesta:

$r_a = 5,25\text{x}10^9$ km

PR-6.30. *Energía para destruir el planeta Tierra*

Cuando se detonaron las primeras armas atómicas durante la segunda guerra mundial, surgió una gran preocupación por el peligro de una reacción nuclear en cadena incontrolable que llegase a reducir nuestro planeta a fragmentos. Consideramos la Tierra como una esfera uniforme de masa M y radio R, calcule cuál sería la energía necesaria para desarticular la Tierra en fragmentos totalmente separados entre sí.

Solución: Para calcular la energía de formación de la Tierra, nos la imaginamos como una especie de cebolla, constituida por una serie de capas esféricas. Consideremos una capa de radio r que tiene una masa: $dm = \rho 4\pi r^2 dr$, siendo la densidad de la Tierra su masa dividida por su volumen, $\rho = M/(4/3)\pi R^3$.



Si tomamos como cero de referencia a separación infinita, la energía potencial gravitacional de la capa que rodea un núcleo esférico radio r y masa m es:

$$dU = -\frac{Gmdm}{r} = -G\frac{(\frac{4}{3}\pi r^3\rho)(4\pi r^2 dr\rho)}{r} = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 r^4 dr$$

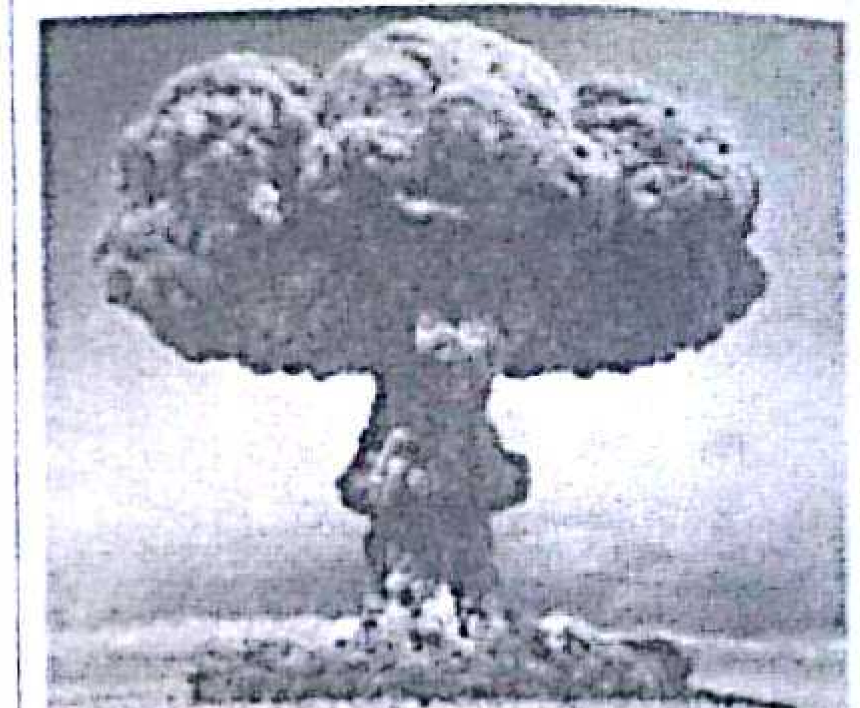
La energía potencial total después de traer todas las capas desde una distancia infinita se obtiene integrando por toda la serie de capas:

$$U = -\int_0^R \frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 r^4 dr = -\frac{G(4\pi\rho)^2}{3}\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^R$$

$$U = -\frac{G\rho^2(4\pi)^2}{3^2}\left(\frac{3R^5}{5}\right) = -G\left(\frac{\rho 4\pi R^3}{3}\right)^2\left(\frac{3}{5R}\right) = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

El trabajo para separar, una a una, la serie de conchas y llevarlas hasta infinito sería el valor positivo de esta cantidad:

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = \frac{3}{5}\frac{(6{,}67x10^{-11})(5{,}97x10^{24})^2}{6{,}38x10^6} = 2{,}24x10^{32}\,\text{J}$$



Bomba nuclear

1 megaton de TNT = $4{,}18x10^{15}$ J

La energía destructiva de las bombas nucleares se acostumbra expresarlas en una unidad derivada de la combustión de TNT. Una tonelada de TNT es equivalente a $4{,}18\text{x}10^9$ Joules. Para tener una idea, las bombas que devastaron Hiroshima y Nagasaki poseían apenas una energía destructiva del orden de 20 kilotones. Las que existen actualmente en los arsenales de las potencias atómicas podrían llegar a hasta 50 megatones de TNT o $2{,}1\text{x}10^{17}$ Joules. Esto significa que para desarticular la Tierra en fragmentos totalmente separados entre sí, se necesitaría detonar unas 10^{15} bombas de este tipo.

Respuesta:

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2{,}24x10^{32}\,\text{J}$$

PR-6.31. *¿Qué trayectoria seguirá este satélite?*

Un satélite se encuentra en órbita circular con radio seis veces el radio de la Tierra ($r_0 = 6R$). En cierto instante un cohete de frenado se dispara, reduciendo la velocidad del satélite a la mitad de su valor inicial y en la misma dirección. ¿Cuál será la trayectoria subsiguiente del satélite?

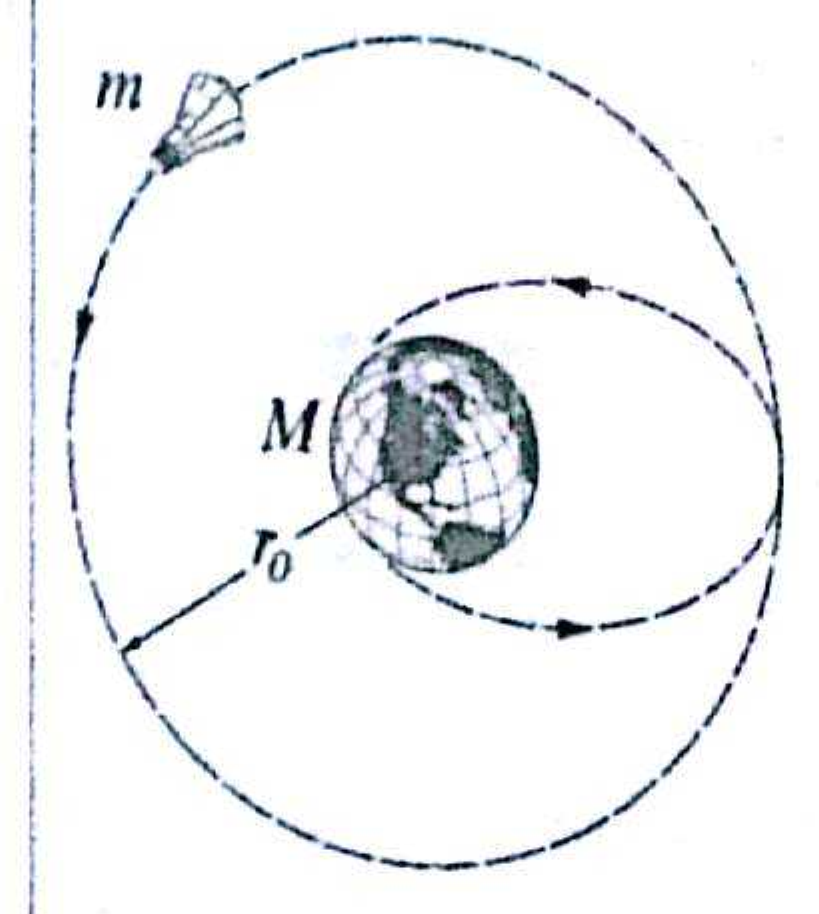
Solución: La velocidad inicial del satélite en la órbita circular se obtiene aplicando la segunda ley de Newton ($F = ma$):

$$\frac{GMm}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{GM}{r_0} \qquad (1)$$

En la nueva órbita, que es elíptica, el satélite conserva su momento angular:

$$mr_2v_2 = mr_1v_1 = mr_0\frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)v_0$$

Aplicando la conservación de la energía entre los puntos extremos de la órbita elíptica ($K_1 + U_1 = K_2 + U_2$):



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0}{r_2}\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Sustituyendo la expresión (1) para v_0^2, tenemos:

$$\frac{1}{8}\frac{GM}{r_0} - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{8}\frac{GM}{r_0}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2 - \frac{GM}{r_2}$$

Simplificando, se obtiene una ecuación cuadrática:

$$\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2 - 8\left(\frac{r_0}{r_2}\right) + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

Donde: $x = r_0 / r_2$. Las raíces de esta ecuación son:

$$x_\pm = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} \begin{cases} x_+ = 7 \\ x_- = 1 \end{cases}$$

La solución es: $x = r_0 / r_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_0 / 7 = 6R/7$

Como el radio final sería menor que el radio de la Tierra, concluimos que el satélite se estrella con la Tierra.

Respuesta:

$$r_2 = \frac{r_0}{7} = \frac{6}{7}R < R$$

El satélite sigue una trayectoria elíptica y se estrella con la Tierra

PR-6.32. *Retorno a Tierra de una cápsula espacial I*

Un satélite se encuentra en órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre que es dos veces el radio de la Tierra. Se desea retornar a la Tierra una cápsula espacial que salga en forma tangencial del satélite (punto A) y que llegue tangencialmente a la superficie terrestre (punto B). Determine la velocidad inicial de la cápsula:

a) Con relación a Tierra.

b) Con relación al propio satélite.

Solución: a) Aplicando la conservación del momento angular en las posiciones inicial y final, A y B de la trayectoria elíptica:

$$L_A = L_B \quad \Rightarrow \quad m r_A v_A = m r_B v_B$$

Por la conservación de la energía entre los mismos puntos extremos:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \left(-\frac{GMm}{r_B}\right)$$

$$v_A^2 - \frac{2GM}{r_A} = v_B^2 - \frac{2GM}{r_B}$$

Sustituyendo la velocidad final $v_B = v_A(r_A / r_B)$ y las distancias, $r_A = 3R$, $r_B = R$, encontramos:

$$v_A^2 = \frac{2GMr_B}{(r_A + r_B) r_A} = \frac{2GMR}{(3R + R)3R} = \frac{1}{6}\frac{GM}{R}$$

Usando los valores numéricos, encontramos la velocidad inicial de partida de la cápsula con relación a Tierra:

$$v_A = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})}{6\text{x}6{,}37\text{x}10^6}} = 3230\text{m/s}$$

b) La velocidad del satélite en la órbita circular se halla aplicando la segunda ley de Newton:

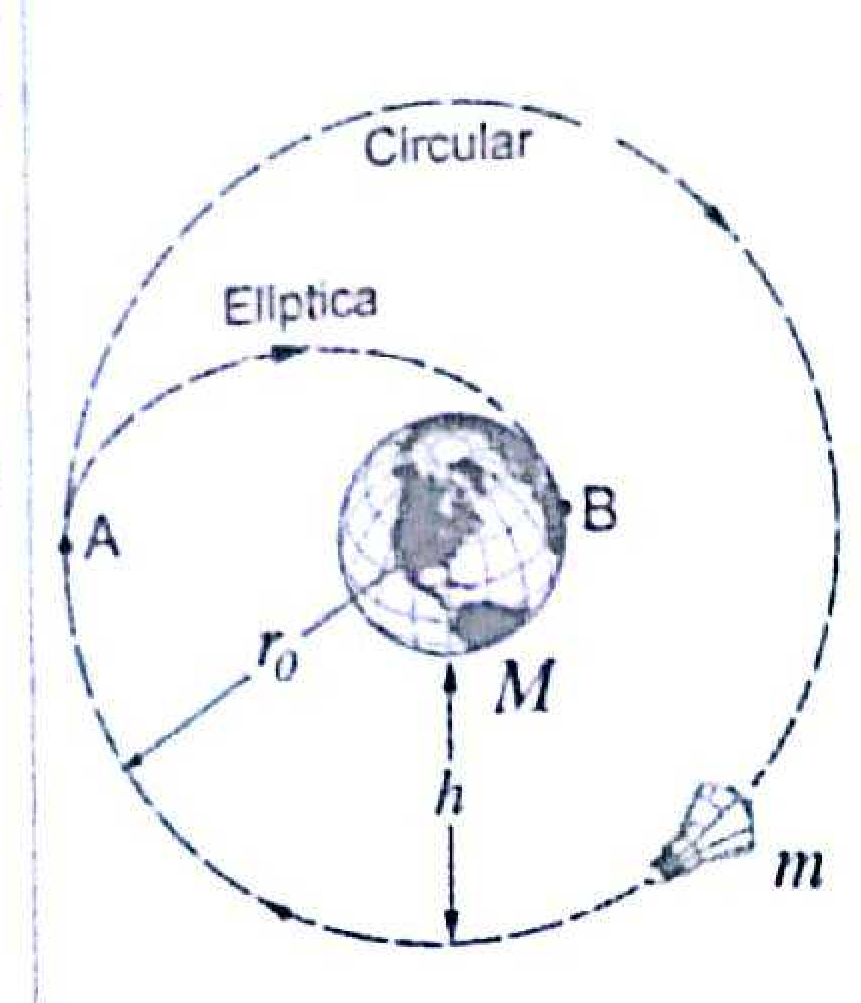
$$\frac{GMm}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})}{3\text{x}6{,}37\text{x}10^6}} = 4570\text{m/s}$$

La velocidad inicial de la cápsula con relación al satélite será:

$$v_{c/s} = v_A - v_0 = 3230\text{m/s} - 4570\text{m/s} = -1340\text{m/s}$$

Esta velocidad inicial la podría obtener la cápsula mediante la expulsión de gases hacia delante.



Respuesta:

$$v_{c/s} = v_A - v_0 = -1340\text{m/s}$$

PR-6.33. *Otro procedimiento para retornar la cápsula*

Considere de nuevo el problema anterior del satélite en órbita circular, a una altura sobre la superficie terrestre de dos veces el radio de la Tierra ($h = 2R$). Se desea retornar la cápsula espacial comunicándole en el punto A una velocidad $\vec{v}_r$ en dirección al centro de la Tierra para que llegue rasante a la superficie terrestre en el punto B.
a) Determine esta velocidad radial de la cápsula.
b) ¿Cuál de los dos procedimientos sería mas conveniente desde el punto de vista energético?

Solución: a) Al comunicar a la cápsula la velocidad adicional en dirección radial, su velocidad tangencial v_0 no varía y su velocidad resultante es la suma vectorial: $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_r$. Por la conservación del momento angular:

$$m r_A v_0 = m r_B v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_0 \frac{r_A}{r_B}$$

Por la conservación de la energía entre los puntos inicial y final, $K_A + U_A = K_B + U_B$:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \left(-\frac{GMm}{r_B}\right)$$

Sustituyendo las magnitudes de las velocidades $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_r$ y v_B, y las distancias, $r_A = 3R$ y $r_B = R$, el radio de la Tierra, se obtiene:

$$\frac{1}{2} m(v_0^2 + v_r^2) - \frac{GMm}{3R} = \frac{1}{2} m\left(v_0 \frac{3R}{R}\right)^2 - \frac{GMm}{R}$$

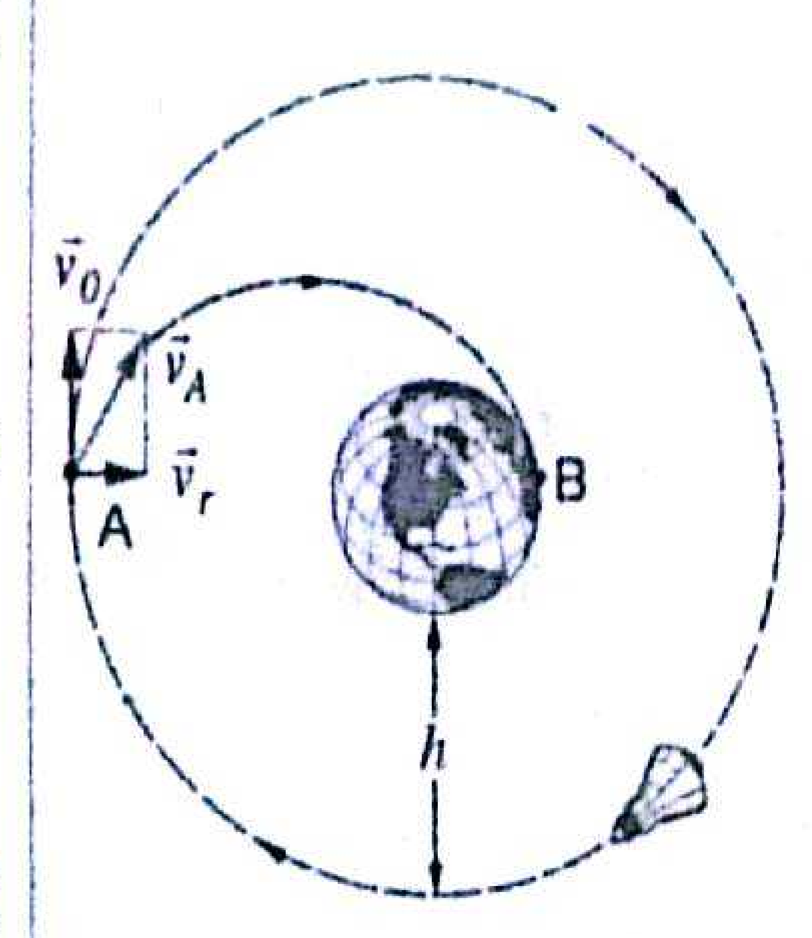
$$(v_0^2 + v_r^2) - \frac{2GMm}{3R} = (3v_0)^2 - \frac{2GM}{R}$$

$$v_r^2 = 8v_0^2 - \frac{4}{3}\frac{GM}{R} = 8\frac{GM}{3R} - \frac{4}{3}\frac{GM}{R} = \frac{4}{3}\frac{GM}{R}$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos la velocidad inicial radial de la cápsula:

$$v_r = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} = \sqrt{\frac{4(6{,}67\text{x}10^{-11})(5{,}98\text{x}10^{24})}{3\text{x}6{,}37\text{x}10^6}} = 9140\text{m/s}$$

b) Desde el punto de vista energético, este segundo procedimiento sería menos eficiente que el anterior, porque hay que imprimir a la cápsula una velocidad adicional que es casi siete veces superior.



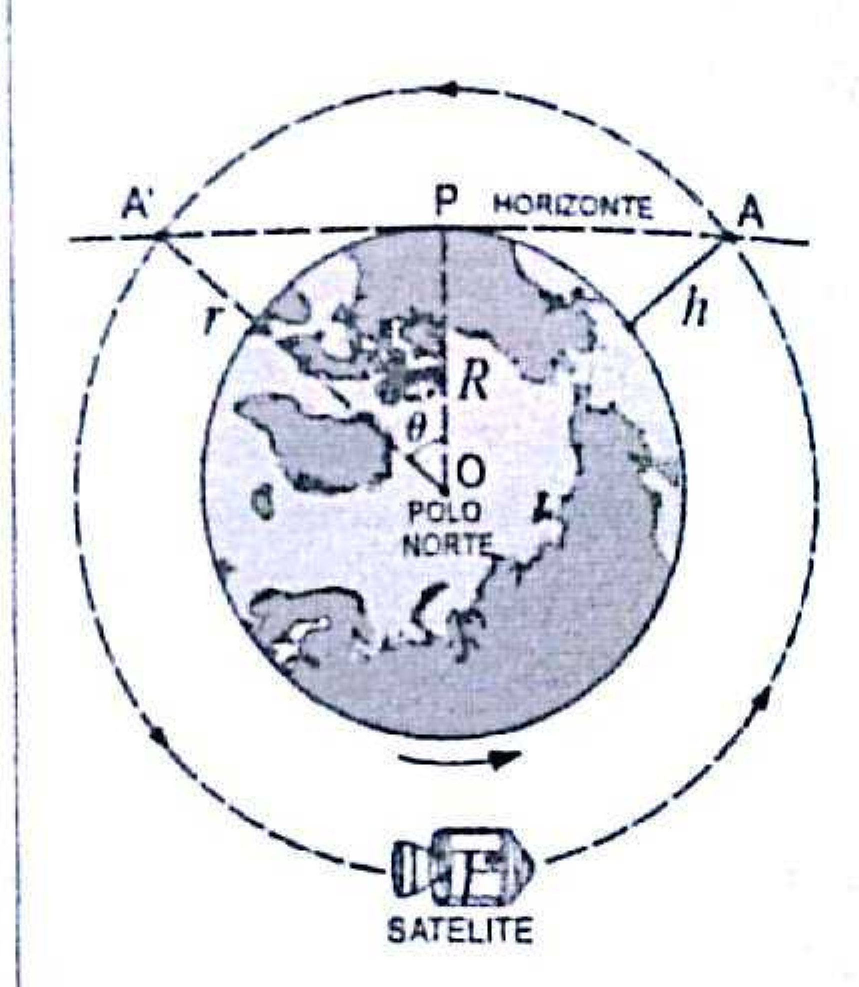
Respuesta:

b) $v_r = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} = 9140\text{m/s}$

b) Este procedimiento requiere mayor energía que el anterior.

PR-6.34. *Tiempo de observación de un satélite*

Un satélite se traslada en una órbita circular de Oeste a Este en el plano del ecuador terrestre a una altura sobre la superficie terrestre $h = 800$ km. ¿Durante cuánto tiempo estará por encima del horizonte visto por un observador en un lugar cualquiera del ecuador terrestre?



Solución: La velocidad angular de la Tierra respecto a su eje es:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(24h)(60min/h)(60s/min)} = 7{,}27x10^{-5}rad/s$$

La velocidad angular del satélite en la órbita circular de radio r viene dada por:

$$m\omega_s^2 r = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_s = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Donde el radio de la órbita circular es:

$$r = R + h = 6{,}37x10^6m + 8x10^5m = 7{,}17x10^6m$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{(6{,}67x10^{-11})(5{,}98x10^{24})}{(7{,}17x10^6)^3}} = 1{,}04\,x10^{-3}rad/s$$

La velocidad angular del satélite con respecto a la Tierra es:

$$\omega_s' = \omega_s - \omega_T$$

$$\omega_s' = 1{,}04x10^{-3}rad/s - 7{,}27x10^{-5}rad/s = 9{,}67x10^{-4}rad/s$$

Los puntos extremos de observación en el horizonte abarcan a cada lado un ángulo θ dado por:

$$\cos\theta = \frac{OP}{OA'} = \frac{R}{r} = \frac{6{,}37x10^6m}{7{,}17x10^6m} = 0{,}888$$

$$\theta = 27.3° = 0{,}477\ rad.$$

Por lo tanto, el tiempo que estará el satélite por encima del horizonte según un observador en el ecuador terrestre es:

$$\Delta t = \frac{2\theta}{\omega_s'} = \frac{2(0{,}477rad)}{9{,}67x10^{-4}rad/s} = 985s = 16{,}4\,min$$

Respuesta:

$\Delta t = 16{,}4$ minutos

PR-6.35. *Un viaje a Marte con los motores apagados*

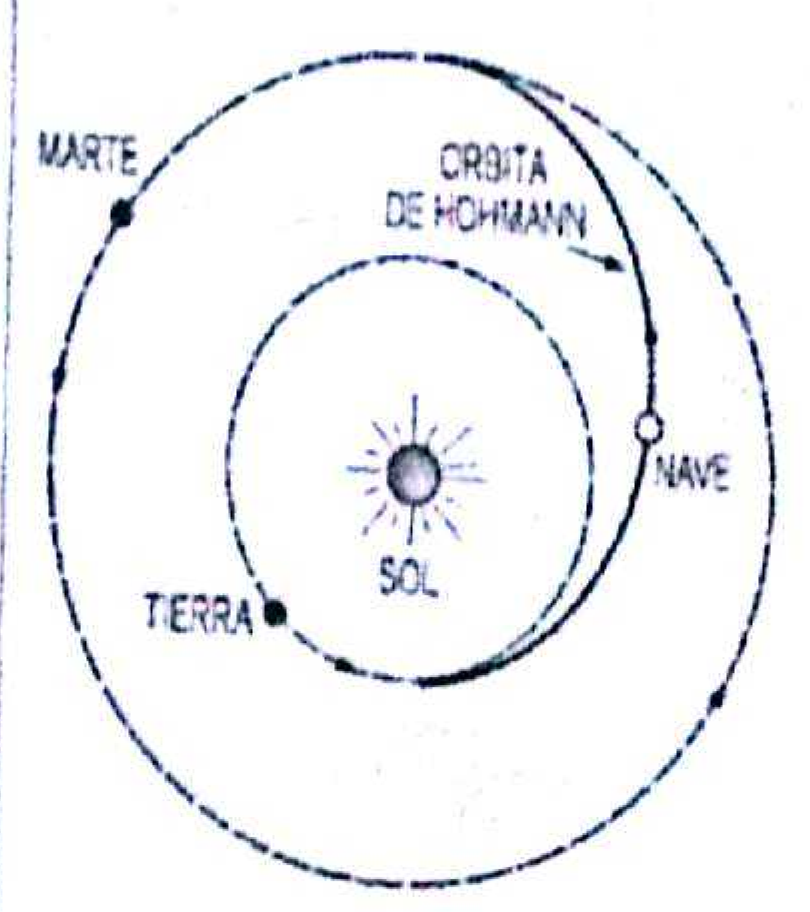
La manera mas eficiente de enviar una nave desde la Tierra a Marte es seguir una trayectoria semielíptica denominada órbita de transferencia de Hohmann. Los cohetes se encienden brevemente en la Tierra para colocar la nave en la órbita de transferencia; a continuación la nave viaja sin motor hasta llegar a la órbita de destino. Allí los cohetes se encienden otra vez para dejar la nave en la misma órbita de Marte.

a) En el viaje de ida, ¿qué velocidad inicial se le debe dar a la nave y en qué sentido se deben disparar los cohetes?

b) Al final de la órbita de Hohmann, ¿qué velocidad se le debe imprimir a la nave para que caiga en Marte?

c) ¿Cuánto tarda un viaje de ida desde la Tierra a Marte, desde el instante de los disparos de los cohetes?

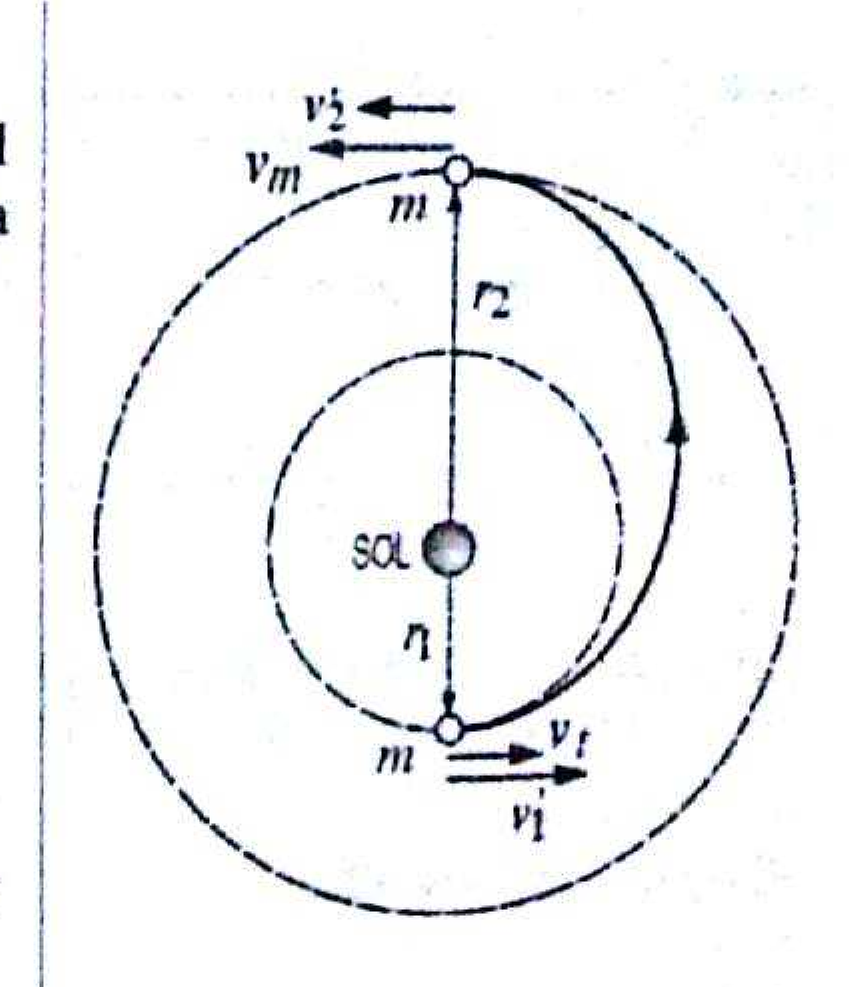
d) Para poder llegar a Marte desde la Tierra el instante de lanzamiento debe calcularse de modo que Marte esté en el lugar apropiado para que la nave llegue a su órbita alrededor del Sol, ¿Cuál ha de ser la separación angular entre Marte y la Tierra en el momento del lanzamiento? ¿Qué planeta debe ir por delante en ese momento?



Suponga que la órbitas de Tierra y Marte en torno al Sol son circulares y que la única fuerza sobre la nave espacial es la atractiva del Sol, despreciándose las influencias mutuas entre planetas y de éstos con la nave.

Solución: a) La transferencia se ejecuta vía media órbita elíptica con semi-eje mayor: $a = (r_1 + r_2)/2$. Uno de cuyos focos está en el Sol, su perihelio será el radio de la órbita circular de la Tierra ($r_1 = r_t$) y su afelio, el radio de la órbita de Marte ($r_2 = r_m$). En esta órbita elíptica la nave debe tener una energía total:

$$E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{(r_1 + r_2)}$$



La fuerza central es conservativa y la energía total permanece constante. En el punto inicial $E = K' + U_1$, y la energía cinética de la nave es:

$$K' = E - U_1 = -\frac{GMm}{(r_1 + r_2)} - (-\frac{GMm}{r_1}) = \frac{GMm}{r_1}[1 - \frac{r_1}{r_1 + r_2}]$$

$$K' = \frac{GMm}{r_1}(\frac{r_2}{r_1 + r_2}) = \frac{1}{2}mv_1'^2$$

Por lo tanto su velocidad inicial (relativa al Sol) debe ser:

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{r_1}(\frac{2r_2}{r_1 + r_2})}$$

$$v_1' = \sqrt{\frac{(6,67x10^{-11})(1,98x10^{30})}{1,49x10^{11}}\frac{2(2,28x10^{11})}{3,77x10^{11}}} = 3,27x10^4\ \frac{m}{s}$$

$G = 6,67x10^{-11} N.m^2/kg^2$

Sol: $M = 1,98x10^{30} kg$

Tierra: $r_1 = r_t = 1,49x10^{11} m$

$T_t = 365$ días

Marte: $r_2 = r_m = 2,28x10^{11} m$

$T_m = 687$ días

Esta es la velocidad de inserción en la órbita de Hohmann. Ahora bien, la velocidad de la Tierra en su orbita circular está dada por:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{(6,67x10^{-11}N.m^2/kg^2)(1,98x10^{30}kg)}{1,49x10^{11}m}} = 2,98x10^4\ m/s$$

Esto significa que para alcanzar la velocidad de inserción es necesario aumentar la velocidad de la nave en Tierra:

$$v_1 = v_1' - v_t = 3,27x10^4 m/s - 2,98x10^4 m/s = 2970 m/s$$

Para ello, los cohetes impulsores deben dispararse en dirección opuesta al movimiento orbital de la Tierra.

b) La fuerza atractiva del Sol hacia la nave es conservativa y el momento angular permanece constante:

$$m r_1 v_1' sen90^\circ = m r_2 v_2' sen90^\circ$$

La velocidad de la nave respecto al Sol al llegar a Marte es:

$$v_2' = v_1'\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{GM}{r_1}\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}\left(\frac{2r_1}{r_1+r_2}\right)}$$

$$v_2' = \sqrt{\frac{(6,67x10^{-11})(1,98x10^{30})}{2,28x10^{11}}\frac{2(1,49x10^{11})}{3,77x10^{11}}} = 2,14x10^4\ \frac{m}{s}$$

Esta velocidad es inferior a la velocidad orbital de Marte:

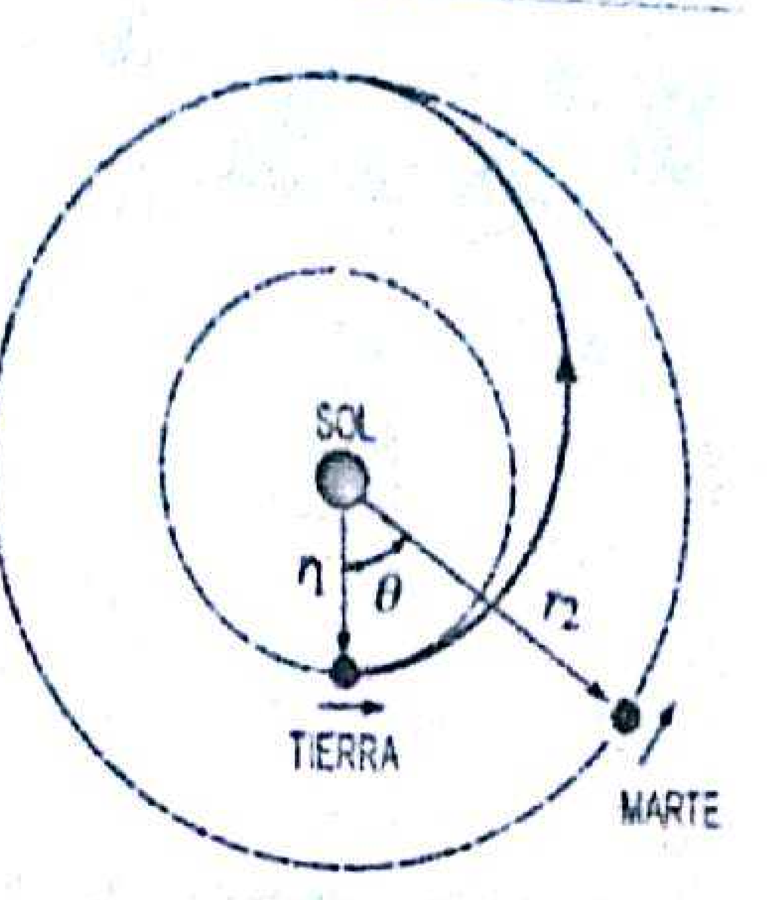
$$v_m = \sqrt{\frac{(6,67x10^{-11}N.m^2/kg^2)(1,98x10^{30}kg)}{2,28x10^{11}m}} = 2,41x10^4\ \frac{m}{s}$$

Por lo tanto, para que la nave caiga en Marte su velocidad debe ser incrementada de nuevo en una cantidad:

$$v_2 = v_m - v_2' - v_m = 2,41x10^4 m/s - 2,14x10^4 m/s = 2700 m/s$$

c) Podemos utilizar la tercera ley de Kepler para calcular el período de la órbita elíptica:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3$$



Para viajar de la Tierra a Marte (o viceversa) se emplea justamente la mitad del período T.

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{\pi(1,89x10^{11})^{3/2}}{\sqrt{(6,67x10^{-11})(1,98x10^{30})}} = 2,24x10^7\ s$$

Es decir, la nave tardaría 259 días, que son mas de ocho meses y medio.

d) Como la nave espacial precisa 259 días para moverse desde la posición mas cercana al Sol (perihelio) hasta su encuentro con Marte, en la posición mas alejada (afelio), entonces, durante ese tiempo el desplazamiento angular de Marte es:

$$\Delta\phi = 360^\circ\frac{t}{T_m} = 360^\circ\frac{224x10^7 s}{(687 días)(86400 s/día)} = 135.9^\circ$$

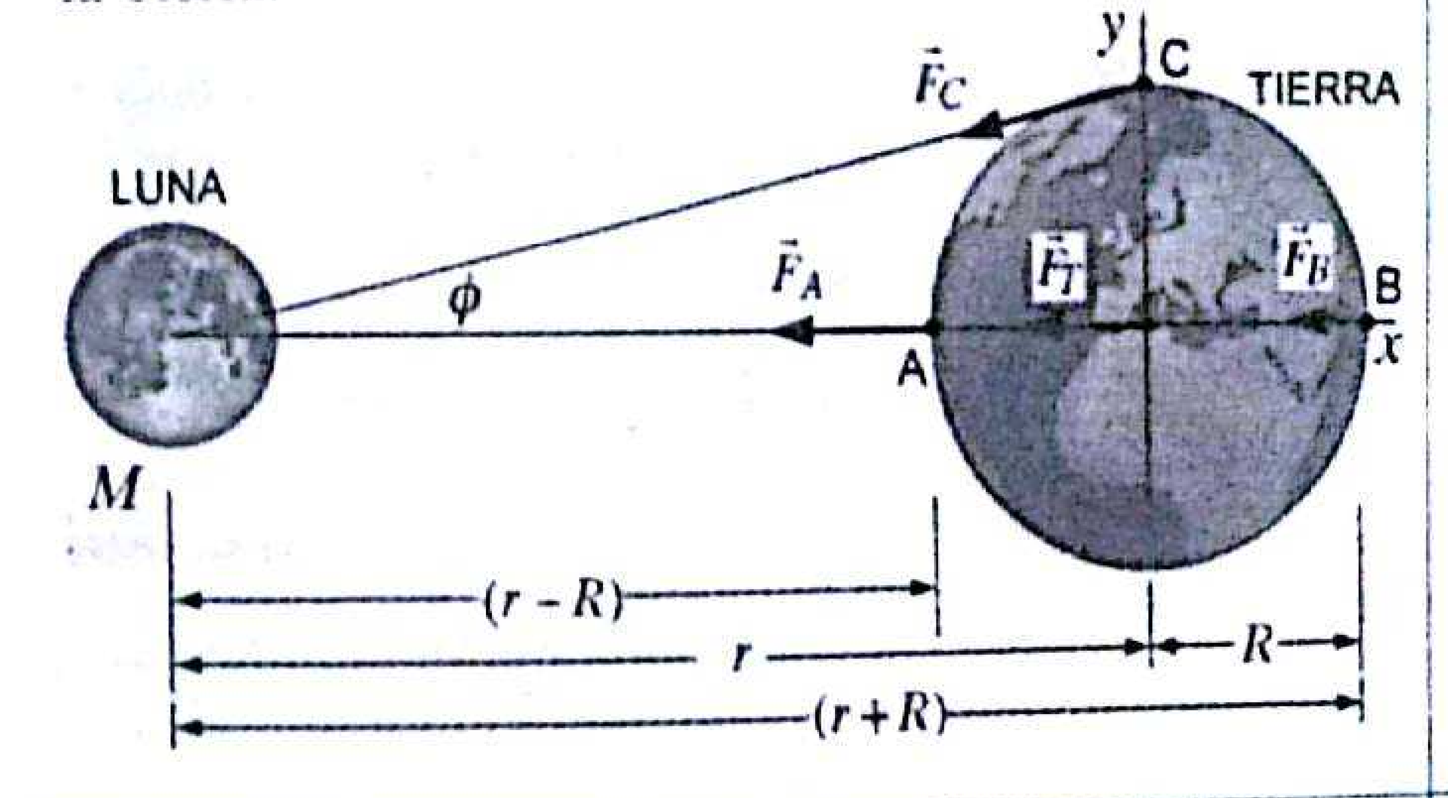
$$\theta = 180^\circ - 135.9^\circ = 44,1^\circ$$

Respuesta:

a) $v_1 = 2970 m/s$
b) $v_2 = 2700 m/s$
c) 259 días
d) $\theta = 44,1^\circ$

PR-6.36. *¿Cómo se origina la fuerza de las mareas?*

Las mareas son el ascenso y descenso periódico en el nivel del mar debido principalmente a la atracción gravitacional que ejercen la Luna y el Sol. Halle las expresiones para la fuerza ejercida por la Luna de masa M, sobre una partícula de agua de masa m, con relación a la Tierra.



Considere los siguientes casos:
a) Cuando la partícula está en la posición A enfrente de la Luna.
b) Cuando está en la posición B en el lado mas lejano de la Tierra.
c) Cuando está en la posición C en la perpendicular a la línea Tierra-Luna.
d) Explique por qué existen dos protuberancias de marea en los océanos, una que apunta hacia la Luna y la otra en sentido opuesto. Este es el motivo por el cual la marea sube y baja dos veces al día.

Solución: a) La fuerza de marea en una determinada posición A de la superficie terrestre, es igual a la diferencia entre la fuerza de atracción, $\vec{F}_A$, que la Luna ejerce sobre la masa m situada en dicha posición, y la fuerza de atracción $\vec{F}_T$ que ejercería sobre tal masa si estuviese en el centro de la Tierra, siendo:

$$\vec{F}_A = -G\frac{Mm}{(r-R)^2}\hat{x} \qquad \vec{F}_T = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{x}$$

Tomando en cuenta que $R << r$, se tiene:

$$\vec{F}'_A = \vec{F}_A - \vec{F}_T = -GMm[\frac{2rR - R^2}{(r-R)^2 r^2}]\hat{x} \approx -GMm\frac{2R}{r^3}\hat{x}$$

b) En el punto B del lado opuesto a la Luna, se tiene:

$$\vec{F}'_B = \vec{F}_B - \vec{F}_T = -G[\frac{Mm}{(R+r)^2} - \frac{Mm}{r^2}]\hat{x} \approx +GMm\frac{2R}{r^3}\hat{x}$$

c) En la posición C la fuerza de atracción es:

$$\vec{F}_C = -G\frac{Mm}{R^2 + r^2}(\cos\phi\hat{x} + sen\phi\hat{y})$$

$$\vec{F}'_C = \vec{F}_C - \vec{F}_T = -G\frac{Mm}{R^2 + r^2}(\cos\phi\hat{x} + sen\phi\hat{y}) + G\frac{Mm}{r^2}\hat{x}$$

Si tomamos en cuenta los valores para las distancias $R = 6{,}37x10^6$ m y $r = 3{,}84x10^8$ m, podemos aproximar: $\cos\phi \approx 1$ y

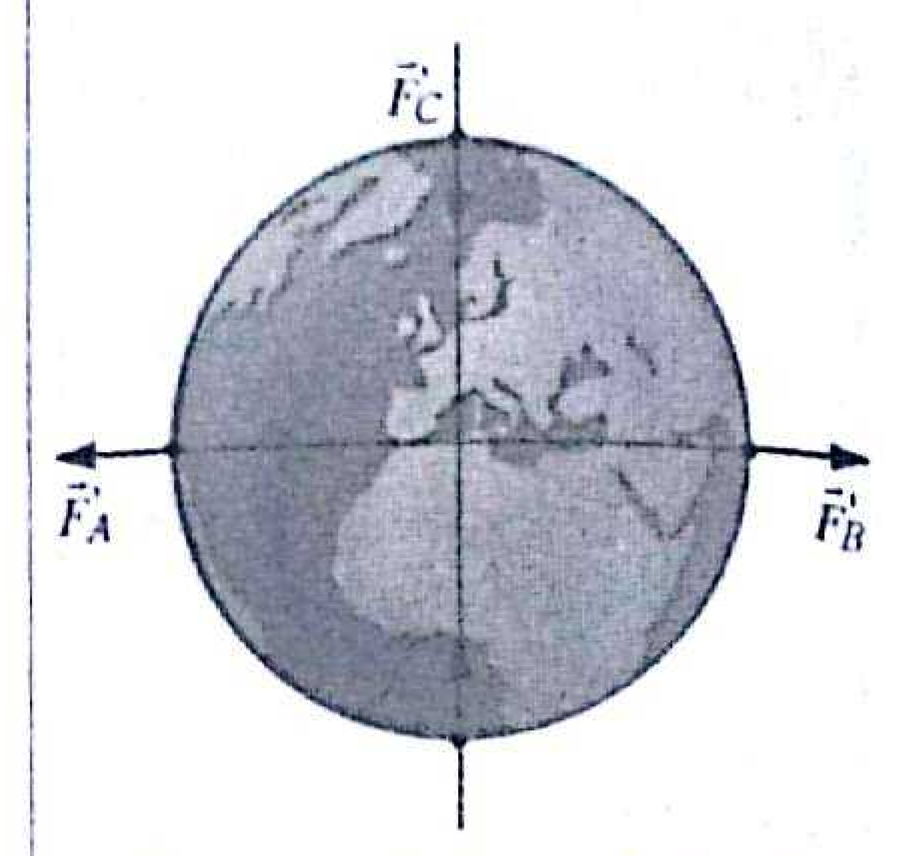
$$sen\phi \approx tg\phi = R/r = 6{,}37x10^6\, m/3{,}84x10^8 = 0{,}017 \text{ rad},$$

Por lo tanto, la fuerza en C es:

$$\vec{F}'_C \approx -GMm\frac{R}{r^3}\hat{y}$$

d) De los resultados anteriores, concluimos que la fuerza de marea en las posiciones A y B, ubicadas en la línea que una la Luna y la Tierra, son de igual módulo y aproximadamente el doble que en la posición C, perpendicular a dicha línea. Esta es la razón por la cual existen dos protuberancias de marea, una que apunta hacia la Luna y la otra que apunta en sentido opuesto.

El cálculo para las mareas solares es similar y bastaría con reemplazar la masa y la distancia de la Luna por las del Sol. Las mareas que se observan a diario son el efecto resultante de las dos atracciones. Cuando la Luna y el Sol están alineados, las mareas se refuerzan y son mas grandes. Cuando la Luna está en cuadratura con el sol, las mareas se cancelan parcialmente y resultan pequeñas.



Fuerzas resultantes en A, B y C



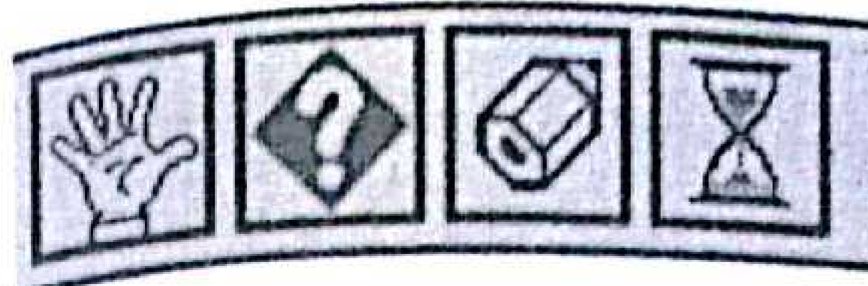
Las dos protuberancias de marea

Respuesta:

a) $\vec{F}'_A \approx -GMm\frac{2R}{r^3}\hat{x}$

b) $\vec{F}'_B \approx +GMm\frac{2R}{r^3}\hat{x}$

c) $\vec{F}'_C \approx -GMm\frac{R}{r^3}\hat{y}$



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-6.01. ***Una de estas afirmaciones no es correcta...***

En la expresión de la fuerza de gravedad, la cantidad G...

a) Se usa solo cuando la Tierra es uno de los dos cuerpos.

b) Es válida solamente en nuestro sistema solar.

c) Es mayor en la superficie terrestre que en su interior.

d) Es una constante universal de la naturaleza.

e) Está relacionada al Sol de la misma manera en que g está relacionada a la Tierra.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La fuerza de la gravedad

PE-6.02. ***Lugar: La Luna, Fecha: 2 de Agosto,1971***

Durante el segundo viaje del hombre a la Luna (Misión Apolo 15), pudimos ver en la TV la escena cuando el astronauta David Scott, en su paseo lunar, dejó caer simultáneamente una pluma y un martillo desde la misma altura y éstos tocaban suelo lunar en el mismo instante. Lo que demuestra este experimento es....

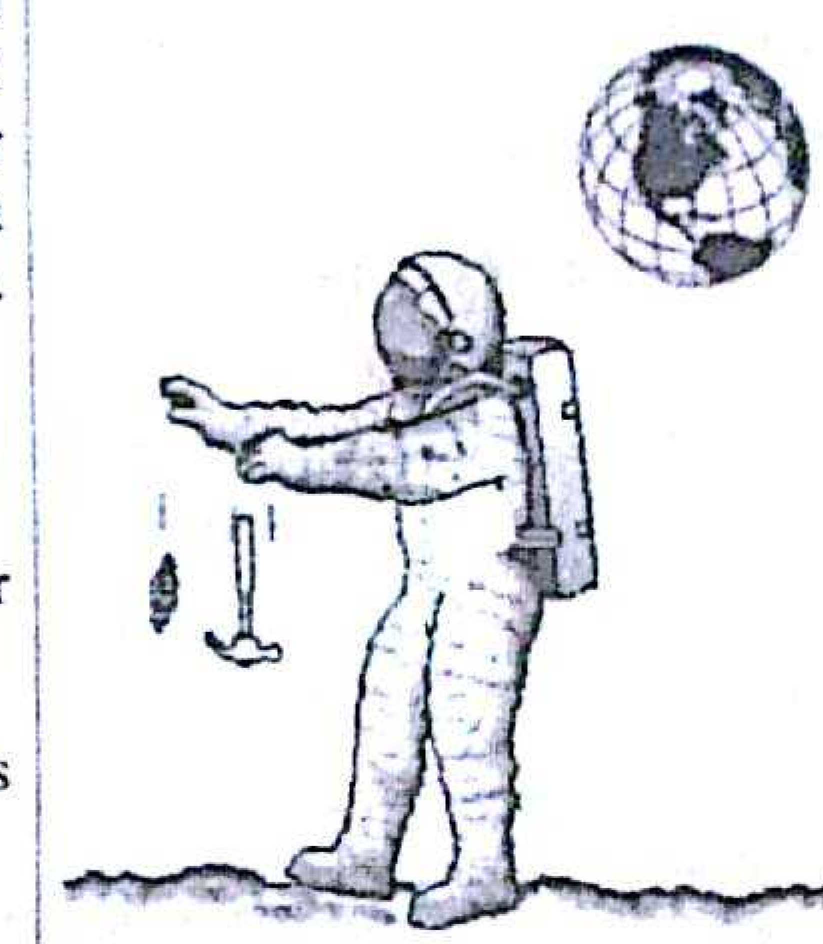
a) La ausencia de gravedad en el vacío.

b) Que la aceleración de gravedad, g, en la Luna es menor que en la Tierra.

c) Que en ausencia de la resistencia del aire todos los cuerpos en un mismo lugar caen con igual aceleración.

d) Que la pluma pesa mas en la Luna que en la Tierra.

e) Que la pluma y el martillo pesan lo mismo en la Luna.



PE-6.03. ***Un péndulo en un satélite en órbita***

Sea T_0 el período de un péndulo en la superficie terrestre. Suponga que el mismo péndulo es colocado en un satélite en una órbita cuyo radio es dos veces el radio terrestre. En el satélite, el nuevo periodo del péndulo será:

a) $2T_0$, b) $4T_0$, c) $T_0/2$

d) $T_0/4$, e) El péndulo no oscila

PE-6.04. *Cinco instrumentos llevados a la Luna*

En una misión a la Luna, son llevados cinco instrumentos que fueron construidos y calibrados en la Tierra:

1) Un reloj de péndulo.
2) Un reloj de pulsera.
3) Un termómetro de mercurio.
4) Un barómetro de mercurio.
5) Una báscula de resorte.

¿Cuál o cuáles de estos instrumentos, marcarán una lectura correcta en la Luna?

a) Solamente el N° 2
b) El N° 2 y el N° 3
c) El N° 1 y el N° 2
d) El N° 3 y el N° 4
e) El N° 4 y el N° 5

PE-6.05. *Sensación de ingravidez dentro de un satélite*

Un astronauta que está dentro de un satélite en órbita alrededor de la Tierra, siente la sensación de "ausencia de peso". En una clase de física, cinco alumnos (a, b, c, d y e) discuten la situación y ofrecen explicaciones distintas, ¿cuál de estos alumnos tiene la razón?



a) El astronauta está fuera del alcance de la gravedad terrestre.

b) La nave espacial está fuera de la atmósfera terrestre.

c) La gravedad está presente afuera pero no dentro de la nave.

d) La nave y el astronauta están cayendo con la misma aceleración, producida únicamente por la gravedad.

e) La fuerza que ejerce la Tierra sobre el astronauta se compensa con la que ejerce la nave.

PE-6.06. *Entre ellos hay una atracción gravitacional*

Ana (masa m_A) y Beto (masa m_B) están inicialmente a una distancia d. Considerándolos como masas puntuales, ¿cuánto trabajo hay que hacer contra la fuerza que los atrae para separarlos hasta una distancia de diez veces la separación inicial?

a) $W = 11\dfrac{Gm_A m_B}{d}$, b) $W = 10\dfrac{Gm_A m_B}{d}$

c) $W = 9\dfrac{Gm_A m_B}{d}$, d) $W = \dfrac{9}{10}\dfrac{Gm_A m_B}{d}$

e) $W = \dfrac{10}{9}\dfrac{Gm_A m_B}{d}$

PE-6.07. *Energía cinética y energía total del satélite....*

Un satélite está en una órbita circular en torno a la Tierra con una energía total E. La energía cinética del satélite es:

a) $K = +E$, b) $K = -E/2$, c) $K = -E$

d) $K = -2E$, e) $K = +E/2$

PE-6.08. *Disparo accidental de cohetes*

Un satélite de masa m está en una órbita circular y repentinamente se le dispara uno de sus cohetes direccionales. Como resultado la velocidad tangencial cambia desde su valor inicial v_o hasta un valor $2v_o$.

¿Cuál es el cambio en la energía total del satélite?

a) $\Delta E = \frac{3}{2}mv_0^2$, b) $\Delta E = mv_0^2$,

c) $\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2$ d) $\Delta E = \frac{2}{3}mv_0^2$,

e) $\Delta E = 2mv_0^2$

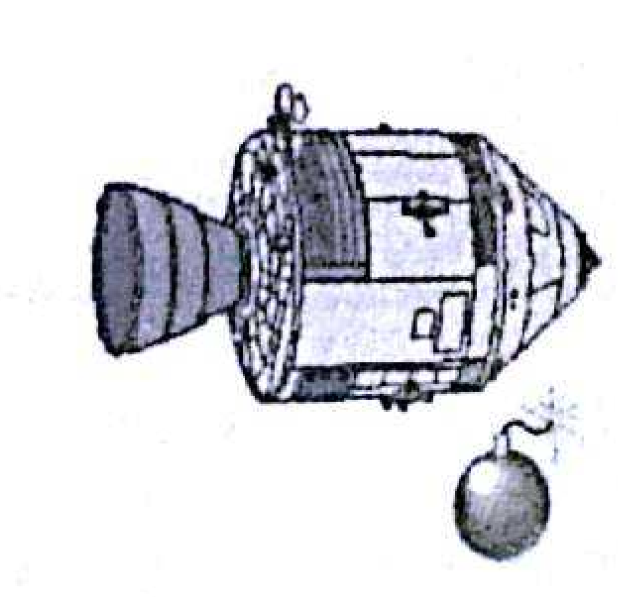
PE-6.09. *Trayectoria elíptica, parabólica o hiperbólica?*

En las condiciones de la pregunta anterior, después de dispararse el cohete, el satélite tendrá una energía total suficiente para viajar finalmente en una trayectoria....

a) Igual a la órbita circular inicial.
b) Circular de radio mayor al inicial.
c) Elíptica
d) Parabólica
e) Hiperbólica

PE-6.10. *Soltando una bomba desde un satélite*

Un satélite artificial transporta una bomba sujeta a la parte exterior de dicho satélite y cuando se encuentra en órbita alrededor de la Tierra, se suelta la bomba. Si despreciamos la resistencia del aire de la atmósfera, ¿cuál será la trayectoria que seguirá la bomba?



a) Caerá verticalmente hacia la Tierra.

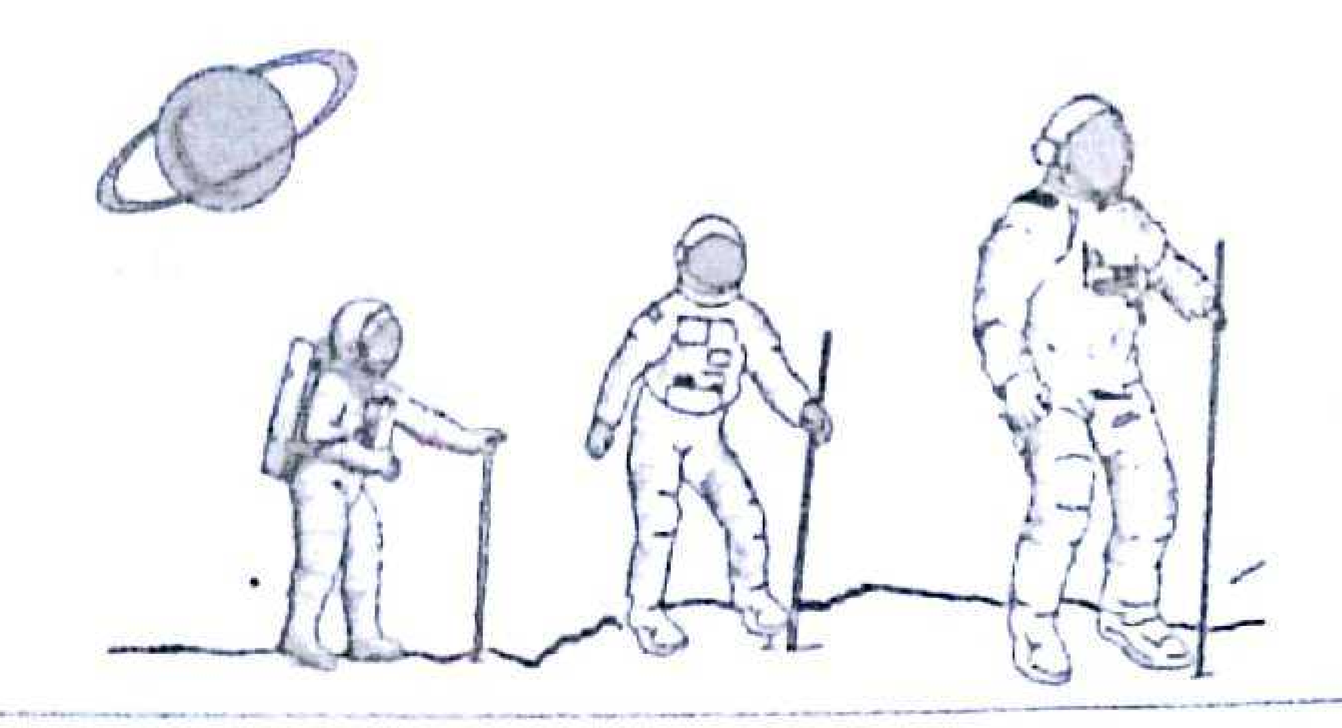
b) Caerá a la Tierra siguiendo una trayectoria parabólica.

c) Seguirá en la misma órbita acompañando al satélite.

d) Caerá a la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica.

PE-6.11. *Visita a un planeta desconocido*

Una misión espacial descubre un nuevo planeta y, cuando se acerca, determina que su radio es justamente la mitad del radio de la Tierra.



Después de tocar suelo en el planeta encuentran que la aceleración de la gravedad en su superficie es el doble que en la Tierra. ¿Cuál será la masa de este planeta en términos de la masa de la Tierra?

a) $m_p = \frac{1}{4} m_T$ b) $m_p = m_T$

c) $m_p = \frac{1}{2} m_T$ d) $m_p = 2m_T$

e) $m_p = 4m_T$

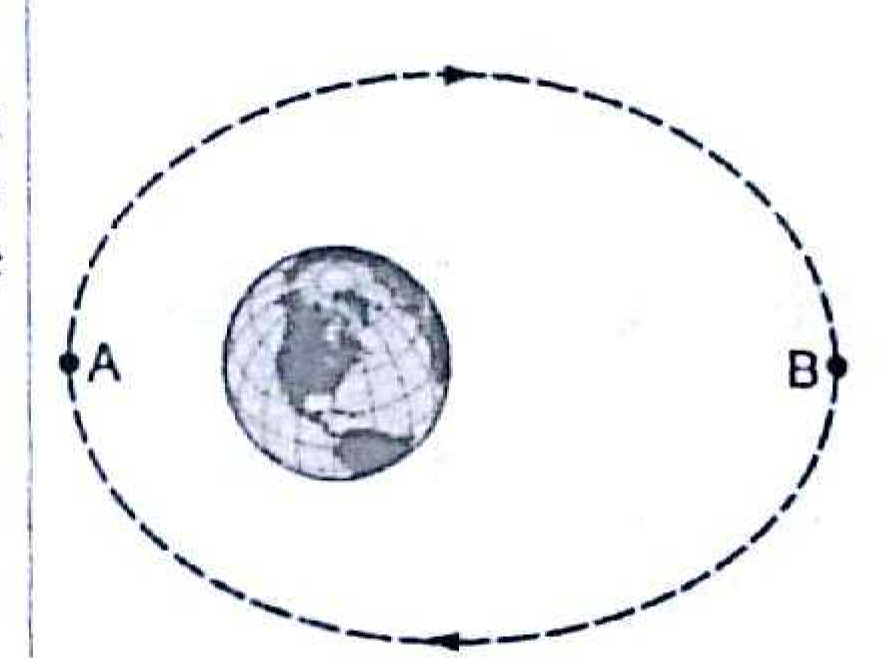
PE-6.12. *En los puntos extremos de la órbita elíptica*

Un satélite está en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Si comparamos los momentos angulares y también las energías cinéticas en los dos puntos extremos A y B de la trayectoria, podemos afirmar que:

a) $L_A = L_B$ y $K_A > K_B$ b) $L_A > L_B$ y $K_A = K_B$

c) $L_A = L_B$ y $K_A < K_B$ d) $L_A < L_B$ y $K_A > K_B$

e) $L_A > L_B$ y $K_A < K_B$



PE-6.13. *Comparación de periodos de satélites*

El satélite A está en una órbita circular de radio r y el satélite B está en otra órbita circular de radio $4r$ en torno a la Tierra. La relación entre sus periodos de revolución es:

a) $T_A / T_B = 8$, b) $T_A / T_B = 1/8$, c) $T_A / T_B = 2$,

d) $T_A / T_B = 4$, e) $T_A / T_B = 1/4$,

PE-6.14. *Comparación de velocidades*

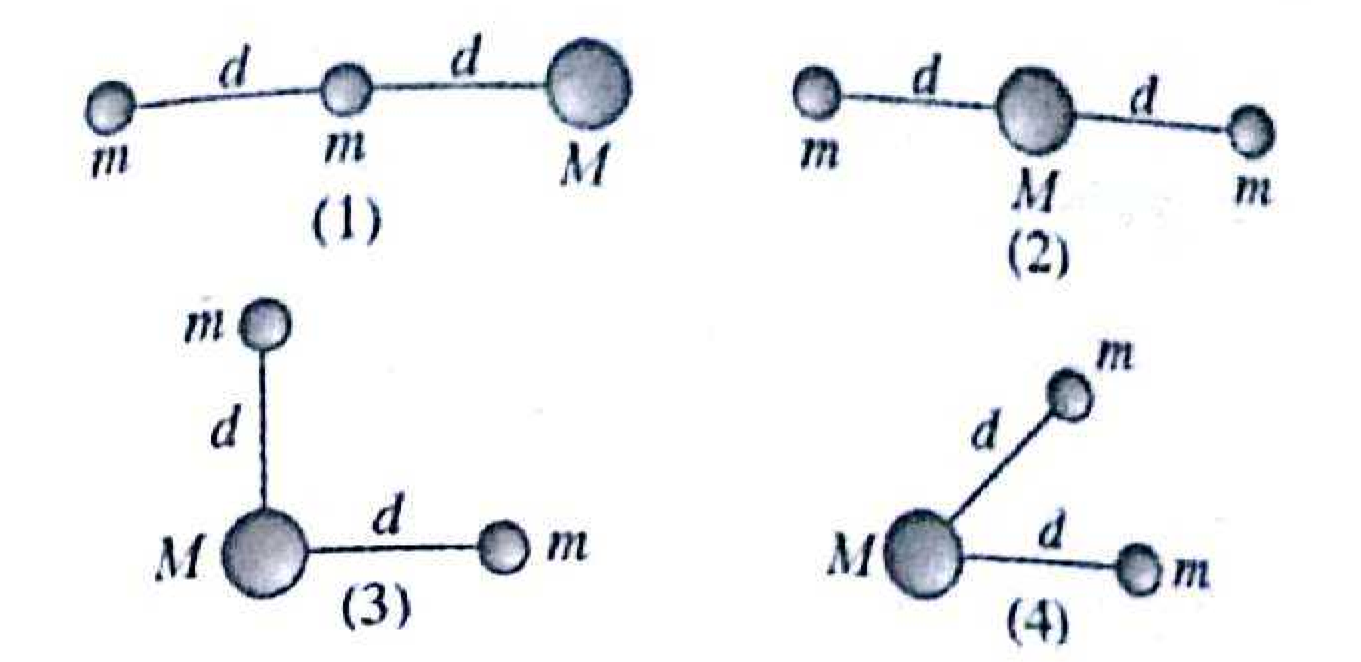
Un satélite viaja en una órbita elíptica en torno a la Tierra. Si comparamos los módulos de las velocidades en los puntos indicados, ¿En cuál par de puntos son iguales?

a) En A y D, b) En C y F, c) En B y E,

d) En C y E, e) En D y F,

PE-6.15. *Fuerza resultante sobre una partícula*

Tres partículas, dos de masa m y una de masa M se colocan en los cuatro arreglos mostrados en la figura:



Si ordenamos de mayor a menor, la magnitud de la fuerza resultante sobre la partícula M, podemos escribir que....

a) $F_4 > F_3 > F_1 > F_2$

b) $F_1 > F_2 > F_3 > F_4$

c) $F_1 > F_4 > F_2 > F_3$

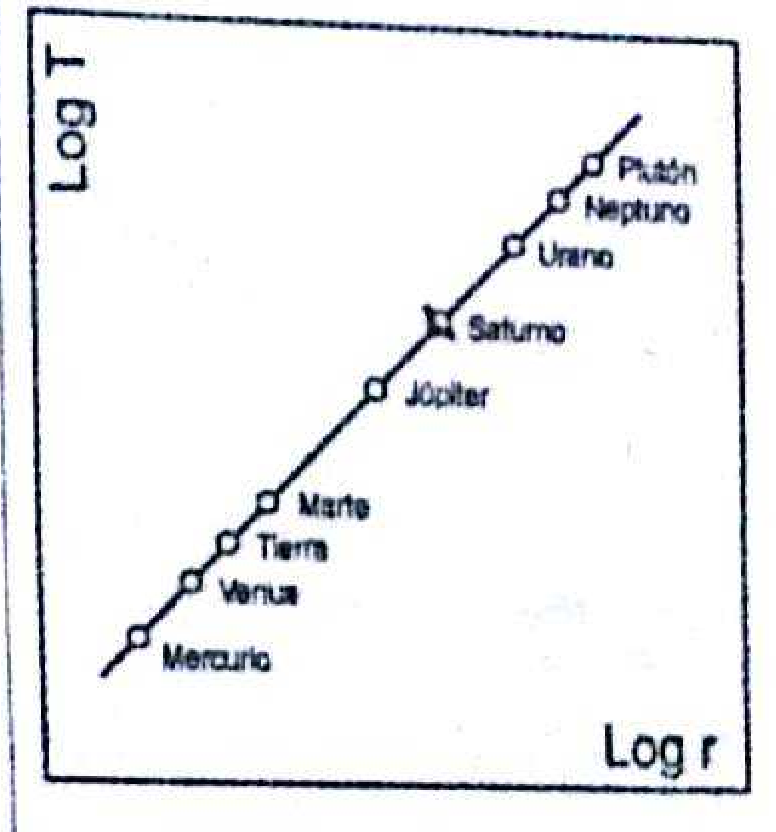
d) $F_2 > F_1 > F_3 > F_4$

e) $F_3 > F_1 > F_4 > F_2$

PE-6.16. *Periodos de los planetas del sistema solar*

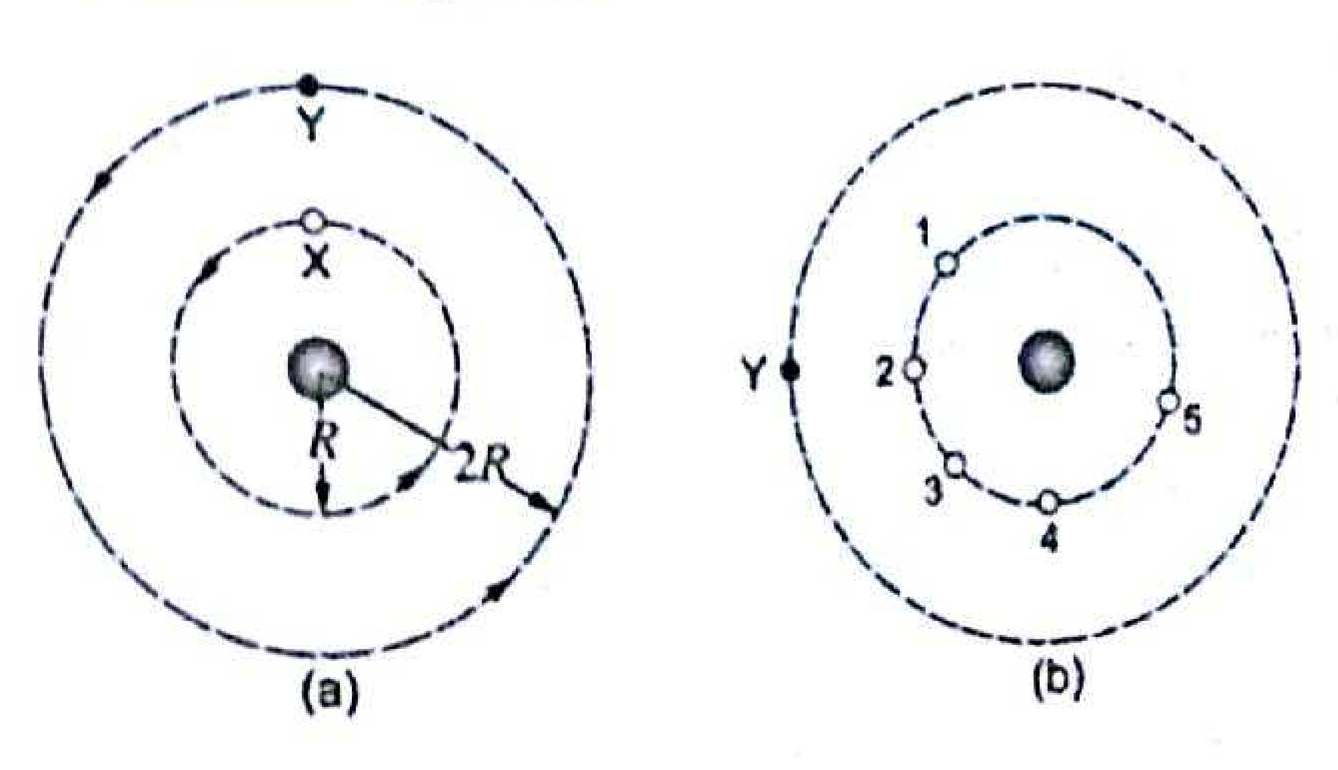
Un alumno construye una gráfica en escala doble logarítmica del periodo T de cualquier planeta alrededor del Sol en función del cubo de la distancia media r del planeta al Sol. La pendiente de la línea recta de esta gráfica debe tener el valor...

a) 2/3, b) 2, c) 3, d) 1, e) 3/2



PE-6.17. *¿Por dónde andará el otro planeta?.*

Dos planetas X e Y viajan en órbitas circulares en torno a una estrella, en el mismo sentido (anti-horario). Los radios de las órbitas están en la proporción 2:1. En cierto momento los dos planetas están alineados como en la figura a. Un cierto tiempo después, el planeta Y ha girado 90°, como en la figura b.



¿En cuál de los puntos señalados es mas probable que esté el planeta X en ese momento?

a) 1,
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

PE-6.18. *El satélite venezolano Simón Bolívar*

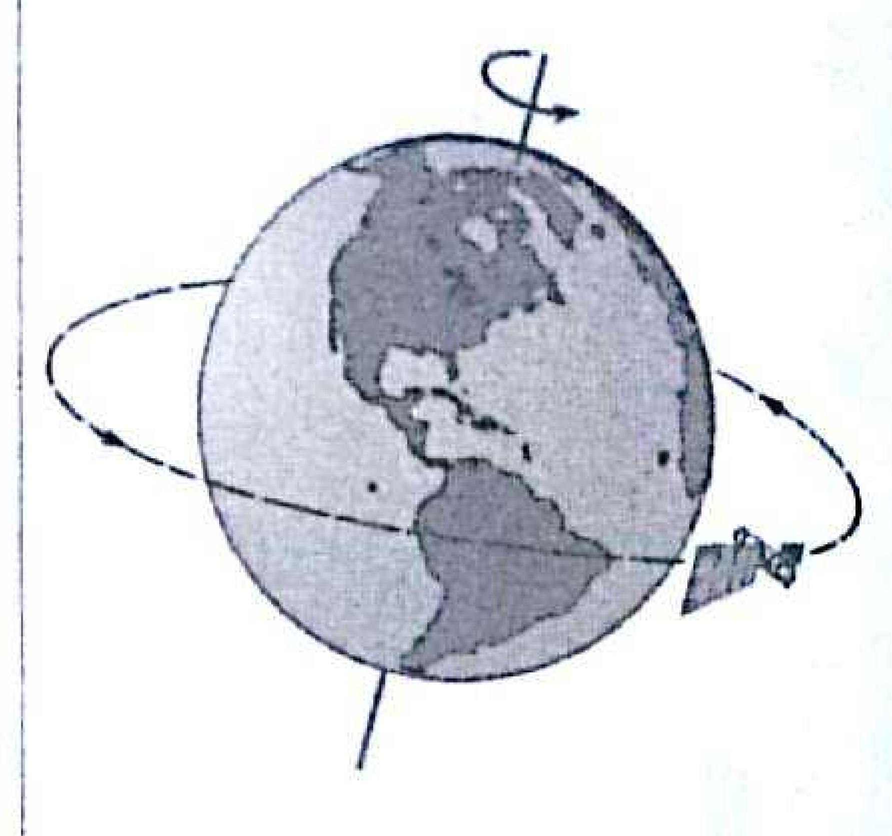
En Noviembre del 2008, se colocó el satélite Simón Bolívar en órbita alrededor de la Tierra para servir de enlace desde nuestro territorio en la transmisión de información de señales de telefonía, TV, internet, otros. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

a) El satélite se traslada en su órbita en forma autónoma a velocidad constante sin ninguna aceleración.

b) La fuerza de atracción de la Tierra sobre el satélite es nula porque está muy alejado de ella.

c) El satélite en órbita sigue siendo atraído por la Tierra pero esa fuerza tiene muy poco efecto al estar ubicado fuera de la atmósfera terrestre.

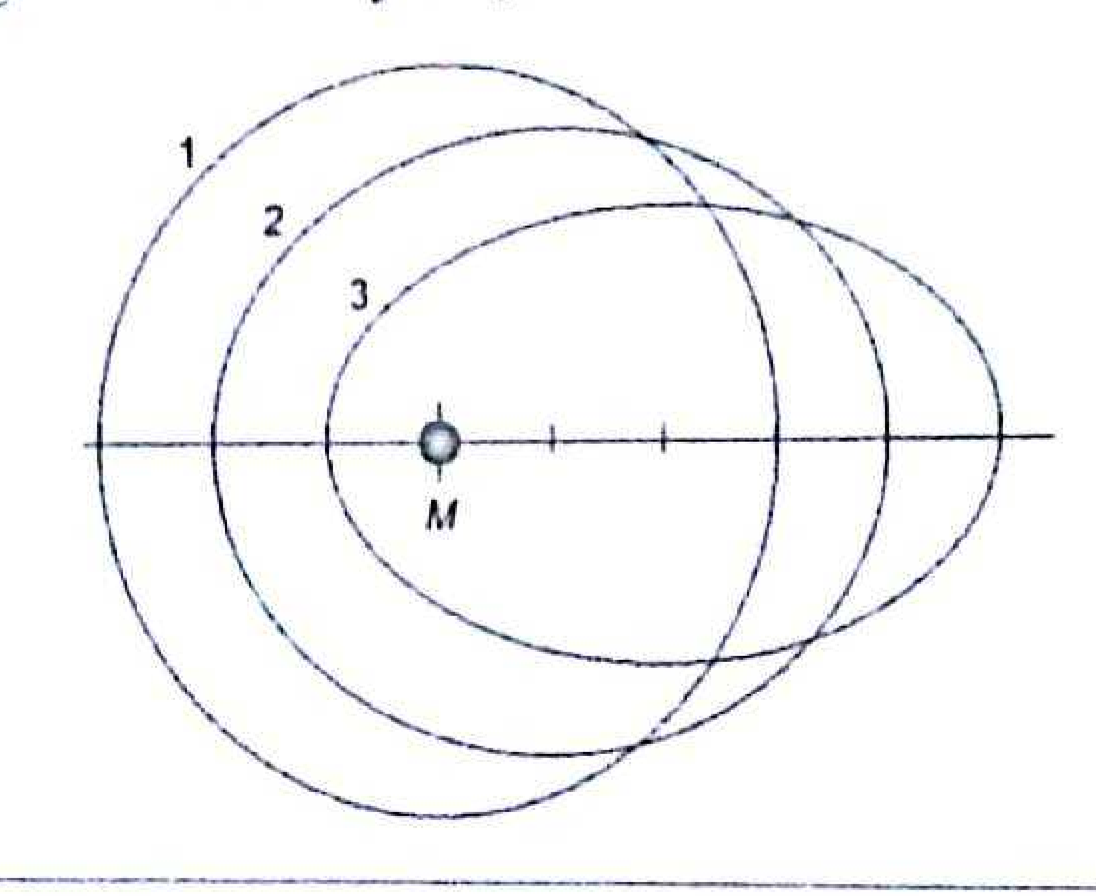
d) El satélite es geosincrónico ya que tiene un periodo de 24 horas, igual al de rotación de la tierra, y por ello desde la Tierra se le ve siempre en la misma posición.



(d)

PE-6.19. *Órbitas de diferentes excentricidades*

Considere tres órbitas alrededor de un objeto de masa M con diferentes excentricidades, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$, pero de igual longitud de su semieje mayor a.



La energía mecánica total E y los periodos T de estas órbitas están en la relación…

a) $T_1 < T_2 < T_3, \quad E_1 < E_2 < E_3$

b) $T_1 > T_2 > T_3, \quad E_1 = E_2 = E_3$

c) $T_1 = T_2 = T_3 \quad E_1 > E_2 > E_3$

d) $T_1 = T_2 = T_3, \quad E_1 = E_2 = E_3$

e) $T_1 > T_2 > T_3, \quad E_1 = E_2 = E_3$

PE-6.20. *Mas rápida en diciembre que en junio.*

La Tierra se mueve más rápido en su órbita a principios de enero cuando está mas cerca del Sol (perihelio), que a principio de julio, cuando está mas alejada del Sol (afelio). Esto es consecuencia directa de….

a) Que su momento angular es mayor en Enero.

b) La segunda ley de Kepler (o ley de las áreas).

c) La tercera ley de Kepler (o ley de los períodos).

d) El efecto gravitatorio de los otros planetas.

PE-6.21. *¿Por qué la Luna nos muestra una sola cara?*

Varios alumnos están discutiendo sobre el curioso hecho de que la Luna siempre nos muestra una sola cara. ¿Cuál de estas afirmaciones sería la correcta?

a) La masa de la Luna está distribuida en forma asimétrica y la fuerza de gravedad terrestre es mayor sobre el hemisferio que apunta hacia la Tierra.

b) La Luna está atada a la Tierra desde una de sus caras y no la deja rotar alrededor de su eje.

c) La Luna sí rota sobre si misma y su período de rotación (27 días y un tercio) coincide con su período de traslación alrededor de la Tierra.

d) A la Luna no le gusta mostrar su lado trasero, porque está muy dañado por el impacto de los meteoritos.



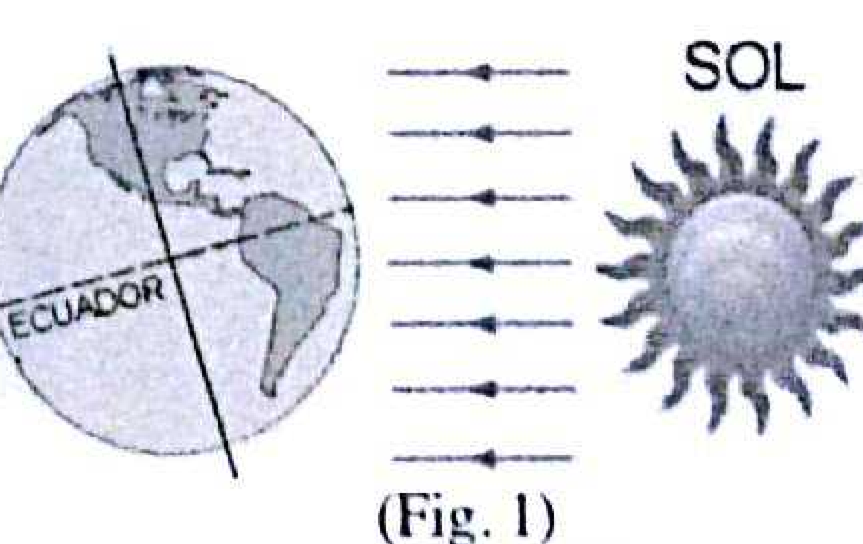
La cara oculta de la Luna
(Foto de la Misión Apolo 16)

PE-6.22. *¿A qué se deben las estaciones del año?*

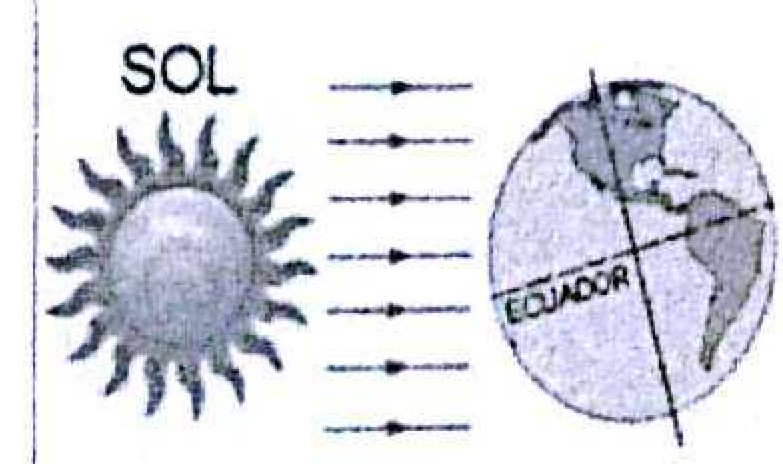
Dos alumnos sostienen una discusión para explicar la causa de la existencia de las diferentes estaciones climáticas del año. ¿Cuál de ellos tiene la razón?

a) *Alumno A:* …"Cuando la Tierra está mas cerca del Sol, es verano y cuando está mas distante del Sol es invierno"..

b) *Alumno B:* …" Lo que sucede es que la inclinación del eje de la Tierra hace que los rayos solares incidan en forma oblicua y la superficie terrestre es desigualmente iluminada por el Sol. En la Fig. 1 en el hemisferio sur es verano porque recibe mayor radiación solar por metro cuadrado que en el norte (donde es invierno). Seis meses después (Fig. 2), la Tierra está en la posición orbital diametralmente opuesta, y la situación se invierte"



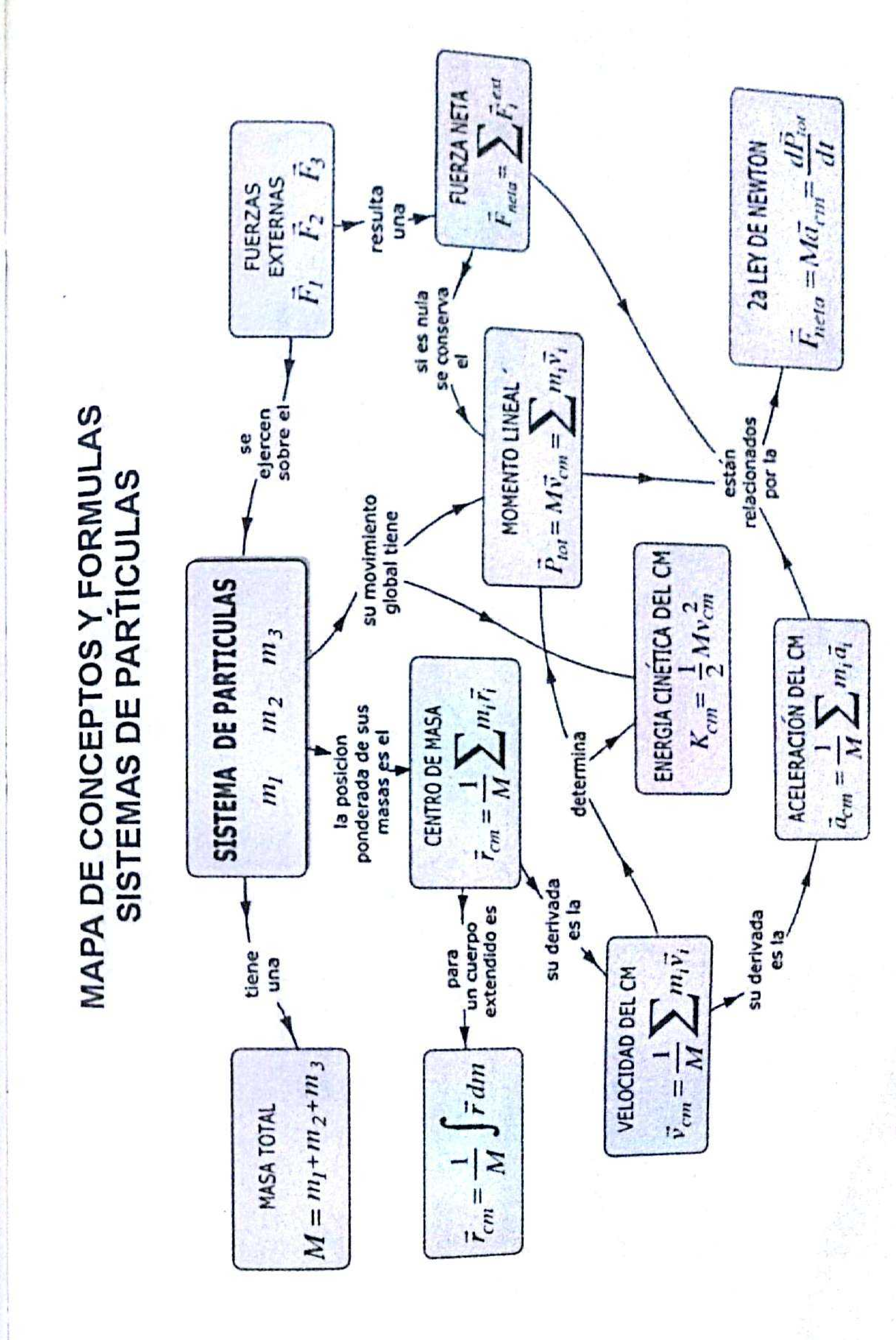
(Fig. 1)
Hemisferio Norte: Invierno
Hemisferio Sur: Verano



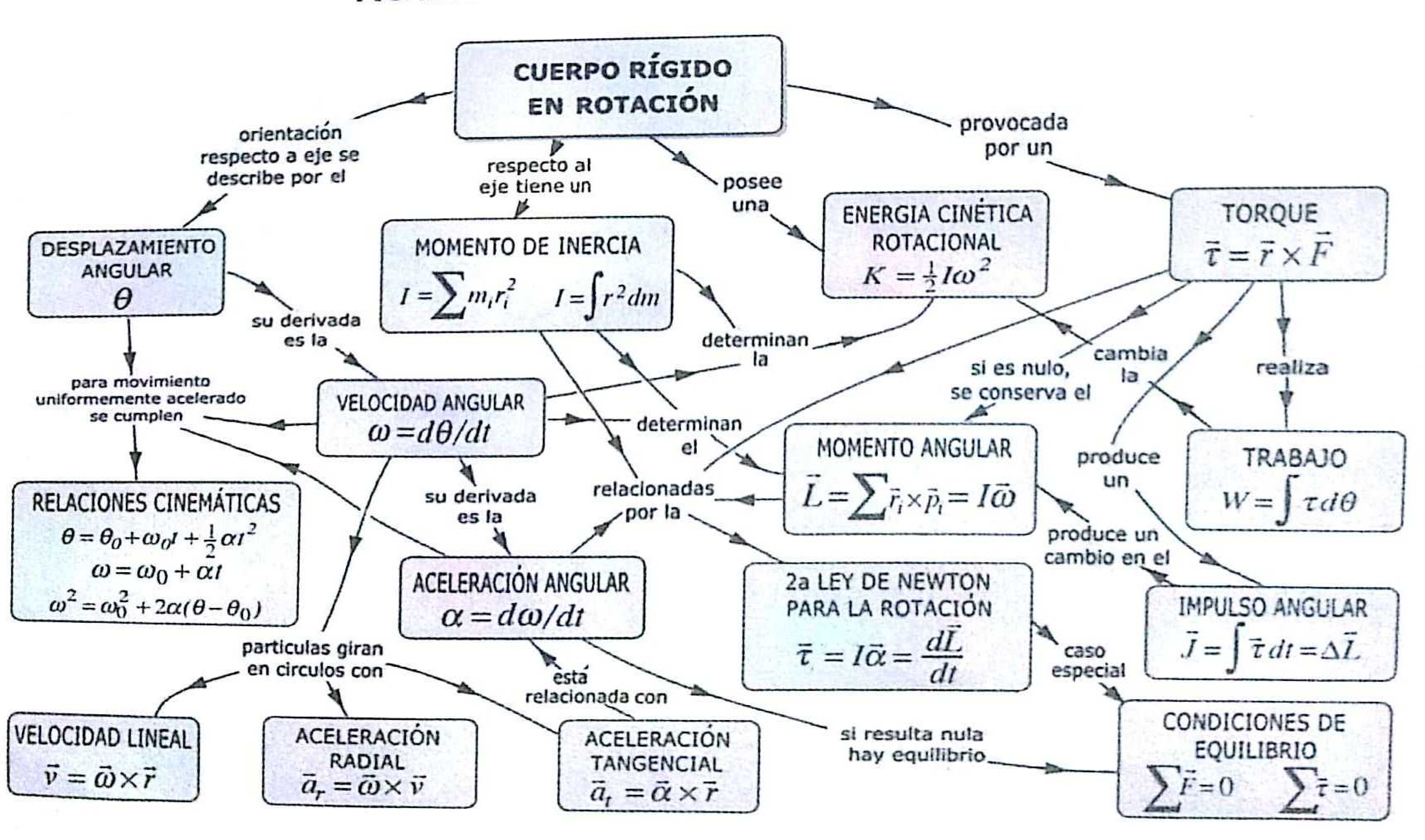
(Fig- 2)
Hemisferio Norte: Verano
Hemisferio Sur: Invierno

	a	b	c	d	e
6.01				√	
6.03					√
6.05				√	
6.07			√		
6.09					√
6.11			√		
6.13		√			
6.15	√				
6.17					√
6.19				√	
6.21			√		

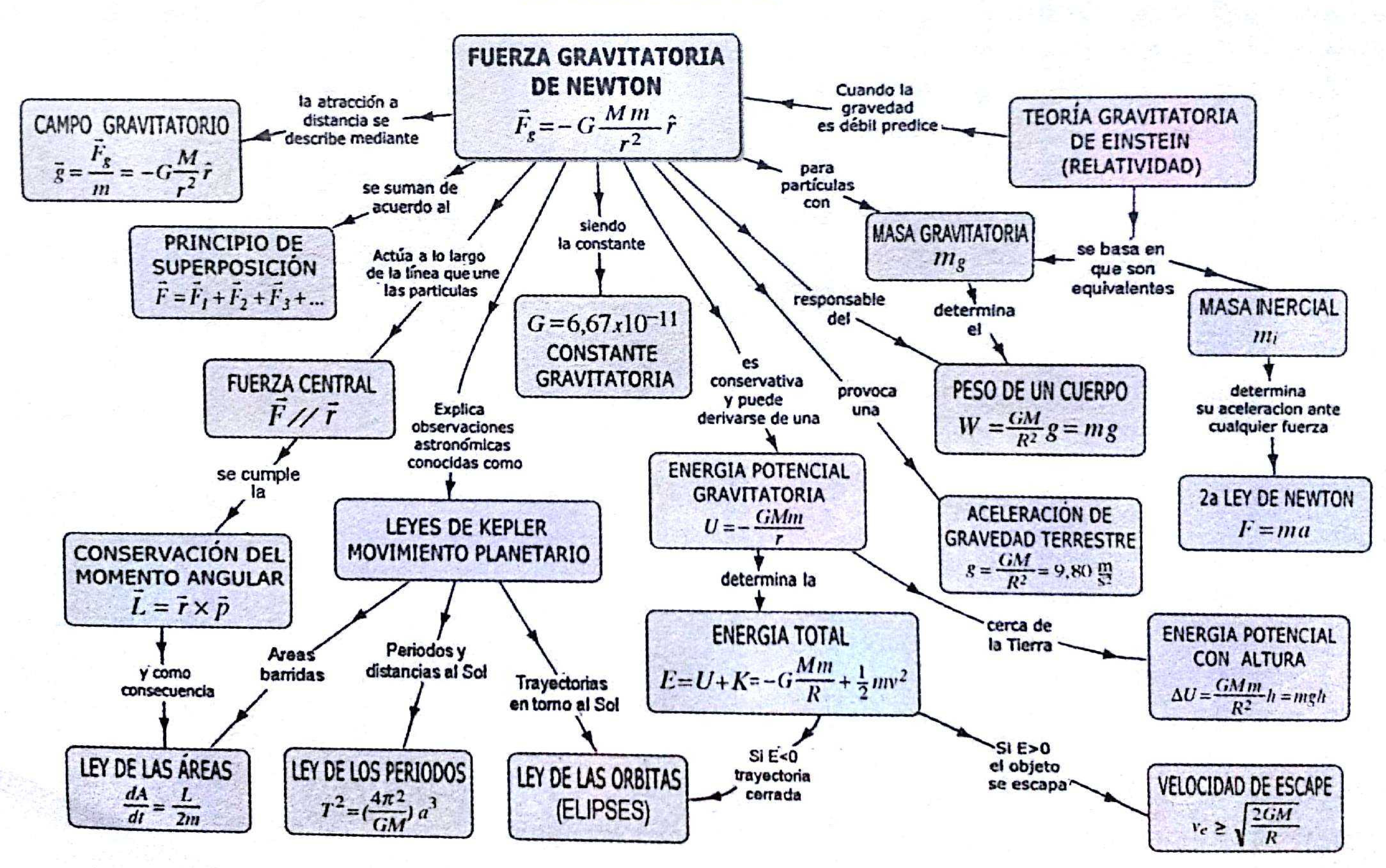
	a	b	c	d	e
6.02			√		
6.04		√			
6.06				√	
6.08	√				
6.10			√		
6.12	√				
6.14		√			
6.16					√
6.18				√	
6.20		√			
6.22		√			



MAPA DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS
ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS



MAPA DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS
GRAVITACIÓN



BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Para los lectores que deseen aclarar, ampliar o profundizar sus conocimientos sobre este tema a nivel de física básica universitaria, nos permitimos sugerir los siguientes libros:

ALONSO, M. y FINN, E.: *Física,* Addison Wesley, 1992.

BÚJOVTSEV, B., KRIVCHENKOV, V, MIAKISHEV, G. y SARÁEVA, I.: *Problemas Seleccionados de Física Elemental,* Editorial Mir Moscú, 1979.

EISBERG, R. y LERNER, L. S: *Física, Vol. 1*, McGraw-Hill, 1984.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON R. B. and SANDS M: *Lectures on Physics, Vol. 1,* Addison-Wesley, 1964.

FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S and THORNTON, S: *Physics for Scientists and Engineers,* 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

GIANCOLI, D: *Física: Principios con aplicaciones*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J: *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, 1997.

KITTEL, C., KNIGHT, W. and RUDERMAN, M.: *Mechanics*, *Berkeley Physics Course, Volume 1,* McGraw-Hill, 1965.

LEA, S y BURKE, J: Física: *La naturaleza de las cosas, Volumen 1*, International Thomson Editores, 1999.

SEARS, F., ZEMANSKY, M. and YOUNG H., *University Physics*, 6th Edition, Addison-Wesley, 1982.

SERWAY, R. A: *Física, Volumen 1*, Cuarta edición, McGraw-Hill, 1997.

SLOBODETSKI, I. y ORLOV, V: *Olimpiadas de Física de la Unión Soviética,* Vneshtorgizdat, Moscú, 1989.

TIPLER, P. A: *Física, Volumen 1*, Tercera edición, Editorial Reverté, 1996.

YOUNG H. D. and FREEDMAN R. A: *University Physics*, *Vol. 1*, 9th Edition, Addison-Wesley, 1996.

SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y CUERPOS RÍGIDOS

Centro de Masa · Cinemática de Rotación · Dinámica de Rotación · Momento Angular · Equilibrio · Gravitación y Fuerzas Centrales

Un enfoque metodológico centrado en la resolución de problemas con énfasis, tanto en aplicaciones de Ciencias e Ingeniería, como en situaciones de la vida diaria





Volumen 3:
Serie Física para Ciencias e Ingeniería